الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الرياضيات

السنة الأولى من التعليم الثانوي جذع مشترك علوم وتكنولوجيا

الإشراف التربوي

مصطفى بلعباس .... مفتش التربية والتكوين

المؤلفون

بوزيد موسعي .... مفتش التربية والتعليم

سليمان حمودي .... أستاذ التعليم الثانوي

أحسن إجاودان .... أستاذ التعليم الثانوي

نشكر الأستاذ يوسف ثرثور على المساعدة التي قدمها لنا من أجل إنجاز هذا الكتاب

نوفمبر 2006

أُلّف هذا الكتاب استجابة لتوجيهات برنامج الرياضيات للسنة الأولى جذع مشترك علوم وتكنولوجيا من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي، المصادق عليه من طرف وزارة التربية الوطنية في مطلع سنة 2005 تماشيا مع خطوات إصلاح المنظومة التربوية. وعليه فقد تمّ توزيع محتواه على تسعة أبواب تغطي الميادين الأربعة التي جاءت في البرنامج، وهي. بابان لميدان الأعداد وبابان للدوال وباب واحد للمعادلات والمتراجحات وآخر للإحصاء وثلاثة أبواب للهندسة.

تتألف الأبواب من ثمانية مقاطع، اختيرت بهدف التكفل بتوجيهات البرنامج ماعدا بابين ـ بسبب طبيعة موضوعيهما ـ هما : باب الإحصاء الذي لا يشتمل على مقطع تعلّم البرهنة، وباب الهندسة الفضائية لا يشتمل على مقطع تكنولوجيات الإعلام الاتصال. والمقاطع الثمانية هي :

1. صفحة التقديم

تصف هذه الصفحة الكفاءات المستهدفة من البرنامج في موضوع الباب المعالج، وتعطي لمحة تاريخية عن مفهوم رياضي ورد في هذا الباب.

2. مقطع الأنشطة

يقدم هذا المقطع أنشطة تغطي قدر الإمكان مختلف جوانب المفهوم الرئيس لهذا الباب بشكل متدرج يراعي مكتسبات التلاميذ من مرحلة التعليم المتوسط، قصد فسح المجال أمامهم لملامسة هذه الجوانب ومن ثمّ اكتشافها تمهيدا لتأسيسها في مقطع الدرس.

3. مقطع الدّرس

يحتوي هذا المقطع على المضمون الرياضي الذي يتمثل في مفاهيم وخوارزميات وإجراءات، وأدوات ومصطلحات وبراهين. هذه الأخيرة تعتبر المحتوى الذي نتوخى أن يكتسبه التلميذ بما تخدم من الكفاءات المنصوص عليها في البرنامج. وقد ورد في هذا الباب ذكر كلمة **مبرهنة** بدلا من كلمة نظرية بقصد التمييز بين نصّ رياضي يحتاج إلى برهان وجملة من المفاهيم يتم التعبير عنها انطلاقا من سلسلة من بديهيات ومسلمات ومصطلحات، ... إلخ.

4. مقطع الطرائق والتمارين المحلولة

يعتبر هذا المقطع الوجه التطبيقي لما عرض في الدرس، فهو لا يكتفي بتقديم الحلول بل يرفقها ببعض التعاليق التي تساعد التلميذ على التعمق في فهم هذه الحلول.

وقد قدّمت تلك التعاليق في عدّة أشكال :

- التنبيه إلى أخطاء شائعة ومحتملة،
- الإشارة إلى طرق حل أخرى،
- ملاحظات يستكمل بها التلميذ الفهم.

وقد ذيّل كل حل بخلاصة تستعرض الطريقة المعتمدة فيه، مع العلم أنّ هذه الخلاصة والتعاليق المشار إليها آنفا لا تعتبر جزءا من الحلّ المقدّم.

5. مقطع تعلّم البرهنة

إضافة إلى البراهين المقدمة في الدرس، نجد هذا المقطع ينفرد بتقديم حلول ليست هدفا في حدّ ذاتها وإنّما هي بمثابة أرضية تعالج فيها الأفكار المؤسسة للبرهان وكيفيات بنائه بغرض توظيف مفاهيم في المنطق أثناء البرهان الرياضي بمختلف أنماطه المنصوص عليها في البرنامج. لذلك جاء عرض محتوي هذا المقطع مختلفا من باب لآخر حسب الحاجة.

6. مقطع استعمال تكنولوجيات الإعلام والاتصال

استحدث هذا المقطع لادراج تكنولوجيات الاعلام والاتصال في تعلّم الرياضيات، إذ تمّ التطرق فيه إلى بعض البرامج التي يوفرها الحاسوب إضافة إلى الحاسبة البيانية، وفي أثناء ذلك أعطيت شروحات نراها ضرورية باعتبار أن منظومتنا التربوية حديثة العهد بوسائل تكنولوجيات الاعلام والاتصال.

7. مقطع حلّ مسألة إدماجية

تسمح الوضعيات المقترحة في هذا المقطع باعطاء فرصة للتلميذ كي يتعوّد على دمج مكتسباته لحل المشكلة المطروحة، ولا يتعلّق الأمر فقط بدمج تلك المكتسبات التي تحصل



عليها للتو بعد انتهائه من دراسة الموضوع المدرج في الباب المعالج بل يمتد إلى دمج مختلف مكتسباته التي تمتد إلى المرحلة المتوسطة. وقد أدرج هذا المقطع استجابة لمقتضيات التدريس ضمن بيداغوجيا المقاربة بالكفاءات.

8. مقطع التمارين

صنفت التمارين في كل باب حسب الفقرات الواردة في الدرس. فهي تتدرج من أسئلة تتعلق بالفهم إلى تمارين ذات تطبيقات مباشرة للدرس إلى أخرى تتطلب التّعمق في البحث، إضافة إلى مسائل يحتاج حلّها إلى دمج عدة كفاءات في آن واحد. وقد تم اختيار هذه التمارين بحيث تغطي مجموع المعارف التي ظهرت في كلّ باب.

لجنة التأليف



الأعداد والحساب

الكفاءات المستهدفة

- التمييز بين مختلف أنواع الأعداد.
- التحكم في الحساب على الكسور وعلى الجذور التربيعية والقوى الصحيحة.
- تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية و استعماله.
- التعرّف على أولية عدد طبيعي.
- التحويل من وإلى الكتابة العشرية، الكتابة العلمية، الكتابة باستعمال القوى الصحيحة للعدد 10.
- تدوير عدد عشري.
- تحديد رتبة مقدار عدد.
- التمييز بين عدد وإحدى قيمه المقربة.
- استخدام الحاسبة العلمية لتنظيم وإجراء حساب.

مرّ تطور العدّ بمراحل مختلفة منذ الحضارات القديمة، ولقد أدى تطور مفهومه إلى ظهور مفهوم العدد، فكان المفهومان متلازمين بحيث لا معنى للعدّ دون العدد الذي ارتبط بالمعدود. وكانت معرفة القدامى بالأعداد بسيطة جدا، إذ استعمل السومريون منذ الألفية الرابعة قبل الميلاد رمزين فقط لكتابة الأعداد بالكتابة المسمارية هما: Y و ≺ وقد كان نظام العدّ عندهم ستينيا وموضعيا (موضع الرمزين مهمّ في العدّ). وهو نفس النظام الذي اعتمده البابليون حيث ظهر ذلك في الألواح الطينية البابلية، التي تعود إلى نفس الفترة الزمنية، وكان اليونان نظام عدّ يعتمد على حروف لغتهم مكان كل حرف يدلّ على رقم $\alpha(1)$ ؛ $\beta(2)$ ... . أما الرومانيون فقد وضعوا نظام عدّ يعتمد على الرموز: I، V، X، L، C، D، M وهو نظام موضعي كسابقيه.

حيث نجد مثلا :

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1000

غير أنّ الفضل في اكتشاف النظام العشري الحالي، يعود إلى الهنود الذين استعملوا أشكالا مختلفة من الأرقام وأجروا بواسطة هذا النظام عمليات حسابية تعتمد على فكرة مراتب الأرقام في العدد الواحد. فورث العلماء في حضارة العرب والمسلمين هذا النظام فوحدوه وهذّبوه وابتدعوا طرقا جديدة للضرب والقسمة منها الضرب بالشبكة وضرب الملوك، حيث استعملت في المشرق الأرقام الهندية وهي : ١٢٣ ٤٥٦ ٧٨٩ ٠

وظهرت في المغرب والأندلس الأرقام الغبارية وهي :1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 التي عرفت لاحقا في أوروبا بالأرقام العربية، كما أدخلوا الصفر في حساباتهم دون أن يعتبروه عددا. وقد انتقلت هذه الأرقام إلى أوروبا في القرن الثالث عشر عن طريق الرياضي الايطالي **ليوناردو فيبوناتشي** (1170م-1240م) عبر مدينة بجاية. ونجد إشارة إلى استعمال أهل المغرب الإسلامي للأرقام الغبارية عند الرياضي ابن قنفذ القسنطيني (توفي 810 هـ-1407 م) في كتابه "حطّ النقاب عن وجوه أعمال الحساب" حيث كتب مايلي :

"...أعلم أنّ صورة العدد في اصطلاح قومي تسعة وهي بالغبار هذه 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 وللهند هذه . غيرها لجاز وهي باصطلاح آخرين سبعة وعشرون وهي فهذه ثلاثة أسطر في كل سطر تسعة أعداد والثلاثة .. ولو اصطلحت لنفسك على أشكال هذه...

239x567
ضرب الشبكة

	5	6	7
9	4 | 5	5 | 4	6 | 3
3	1 | 5	1 | 8	2 | 1
2	1 | 0	1 | 2	1 | 4

1 3 5 5 1 3

أخذ هذا المخطوط من كتاب حطّ النقاب لابن قنفذ القسنطيني

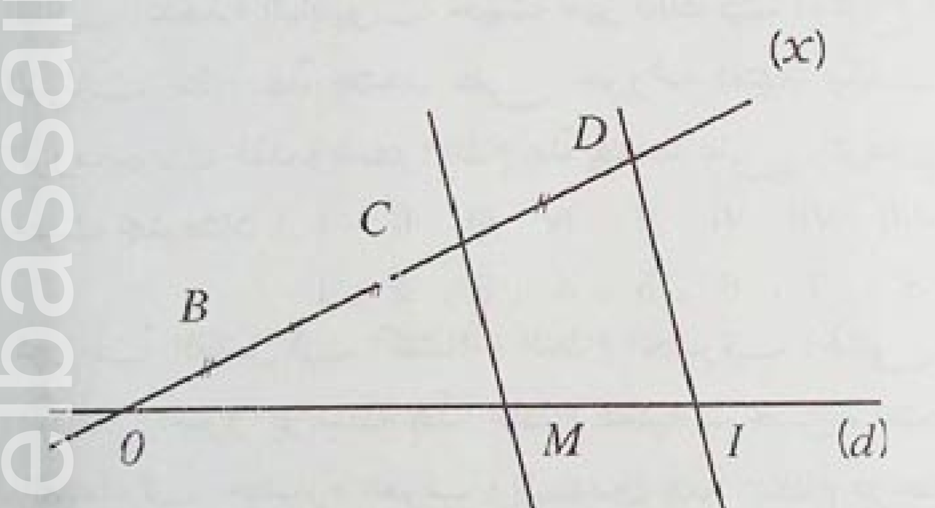
أنشطــــة

نشاط 1: مجموعات الأعداد

ضع العلامة × في الخانات المناسبة عندما يكون العدد x من المجموعة المفروضة.

العدد x / المجموعة	$-\frac{493}{29}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{15}{10^3}$	$13,023$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2^3\times 3^2}{9^2}$	$\sqrt{0,49}$	$\sqrt{81\times10^6}$	$\sqrt{\frac{4}{121}}$	$\frac{-\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$	$(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$
$\mathbb{R}$											
$\mathbb{Q}$											
$\mathbb{D}$											
$\mathbb{Z}$											
$\mathbb{N}$											

نشاط 2 : أعداد قابلة للانشاء (1)



$(O;I)$ معلم للمستقيم (d).

على نصف المستقيم $[Ox)$، نعتبر النقط D ، C ، B

حيث $OB = BC = CD$.

المستقيمان (DI) و (CM) متوازيان. (الشكل المقابل)

1) ما هما فاصلتا النقطتين O و I ؟

2) بيّن لماذا يمكنك استعمال مبرهنة طالس، لحساب النسبة $\frac{OM}{OI}$.

استنتج فاصلة النقطة M في المعلم $(O;I)$.

3) باستعمال مسطرة غير مدرجة ومدور، علّم على المستقيم (d) النقطتين $N\left(-\frac{1}{2}\right)$ و $P\left(-\frac{3}{4}\right)$.

4) أرسم قطعة المستقيم $[BI]$ ثمّ الموازي للمستقيم (BI) الذي يشمل D ويقطع (d) في Q.

ما هي فاصلة النقطة Q في المعلم $(O;I)$؟

نشاط 3 : أعداد قابلة للانشاء (2)

أعد رسم الشكل المقابل باحترام الأبعاد المعطاة.

1) ضع على الشكل أطوال أوتار المثلثات القائمة.

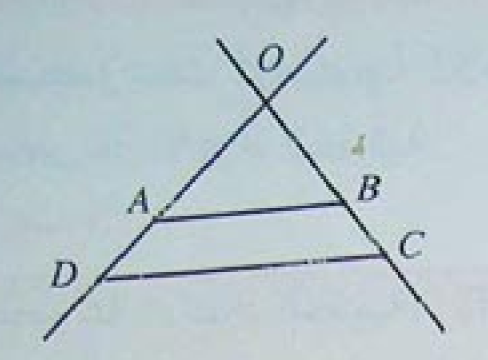
2) علّم على المستقيم العددي، باستعمال المدور، النقاط ذات الفواصل التالية:

$A(\sqrt{2})$ ؛ $B(-\sqrt{5})$ ؛ $C(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ؛ $D(3+\sqrt{2})$.

3) احسب الطول AD.

4) هل مجموع عددين غير ناطقين هو دوما عدد غير ناطق ؟

نشاط 4 : ضرورة استعمال الحساب المضبوط في البرهان



في الشكل المقابل، لدينا : $OA = 1{,}45\,cm$ ؛ $OB = 1{,}2\,cm$

$OC = 1{,}82\,cm$ ؛ $OD = 2{,}2\,cm$

1) أعد رسم الشكل باحترام الأبعاد المعطاة.

2) هل المستقيمان (AB) و (DC) متوازيان ؟
برّر إجابتك.

نشاط 5 : الخاصية المميزة للعدد العشري

ليكن $x = \frac{p}{q}$ عددا ناطقا مكتوبا على شكله غير القابل للاختزال (p و q عددان أوليان فيما بينهما).

لنبرهن أنّ x يكون عددا عشريا إذا وفقط إذا كان لا يشمل تحليل مقامه q إلى جداء عوامل أولية إلا العاملين 2 أو 5 بمعنى $q = 2^\alpha \times 5^\beta$ (حيث α و β عددان طبيعيان).

1) ضع $x = \frac{p}{2^\alpha \times 5^\beta}$ مع $\alpha \geq \beta$ مرة و $x = \frac{p}{2^\alpha \times 5^\beta}$ مع $\alpha < \beta$ مرة أخرى وبيّن في الحالتين أنه يمكن كتابة x على الشكل $\frac{p'}{10^n}$. ماذا تستنتج ؟

2) بيّن أنه إذا كان x عددا عشريا فإنّ $x = \frac{p}{2^n \times 5^n}$. ماذا تستنتج ؟

3) استخلص خاصية يتميّز بها كلّ عدد عشري.

نشاط 6 : الأعداد الأولية

تعريف : نسمّي عددا أوليا كلّ عدد طبيعي يقبل ، بالضبط ،قاسمين مختلفين هما : 1 والعدد نفسه.

1) عيّن من بين الأعداد الآتية الأعداد الأولية: 0، 1، 12، 29.

2) ما هو أصغر عدد أولي؟

3) عيّن قائمة الأعداد الأولية الأصغر من 20.

4) نريد تعيين قائمة الأعداد الأولية التي لا تتجاوز 100، و لأجل ذلك نستعمل غربال إراطوستان كما يلي:

- اكتب في جدول قائمة الأعداد من 2 إلى 100 كما يلي:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- أحفظ 2 الذي هو عدد أولي ثمّ اشطب كلّ مضاعفاته. اشرح لماذا هذه الأعداد ليست أولية؟
- أحفظ 3 ثمّ أشطب مضاعفاته غير المشطوبة من قبل. أعد العمل مع 5 و هكذا.

اشرح لماذا ننهي العمل مع 11 ومضاعفاته.



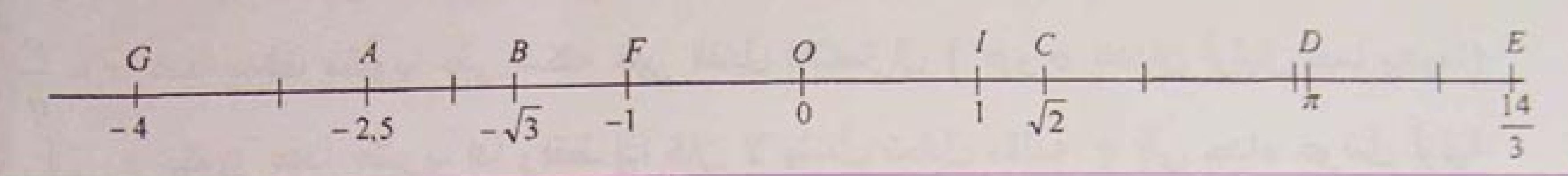
الــدّرس

1. المجموعات الأساسية للأعداد

• مجموعة الأعداد الحقيقية

تعريف 1 :

مجموعة الأعداد الحقيقية، $\mathbb{R}$ ، هي مجموعة فواصل نقط مستقيم مزوّد بمعلم $(O;I)$.
العدد الحقيقي 0 هو فاصلة المبدأ O والعدد الحقيقي 1 هو فاصلة النقطة I.



أمثلة: لاحظ الشكل، فاصلتا النقطتين A و B هما، على التوالي، العددان الحقيقيان السالبان $-2{,}5$ و $-\sqrt{3}$.

بينما الأعداد الحقيقية الموجبة $\sqrt{2}$ و π و $\frac{14}{3}$ هي فواصل النقط C و D و E على الترتيب.

ملاحظة: الأعداد الحقيقية الموجبة هي فواصل نقاط نصف المستقيم $[OI)$. الأعداد الحقيقية السالبة، ما عدا 0، هي فواصل نقاط المستقيم (OI) التي لا تنتمي إلى $[OI)$.

نرمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة بالرمز $\mathbb{R}^+$ وإلى مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة بالرمز $\mathbb{R}^-$.

0 عنصر من $\mathbb{R}^+$ ومن $\mathbb{R}^-$.

نعني بالرمز $\mathbb{R}^*$ مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.

O I
$\mathbb{R}^-$ $\mathbb{R}^+$

• مجموعة الأعداد الطبيعية

0؛ 1؛ 2؛ 3؛ ... أعداد طبيعية. نرمز إلى مجموعة الأعداد الطبيعية بالرمز $\mathbb{N}$.

• مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية

... ؛ 3−؛ 2−؛ 1−؛ 0؛ 1؛ 2؛ 3؛ ... أعداد صحيحة نسبية (سالبة، معدومة أو موجبة).
نرمز إلى مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية بالرمز $\mathbb{Z}$.

أمثلة :

العدد 3 ينتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية. نكتب $3 \in \mathbb{N}$ (الرمز $\in$ يقرأ "ينتمي إلى").
لدينا كذلك $-2 \notin \mathbb{N}$ (نقرأ 2− لا ينتمي إلى $\mathbb{N}$).
$2 \in \mathbb{Z}$ و $-2 \in \mathbb{Z}$، لكن $2{,}1 \notin \mathbb{Z}$.

- العدد الناطق هو العدد الذي يمكن كتابته على الشكل $\frac{p}{q}$ حيث p عدد صحيح نسبي و q عدد صحيح نسبي غير معدوم.
نرمز إلى مجموعة الأعداد الناطقة بالرمز $\mathbb{Q}$.
- العدد العشري هو العدد الذي يمكن كتابته على الشكل $\frac{p}{10^n}$ حيث p عدد صحيح نسبي و n عدد طبيعي.
نرمز إلى مجموعة الأعداد العشرية بالرمز $\mathbb{D}$.
- العدد الأصمّ هو كلّ عدد حقيقي غير ناطق.

أمثلة:

- $-\frac{2}{3}$ عدد ناطق، لأنّه يمكن كتابته على الشكل $\frac{p}{q}$ مع $p=-2$ و $q=3$. نكتب $-\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$.
2,75 عدد عشري، لأنّ $\frac{275}{10^2}=2,75$. لكن $\frac{1}{300}\notin\mathbb{D}$.
- يبرهن أنه لا يوجد عدد صحيح نسبي p وعدد صحيح نسبي غير معدوم q حيث $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$.

لذلك فإنّ $\sqrt{2}$ عدد أصمّ.
توجد أعداد صماء أخرى، مثل π.

خاصية

يتميّز كلّ عدد ناطق بكتابة عشرية تتضمن دورا.

أمثلة: $\frac{23}{7}=3,285714\ 285714\ ...$ ؛ $\frac{17}{11}=1,54\ 54\ 54\ 54\ ...$ ؛ $\frac{1}{2}=0,500000\ ...$

تختصر هذه الكتابات العشرية الدورية كما يلي: $\frac{23}{7}=3,\underline{285714}$ ؛ $\frac{17}{11}=1,\underline{54}$ ؛ $\frac{1}{2}=0,5\underline{0}$

خاصية

كلّ عدد ناطق يقبل كتابة وحيدة على شكل كسر غير قابل للاختزال $\frac{p}{q}$ ، حيث p و q عددان صحيحان نسبيان و $q\neq 0$.

مثال

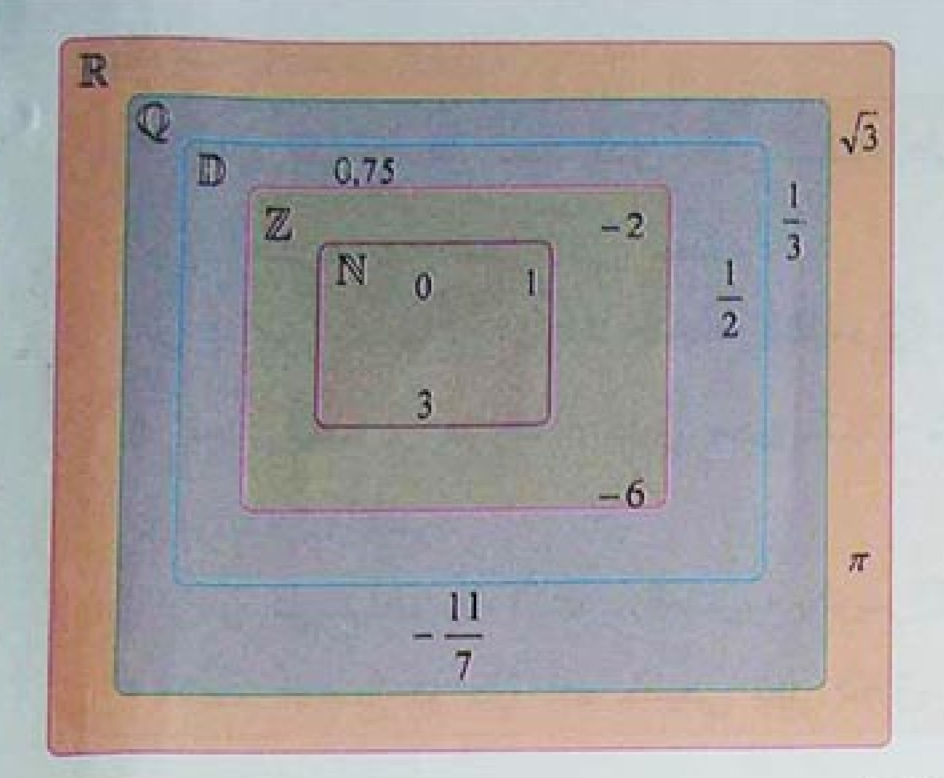
الشكل غير القابل للاختزال للعدد الناطق $\frac{150}{255}$ هو $\frac{10}{17}$ مع $PGCD(10;17)=1$

(لاحظ أنّ $\frac{150}{255}=\frac{15\times 10}{15\times 17}$)

مقارنة مجموعات الأعداد

خاصية

تحقق المجموعات العددية الاحتواءات الآتية: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$



- كلّ الأعداد الطبيعية هي أيضا أعداد صحيحة نسبية،
بمعنى: المجموعة $\mathbb{N}$ جزء من المجموعة $\mathbb{Z}$
نكتب: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. ونقرأ " $\mathbb{N}$محتواة في$\mathbb{Z}$ ".
$\mathbb{Z}$ جزء من $\mathbb{D}$: مثلا $-5 \in \mathbb{D}$ ، لأنّ $-5 = \frac{-5}{10^0}$.
أي كلّ عدد صحيح نسبي هو عدد عشري.

- كلّ عدد عشري هو عدد ناطق ولكن،
ليس كلّ عدد ناطق عشريا.$\mathbb{D}$ جزء من $\mathbb{Q}$.

$0,14 \in \mathbb{Q}$، لأنّ: $0,14 = \frac{14}{10^2}$. $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ و$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$
مجموعة الأعداد الناطقة جزء من مجموعة الأعداد الحقيقية.

2 . القوى الصحيحة

تعريف 2:

- a عدد حقيقي كيفي و n عدد طبيعي غير معدوم. نسمي القوة ذات الرتبة n للعدد الحقيقي a،
العدد a^n حيث: $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ عاملا}}$
- من أجل كل عدد حقيقي a غير معدوم و n عدد طبيعي غير معدوم، $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

اصطلاح: من أجل كلّ عدد حقيقي a غير معدوم، $a^0 = 1$

أمثلة: $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$ ؛ $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ ؛ $(0,5)^{-2} = \frac{1}{(0,5)^2} = \frac{1}{0,25} = 4$ ؛ $a^{-1} = \frac{1}{a}$ مع a حقيقي غير معدوم

خواص

a و b عددان حقيقيان غير معدومين ، m و n عددان صحيحان نسبيان.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ ؛ $(a^m)^n = a^{mn}$ ؛ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ؛ $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ ؛ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

حالات خاصة

- من أجل كلّ عدد حقيقي a غير معدوم وكلّ عدد طبيعي n غير معدوم: $a^n \times a^{-n} = a^0 = 1$.
- من أجل كلّ عدد طبيعي n:
  - إذا كان n زوجيا، فإنّ $(-1)^n = 1$
  - إذا كان n فرديا، فإنّ $(-1)^n = -1$

أمثلة: $2^5 \times 2^{-3} = 2^{5+(-3)} = 2^2$ ؛ $(2^5)^{-3} = 2^{5\times(-3)} = 2^{-15}$ ؛ $\frac{2^5}{2^{-3}} = 2^{5-(-3)} = 2^8$ ؛

$(2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2$ $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2}$ ؛ $(-2)^8 = 2^8$ ؛ $(-2)^5 = -2^5$.



3. الجذور التربيعية

تعريف 3 :

a عدد حقيقي موجب.
نسمّي الجذر التربيعي للعدد الحقيقي a العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه يساوي a ونرمز إليه $\sqrt{a}$.

مثال: $\sqrt{0,49} = 0,7$

خواص

- من أجل a موجب: $\sqrt{a} \geq 0$ و $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.
- من أجل a و b موجبان: $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- من أجل $a \geq 0$ و $b > 0$: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

أمثلة: $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ ؛ $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ؛ $\sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$.

تنبيه: $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$ لأن $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ و $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

4. القيمة المضبوطة، القيم المقربة

- مدوّر عدد حقيقي

تعريف 4 :

A عدد حقيقي مكتوب في شكله العشري، وليكن d رقمه العشري ذا الرتبة $p+1$.
نسمّي مُدوّر A إلى 10^{-p} العدد الذي نحصل عليه كما يلي:
- إذا كان $d \geq 5$، نأخذ العدد بأرقامه العشرية إلى الرقم العشري الذي رتبته p، ونضيف 1 إلى هذا الرقم.
- إذا كان $d < 5$، نأخذ العدد بأرقامه العشرية إلى الرقم العشري الذي رتبته p.

مثال :

3,141592653589793	المدوّر إلى الوحدة	المدوّر إلى 10^{-3}	المدوّر إلى 10^{-5}
	3	3,142	3,14159

- تقدير نتيجة

- الكتابة العلمية

تعريف 5 :

كتابة عدد عشري على الشكل العلمي، تعني التعبير عنه على الشكل $a \times 10^n$ (أو $-a \times 10^n$) حيث a عدد عشري يحقق $1 \leq a < 10$ و n عدد صحيح نسبي.

أمثلة :

العدد	العدد مكتوب على الشكل العلمي	إزاحة الفاصلة
128 000 000	$1,28\times10^{8}$	8 مراتب نحو اليسار
– 0,000 000 000 75	$-7,5\times10^{-10}$	10 مراتب نحو اليمين

ملاحظة: يمكن تعيين الكتابة العلمية لعدد عشري في العديد من الحاسبات باستعمال اللّمسة **EE**

- رتبة مقدار عدد

لإيجاد رتبة مقدار عدد:
- نكتب العدد على الشكل العلمي.
- ندوّر العدد العشريَ في كتابته العلمية إلى العدد الصحيح الأقرب منه ونحتفظ بقوة 10.

أمثلة

1) رتبة مقدار العدد $9,2\times10^{12}$ هي 9×10^{12}.
2) لنعيّن رتبة مقدار العدد $25120\times0,00935$.
   - نكتب كلّ حدّ في الجداء على الشكل العلمي:
     $25120\times0,00935=2,512\times10^{4}\times9,35\times10^{-3}$
   - ندوّر كلا من العددين العشريين في الكتابتين العلميتين إلى العدد الصحيح الأقرب: فنجد $3\times10^{4}\times9\times10^{-3}$ أي $2,7\times10^{2}$.
   - رتبة مقدار العدد $25120\times0,00935$ هي 3×10^{2} . (بعد كتابة النتيجة 27×10 على الشكل العلمي وتدويرها)

5. الأعداد والحاسبة

- تمثيل الأعداد في الحاسبة

عند استعمال الحاسبة، نتعامل مع العدد بثلاثة أشكال هي:

- القيمة المضبوطة
- القيمة الظاهرة
- القيمة المخزنة

مثال

عند استعمال الحاسبة TI-83 Plus بالنسبة إلى جذر 2، نجد:

$\sqrt{2}$ هي القيمة المضبوطة.

1,414213562 هي القيمة الظاهرة.

$\sqrt{2}-1,414213562=3,731E^{-}10$ هي القيمة المخزنة.

يقرأ العدد $3,731E^{-}10$ كما يقرأ العدد $3,731\times10^{-10}$

```
√(2)
          1.414213562
█
```

ملاحظة

- تسمح طاقة الإظهار المألوفة للحاسبة بإعطاء القيمة المضبوطة لعدد له عشرة أرقام على الأكثر، أما إذا كان للعدد أكثر من 10 أرقام، فإنها تعطي قيمة مقربة له على شكل الكتابة العلمية.
- الحاسبات الحديثة تحترم أولويات العمليات.

- **تنظيم حساب باليد أو بالحاسبة**

عند إجراء حساب ما، نتبع عادة الخطوات التالية احتراما لأولويات العمليات حيث ننجز على التوالي:
- الحسابات داخل الأقواس.
- الحسابات المتعلقة بالقوى والجذور التربيعية.
- عمليات الضرب والقسمة حسب ترتيب كتابتها.
- عمليات الجمع والطرح حسب ترتيب كتابتها.

أمثلة

1) تنظيم حساب باليد:

نجري العمليات داخل القوس ← $(2\times3+2\sqrt{2})^2-14=(6+2\sqrt{2})^2-14$

ثمّ نحسب القوى ← $=36+24\sqrt{2}+8-14$

وأخيرا عمليات الجمع والطرح ← $=44+24\sqrt{2}-14$

$=30+24\sqrt{2}$

2) كتابة برنامج حساب بالحاسبة:

$\dfrac{2\times10^{-2}}{3-0,5}$ ← [2] [×] [1] [0] [^] [(-)] [2] [÷] [(] [3] [-] [0] [.] [5] [)]

6. الأعداد الأولية

تعريف

نسمّي عددا أوليا كلّ عدد طبيعي يقبل، بالضبط، قاسمين مختلفين هما: 1 والعدد نفسه.

من أجل $n=12$. قواسم العدد 12 هي 1؛ 2؛ 3؛ 4؛ 6؛ 12: العدد 12 يقبل، على الأقل، قاسما يختلف عن 1 وعن 12. فهو ليس أوليا.
من أجل $n=37$. قواسم 37 هما 1 و 37 فقط. فالعدد 37 أولي.
العدد 1 ليس أوليا، لأنّه يقبل قاسما واحدا فقط والعدد 0 ليس أوليا، لأنّه يقبل عددا غير منته من القواسم.

الأعداد الأولية الأصغر من 100 هي:
2؛ 3؛ 5؛ 7؛ 11؛ 13؛ 17؛ 19؛ 23؛ 29؛ 31؛ 37؛ 41؛ 43؛ 47؛ 53؛ 59؛ 61؛ 67؛ 71؛ 73؛ 79؛ 83؛ 89؛ 97.

مبرهنة

كلّ عدد طبيعي غير أولي وأكبر من 2 يُكتب على شكل جداء أعداد أولية.

مثال: $156=2^2\times3\times13$ ؛ $5418=2\times3^2\times7\times43$

طـــرائق وتمـــارين محلولة

• الانتقال من الكتابة العشرية لعدد ناطق إلى الكتابة الكسرية له

عيّن الكتابة الكسرية للعدد a انطلاقا من الكتابة العشرية الدورية له $a = 3,\underline{254}$.

تعاليق	حلّ
نكتب العدد كمجموع جزئيه الصحيح والعشري.	لدينا $3,254...254... = 3 + 0,254...254...$
الجزء العشري للعدد المعطى يتضمن دورا وهذا يحثنا على كتابته على شكل كسر. أي نكتب: $0,254\ 254\ ... = a\text{-}3$	نضع $3 + 0,254...254... = 3 + x$ مع $x = 0,254...254...$ انطلاقا من $x = 0,254...254...$ ، نجد: $1000x = 254,254...254...$ $1000x = 254 + 0,254254...254...$ $1000x = 254 + x$ $999x = 254$ $x = \frac{254}{999}$
$a \in \mathbb{Q}$ إذن $a\text{-}3 \in \mathbb{Q}$	ومنه: $a = x + 3 = 3 + \frac{254}{999} = \frac{3 \times 999 + 254}{999} = \frac{3251}{999}$.

طريقة

لتعيين الكتابة الكسرية لعدد ناطق انطلاقا من كتابته العشرية الدورية، نكتبه كمجموع لجزأيه الصحيح والعشري.

نفرض x الجزء العشري لهذا العدد. بالضرب في 10^n حيث n عدد أرقام الدور، نحصل على معادلة ذات المجهول x ، نحلّ المعادلة. نعوّض x بالقيمة المعينة ونحصل على العدد الناطق مكتوبا على شكل كسر.

• اختبار أولية عدد طبيعي

هل العدد 197 أوليّ ؟

تعاليق	حلّ
عند إجراء عمليات القسمة على الأعداد الأولية، نستعين بقواعد قابلية القسمة.	▪ العدد 197 لا يقبل القسمة على كلّ من 2 و 3 و 5. ▪ نختبر إن كان العدد 197 يقبل القسمة على الأعداد الأولية حسب ترتيبها في قائمة الأعداد الأولية الأولى:
عند اختبار قابلية قسمة العدد المفروض على الأعداد الأولية، تؤخذ هذه الأعداد في ترتيب تصاعدي ويمكن استعمال الحاسبة لملاحظة حواصل القسمات.	▪ نقسم 197 على العدد الأولي 17. نجد $197 \div 17 \approx 11$. وباعتبار $17 > 11$، ننهي عمليات القسمة. ▪ نستخلص : العدد 197 أولي.

هل يقبل العدد القسمة على	2	3	5	7	11	13
	لا	لا	لا	لا	لا	لا

طريقة

نختبر قابلية قسمة العدد على كلّ من الأعداد الأولية حسب ترتيبها التصاعدي.
نتوقف عن عمليات القسمة عند أول باق معدوم أو عندما نصادف أوّل حاصل قسمة أصغر من المقسوم عليه.
نستخلص: إذا صادفنا الباقي المعدوم يكون العدد غير أولي وإلاّ فهو أولي.

• تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية

لنبحث عن تحليل العدد 240 إلى جداء عوامل أولية.

تعليق	حلّ
يمكن تنظيم الحساب عموديا، كما يلي: $\begin{array}{r\|l} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$	▪ ننظّم الحساب كما يلي: $240=2\times120$ ، $120=2\times60$ ، $60=2\times30$ ، $30=2\times15$ ، $15=3\times5$ ، $5=5\times1$ ▪ نستخلص: $240=2^4\times3\times5$

طريقة

نقسم العدد على أصغر عدد أوليّ يكون قاسما له.
نقسم حاصل القسمة على أصغر عدد أوليّ يكون قاسما له.
نكرّر عمليات القسمة هذه حتى نصل إلى حاصل قسمة يساوي 1 .
كتابة جداء قوى كلّ هذه القواسم هو تحليل العدد إلى جداء عوامل أولية.

• استعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية

1) حلل إلى جداء عوامل أولية العددين 156 و 84

2) اكتب الكسر $\frac{156}{84}$ على الشكل غير القابل للاختزال.

3) احسب المضاعف المشترك الأصغر غير المعدوم للعددين 156 و 84. احسب الفرق $\frac{13}{84}-\frac{5}{156}$.

تعاليق	حلّ
يكن تطبيق الطريقة المقترحة في حلّ التمرين③. عند الاختزال، نطبق القواعد على القوى. في حساب المضاعف المشترك الأصغر غير المعدوم لعددين، نأخذ كل عامل أولي بأكبر الأسين في التحليلين.	1) $156=2^2\times3\times13$ و $84=2^2\times3\times7$ 2) $\frac{156}{84}=\frac{2^2\times3\times13}{2^2\times3\times7}=\frac{13}{7}$ 3) $156=2^2\times3^1\times7^0\times13^1$ و $84=2^2\times3^1\times7^1\times13^0$ $2^2\times3^1\times7^1\times13^1=1092$ هو المضاعف المشترك الأصغر غير المعدوم للعددين 156 و 84. $1092=156\times7$ و $1092=84\times13$ ▪ $\frac{5}{156}-\frac{13}{84}=\frac{5\times7}{1092}-\frac{13\times13}{1092}=\frac{35-169}{1092}=-\frac{134}{1092}=\frac{-67}{546}$

طريقة

لتعيين الشكل غير القابل للاختزال لكسر، يمكن:
– تحليل كلّ من بسطه ومقامه إلى جداء عوامل أولية ثمّ نطبق قواعد الحساب على القوى، لاختزال الكسر.
– استعمال الطريقة المدروسة في التعليم المتوسط، والمتمثلة في تعيين القاسم المشترك الأكبر لحدي الكسر ثم نقسم كلا منهما على هذا القاسم المشترك الأكبر.
لتعيين المضاعف المشترك الأصغر غير المعدوم لعددين طبيعيين غير معدومين، نحسب جداء كلّ العوامل الأولية الواردة في تحليلي هذين العددين مأخوذة مرّة واحدة بأكبر أسّ.

● معرفة إن كان عدد ناطق عددا عشريا

عيّن من بين الأعداد الناطقة التالية الأعداد العشرية: $\frac{35}{98}$ ؛ $\frac{21}{4200}$ ؛ $-\frac{27}{30}$ ؛ $\frac{17}{21}$ ؛ $\frac{15}{280}$

تعاليق

نعتمد على الخاصية المميزة للعدد العشري (أنظر النشاط 6)

حلّ

■ $\frac{35}{98} = \frac{5 \times 7}{2 \times 49} = \frac{5}{14}$

و $14 = 2 \times 7$

تحليل المقام يشمل قوة للعدد 7. $\frac{35}{98}$ ليس عددا عشريا.

■ $\frac{21}{4200} = \frac{21}{2 \times 21 \times 100} = \frac{1}{200}$

و $200 = 2^3 \times 5^2$

تحليل المقام لا يشمل إلا قوى 2 أو 5. $\frac{21}{4200}$ عدد عشري.

نعمل بالمثل بالنسبة للأعداد الأخرى ونجد:

$-\frac{27}{30}$ عدد عشري و $\frac{17}{21}$ و $\frac{15}{280}$ عددان غير عشريين.

طريقة

لمعرفة إن كان عدد ناطق عددا عشريا، نكتب العدد الناطق على شكله غير القابل للاختزال $\frac{p}{q}$، ثمّ نُحلل مقامه q إلى جداء عوامل أولية.

إذا كان هذا التحليل لا يشمل إلا قوى 2 أو 5، فالعدد عشري.

● استعمال رتبة مقدار عدد لتقدير نتيجة حساب

أجرى أمين الحسابات التالية باستعمال الحاسبة، ساعده على مراقبة النتائج الظاهرة لكلّ حساب.

الحساب	$2562356{,}12 \times 0{,}00035$	$\frac{897563{,}25}{0{,}036}$	$\frac{586251{,}365 \times 26584{,}4}{458 \times 0{,}0000012}$
النتيجة الظاهرة	896,824642	249323,125	28357243070000

تعاليق

لمساعدة أمين على مراقبة نتائجه تفهم هنا على أنها الحكم على معقولية هذه النتائج وليس تصديقها.

حلّ

الحساب	(1)	(2)	(3)
النتيجة الظاهرة	896,824642	249323,125	28357243070000
الكتابة العلمية للحساب	$8{,}9 \times 10^2$	$2{,}4 \times 10^7$	$2{,}8 \times 10^{13}$
تقدير النتيجة	9×10^2	2×10^7	3×10^{13}
الحكم	الحساب معقول	الحساب غير معقول	الحساب معقول

طريقة

للحكم على معقولية حساب، نقدر النتيجة بإعطاء رتبة مقدارها ونقارن هذا التقدير مع النتيجة الظاهرة.

① البرهان على صحة مساواة

للبرهان على صحة مساواة $A = B$ حيث A و B عددان أو عبارتان، يمكن إتباع إحدى الطرق التالية .

- ننطلق من أحد الطرفين A أو B ونحوّل كتابته بتطبيق قواعد الحساب ضمن عدد معيّن من المراحل المتتابعة إلى أن نفضي إلى الطرف الأخر.

مثال : نبرهن أنّ، $\dfrac{1000 - 0{,}00003^2 - 10^3}{9 \times 10^{-9}} = -0{,}15$.

نضع $A = \dfrac{1000 - 0{,}00003^2 - 10^3}{9 \times 10^{-9}}$ و $B = -0{,}15$.

لدينا:

$$A = \frac{1000 - 0{,}00003^2 - 10^3}{6 \times 10^{-9}} = \frac{10^3 - \left(3 \times 10^{-5}\right)^2 - 10^3}{6 \times 10^{-9}}$$

$$= -\frac{9 \times 10^{-10}}{6 \times 10^{-9}} = -\frac{3 \times 10^{-1}}{2} = -1{,}5 \times 10^{-1} = -0{,}15 = B$$

- نحوّل كتابتي الطرفين A و B إلى أن نفضي إلى نفس العبارة C .

مثال : نبرهن أنّ، من أجل كلّ عدد حقيقي x ،

$(x+2)^2 - 5 = (x-1)(x+5) + 4$.

نضع $A = (x+2)^2 - 5$ و $B = (x-1)(x+5) + 4$

لدينا:

$$A = (x+2)^2 - 5 = x^2 + 4x + 4 - 5 = x^2 + 4x - 1$$

من جهة، ومن جهة أخرى،

$$B = (x-1)(x+5) + 4 = x^2 + 5x - x - 5 + 4 = x^2 + 4x - 1$$

بوضع $C = x^2 + 4x - 1$ ، وجدنا $A = C$ و $B = C$.

نستخلص $A = B$.

- نبرهن أنّ $A - B = 0$

مثال : برهن أنّ $\dfrac{1}{5+\sqrt{2}} = \dfrac{5-\sqrt{2}}{23}$.

نسمي A الطرف الأول و B الطرف الثاني. نعتبر $A - B$.

لدينا:

$$A - B = \frac{5-\sqrt{2}}{23} - \frac{1}{5+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\left(5+\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{2}\right) - 23}{23\left(5+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{25 - 2 - 23}{23\left(5+\sqrt{2}\right)} = 0$$

من $A - B = 0$ نستخلص $A = B$.

إعادة استثمار

برهن، باستعمال الطرق الثلاث السابقة، أنّه:

من أجل كلّ عدد حقيقي x غير معدوم، $x + 2 - \dfrac{3}{x} = \dfrac{(x-1)(x+3)}{x}$



② معرفة إن كان نصّ رياضي صحيحا أو خاطئا

نصادف أحيانا نصوصا استفهامية تصاغ على الشكل: هل ... ؟ .هذه النصوص تحتمل الإجابة بنعم أو لا والإجابة عليها تحتاج في الحالتين إلى تبرير حتى وإن كان ذلك غير مطلوب في النصّ صراحة.

مثال 1: إليك النصّ الآتي " هل يكون مربع عدد حقيقي a أكبر من أو يساوي a دائما ؟"
ناقش الحوار الآتي الذي جرى بين تلميذين عند تبادلهماللحوار فيما بينهما حول هذا النصّ ثمّ حرّر إجابتك.

- عمر: " جرّبت أعدادا موجبة وأخرى سالبة ووجدت أن مربعات هذه الأعداد أكبر من أو تساوي هذه الأعداد:
  من أجل 1: $1^2 = 1$ و $1 \geq 1$
  من أجل 5: $5^2 = 25$ و $25 \geq 5$
  من أجل 1-: $(-1)^2 = 1$ و $1 \geq 1$
  من أجل 5-: $(-5)^2 = 25$ و $25 \geq -5$
  ثم جرّبت عددا أكبر: $100^2 = 10000$ و $10\,000 \geq 100$
  منه أستخلص أنّ النصّ السابق صحيح ".
- حكيم: " أظن أنك أخطأت. لا أعرف خطأك بالضبط، لكن عندما جرّبت العدد الحقيقي $\frac{1}{2}$، وجدت أنّ: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ " ؟!

مثال 2: طرح على تلميذ السؤال " هل مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي ؟ " فكانت إجابته كالآتي:

أجرّب العددين الفرديين 1 و 3 ؛ $1+3=4$ و 4 عدد زوجي.
أجرّب عددين فرديين أكبر 105 و 123 ؛ $105+123=228$ و 228 عدد زوجي.
أستخلص أنّ مجموع كلّ عددين فرديين هو عدد زوجي.

هذا صحيح، لكنه غير كاف لأن ذلك لم تبرر الإجابة بعد المحاولة مع اعتبار العدد الفردي في الحالة العامة

ناقش هذه الإجابة ثمّ حرر إجابتك مستفيدا من ملاحظات الأستاذ.

إعادة استثمار

1. هل مجموع ثلاث أعداد طبيعية متتابعة مضاعف للعدد 3 ؟
2. هل مربع مجموع عددين يساوي مجموع مربعي هذين العددين ؟



- **استعمال الحاسبة**

① أنظم حسابا

1) احسب ما يلي: $A = (-15+8)\times 2+10$ ؛ $B = \dfrac{9\times 2-10}{12-8}$

2) اكتب الحساب الموافق للبرنامج التالي:



3) اكتب البرنامج الذي يسمح بحساب ما يلي: $E = \dfrac{2\pi - \sqrt{3}}{10^{-2}}$

② أسترجع الأرقام العشرية

```
11/13
          .8461538462
Rep*10-8
          .4615384615
Rep*10-4
          .6153846154
```

1) أظهر العدد $\dfrac{11}{13}$. لتكن a القيمة الظاهرة.

2) ماذا يمثّل a بالنسبة إلى العدد $\dfrac{11}{13}$ ؟

3) أجر الحساب المشار إليه في هذا الجدول لاسترجاع الأرقام العشرية المخزونة:

ANS	×	10	-	8	ENTER

– هل الرقم ما قبل الأخير وارد في كتابة a؟ لماذا ؟

5) أجر الحساب الآتي:

ANS	×	10	-	4	ENTER

– ما هو الرقم العشري المسترجع ؟

6) واصل الإجراء حتى إظهار كل الأرقام المخزنة.
ما هو عددها ؟

③ أعرف حدود الحاسبة

1) نريد حساب 10157^2. العدد 10157 محصور بين 10 000 و 20 000.
– ما هو عدد أرقام العدد 10157^2 ؟ ما هو رقم آحاد العدد 10157^2 ؟
احسب، باستعمال الحاسبة العدد 10157^2. تحقق من انسجام النتيجة الظاهرة مع إجابتك.
احسب، باستعمال الحاسبة العدد 101578^2 (لاحظ أن الآلة تعطي النتيجة على الشكل العلمي).
تحقق، باتباع نفس الخطوات كما في السؤال 1)، إن كانت النتيجة الظاهرة صحيحة.

2) احسب، باستعمال الحاسبة، العدد $(1+10^{-20})^2 - 1$
هل النتيجة الظاهرة معقولة ؟ اشرح لماذا ؟

3) احسب باستعمال الحاسبة قيمة $\sqrt{2}$. نسمي x القيمة الظاهرة.
احسب $\sqrt{2} - x$
هل القيمة المقربة للعدد $\sqrt{2}$ الظاهرة هي نفس القيمة التي تستعملها الحاسبة في الحساب؟



• حساب القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b $(a>b)$

يمكن إنجاز المثال الآتي بمجدول أو حاسبة بيانية (TI-83 أو casio).

مثال: لنحسب $PGCD(3\,206,847)$

• باستعمال مجدول

	A	B	C	D	E	F
1	حساب القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b (a>b)					
2		a	b	الفرق		
3	1	3206	847	2359		
4	2					
5	3					

1) حضّر ورقة الحساب المقابلة.
لحساب الفرق $3206-847$، نحجز في الخلية $D3$ الدستور: $=B3-C3$

2) أحجز في الخلية $B4$ الدستور: $=MAX(C3;D3)$
أحجز في الخلية $C4$ الدستور: $=MIN(C3;D3)$
أحجز في الخلية $D4$ الدستور: $=B4-C4$

3) حدّد مجموعة الخلايا $B4{:}D4$ (من $B4$ إلى $D4$) ثمّ أنقلها بواسطة الزالق نحو الأسفل إلى أن تتحصل على فرق معدوم في إحدى خلايا العمود D.

4) تحقق من أنّ الفرق الأخير غير المعدوم هو القاسم المشترك الأكبر للعددين المفروضين.

• باستعمال الحاسبة البيانية (TI-83 Plus).

1. نختار البرنامج MATH

2. بواسطة اللمسة ▶ نختار NUM

ثمّ بواسطة ▼ نختار الوظيفة gcd(
أو بالنقر على اللمسة 9 مباشرة.

3. نصادق (نؤكد الاختيار) بواسطة اللمسة ENTER

ونحجز العددين 3206 و 847.

4. نصادق (نطلب النتيجة) فنتحصل على القاسم المشترك الأكبر للعددين المحجوزين.

```
MATH NUM CPX PRB
1:▶Frac
2:▶Dec
```

```
MATH NUM CPX PRB
3↑iPart(
4:fPart(
5:int(
6:min(
7:max(
8:lcm(
9:gcd(
```

```
gcd(
```

```
gcd(3206,847)
```

```
gcd(3206,847)
                7
```

حـــلّ مسألة إدماجيـــة

الهدف: استعمال الأعداد في ميدان الهندسة

1) على المستقيم المدرّج، نريد إنشاء العدد الحقيقي $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$، المسمّى العدد الذهبي[1].

لذلك، نعتبر الشكل المقابل حيث (OA) مستقيم مزوّد بالمعلم (O, A) و $OABC$ مربع و I منتصف $[OA]$.

أ) أعد رسم الشكل ثمّ علّم على المستقيم (OA) النقطة M التي فاصلتها ϕ.

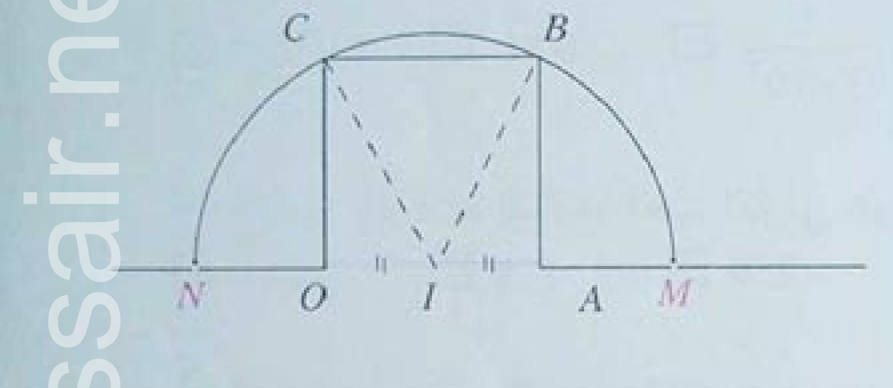
ب) بيّن أن فاصلة النقطة N، نظيرة M بالنسبة إلى I، هي $1-\phi$.

ـحـ) احسب MN.

2) برهن أنّ ϕ يحقق الخواص:

أ) $\phi^2 = \phi + 1$ ب) $\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$ ج) $\phi^3 = 2\phi + 1$

حلّ



1) أ) يمكن وضع العدد الذهبي على الشكل $\phi = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

في المثلث القائم IAB في A وبتطبيق نظرية فيثاغورس، نجد: $IB^2 = IA^2 + AB^2$ مع $AB = 1$

و $IA = \dfrac{1}{2}$ منه: $IB = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ تقطع المستقيم (OA) في نقطتين M و N.

نستنتج فاصلة M: $\phi = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

ب) النقطتان M و N متناظرتان بالنسبة إلى I: $x_M + x_N = 2x_I$ مع $x_M = \phi$ و $x_I = \dfrac{1}{2}$.

منه فاصلة النقطة N: $x_N = 1 - \phi$.

ـحـ) $MN = 2 \times \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

2) أ) $\phi^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{2+1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \phi$

ب) من $\phi^2 = \phi + 1$ نستنتج $\phi = \dfrac{\phi+1}{\phi} = 1 + \dfrac{1}{\phi}$

ـحـ) $\phi^3 = \phi^2 \times \phi = (\phi + 1) \times \phi = \phi^2 + \phi = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1$

العدد الذهبي هو الحلّ الموجب للمعادلة $x^2 - x - 1 = 0$ أي $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($\phi \approx 1{,}618$) ويُعيّن بالحرف ϕ تخليدا للفنان الإغريقي فيدياس Phidias. يتجلى العدد الذهبي في كثير من الأعمال الرياضية والفنية (هرم خوفو، مدرج أثينا، أعمال إقليدس وفيبوناتشي، ...) وقد ورد في المبرهنة رقم 11 من المقالة الثانية من كتاب إقليدس "الأصول".

تمـــارين ومســـائل

أصحيح أم خاطئ؟

ضع العلامة × في الخانة (أو الخانات) المناسبة.

1. $\frac{1}{7}$ ينتمي إلى:

☐ N ☐ Z ☒ D
☒ Q ☒ R.

2. من بين الأعداد التالية، العدد الطبيعي هو:

☐ $\frac{(\sqrt{2})^4}{4}$ ☐ $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}$ ☐ $(1+\sqrt{2})^2-3$

3. من بين الأعداد الناطقة التالية، العدد غير العشري هو:

☐ 6×10^{-4} ☐ $\sqrt{0,81}$ ☐ $\frac{1}{3\times10^2}$

4. من بين الأعداد التالية، العدد الأولي هو:

☐ 183 ☐ 121 ☐ 259

5. التحليل المناسب للعدد 6270 هو:

☐ $2\times5\times11\times57$
☐ $2^2\times5\times313$
☐ $2\times3\times5\times11\times19$
☐ $2\times3\times5\times209$

6. العدد $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$ يساوي:

☐ 15^3 ☐ 225 ☐ $(1+2+3+4+5)^3$

تمثيل أعداد على المستقيم العددي

7. اعد رسم المستقيم (الوحدة $1cm$) ثمّ ضع كلا من الأعداد الحقيقية التالية في الخانة المناسبة:

$-\sqrt{5}$ ؛ π ؛ $\frac{3}{2}$ ؛ 1 ؛ -1

0 1

8. أوجد الأعداد المعينة بالحروف x و y و z على المستقيم العددي:

x y z
5,1 5,2 5,3 5,4

9. علّم على مستقيم مزوّد بمعلم (O,I) (الوحدة $1cm$) النقاط الممثلة للأعداد الحقيقية التالية:

$-\pi$ ؛ $-\frac{3}{2}$ ؛ $\sqrt{5}$ ؛ $\frac{\pi}{2}$ ؛ 2π .

10. علّم على مستقيم مزوّد بمعلم (O,I) (الوحدة $3cm$) النقاط الممثلة للأعداد الحقيقية التالية:

-2 ؛ $2,5$ ؛ $\frac{8}{3}$ ؛ $-\frac{\pi}{3}$ ؛ $\frac{3\pi}{2}$.

مجموعات الأعداد

11. أكمل بأحد الرمزين ∈ أو ∉:

$10 \ldots N$ $3,5 \ldots Z$ $\frac{1}{3} \ldots D$

$\frac{\sqrt{2}}{3} \ldots Q$ $\frac{2\pi}{3} \ldots R$

12. عيّن المجموعة (أو المجموعات) التي ينتمي إليها كلّ من الأعداد التالية:

1) -3 ؛ 125 ؛ $2\sqrt{3}$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

2) $-\frac{7}{3}$ ؛ π ؛ 0 ؛ $2,75$

13. بيّن طبيعة كلّ من الأعداد:

$A=\frac{-\sqrt{144}}{3}$ ؛ $B=\frac{\pi}{3,14}$ ؛ $C=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

14. لتكن I مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $-4\le x\le3$.

1) ما هو عدد عناصر N التي تشملها I؟
2) ما هو عدد عناصر Z التي تشملها I؟
3) ما هو عدد عناصر Q التي تشملها I؟

15. انقل الجدول التالي واكمل بوضع علامة × عندما يكون العدد عنصرا من المجموعة كما في السطر الأول.

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$
58	×	×	×	×	×
$\frac{3}{2}$					
$-\frac{15}{3}$					
$1,5\times10^{3}$					
2π					
$\frac{1}{100}$					
$\sqrt{64}$					
$(0,5)^{2}$					

16. تعطى الأعداد:

$3,503$ ؛ 10^{-3} ؛ -10^{3} ؛ 3587 ؛ 4×10^{-2} ؛ π ؛ $-\frac{3}{100}$ ؛ $-\frac{22}{7}$ ؛ $3,14$ ؛ $\sqrt{2}$ ؛ $\sqrt{0,25}$ ؛ $\frac{1}{3}$ ؛ $-\frac{21}{6}$ ؛ $\frac{2}{\pi}$ ؛ $\sqrt{\pi}$ ؛ $\sqrt{\sqrt{16}}$ ؛ 0.

1) ما هي الأعداد العشرية ؟

2) ما هي الأعداد الناطقة غير العشرية ؟

3) ما هي الأعداد غير الناطقة ؟

17. بيّن أنّ الأعداد التالية ناطقة:

$2,5$ ؛ $-0,47$ ؛ 120 ؛ $\frac{0,125}{62,5}$ ؛ $\frac{5}{40\times10^{-2}}$

18. اكتب الأعداد التالية على الشكل العشري.

$25\,000\times10^{-4}$ ؛ 52×10^{-3} ؛ 3×10^{-2}

12×10^{6} ؛ $6,125\times10^{-3}$ ؛ $62,39\times10^{4}$

19. اكتب كلا من العددين الناطقين التاليين على شكل كسر:

$A=0,\underline{027}027...$ ، $B=34,1\underline{456}\,456\,..$

20. عيّن من بين الأعداد الناطقة التالية الأعداد العشرية.

$\frac{3}{2}$ ؛ $-\frac{13}{12}$ ؛ $\frac{15}{4}$ ؛ $\frac{71}{25}$ ؛ $-\frac{32}{105}$ ؛ $\frac{33}{375}$ ؛ $\frac{1}{2000}$

21. باستعمال الحاسبة ودون لمسة الفاصلة احسب:

$$0,000\,38\times32,956\,2$$

22. دون استعمال الحاسبة، أوجد الكتابات التي تعيّن نفس العدد:

$\frac{1}{100}$ ؛ 10^{-2} ؛ $\left(\frac{1}{10}\right)^{2}$ ؛ 100 ؛ $(2\times50)^{-2}$

23. اختزل إلى أقصى حد الأعداد التالية ثمّ عيّن أصغر مجموعة ينتمي إليها كلّ منها:

$\frac{0,21}{1,05}$ ؛ $\frac{7\pi+14}{3\pi+6}$ ؛ $\frac{16}{6}-\frac{11}{3}$ ؛ $-\frac{6\pi}{3}$ ؛

$\frac{2}{\sqrt{2}+1}-2\sqrt{2}$

24. عيّن، بالاستعانة بحاسبة، الكتابة العشرية لكلّ من الأعداد التالية:

$A=\frac{589-32}{633+917}$ ؛ $B=\frac{7}{2\times3\times4}$ ؛

$C=\sqrt{56,25+7,75}-8$

– اكتب برنامج كل حساب.

25. اكتب برنامج الحساب الموافق لكلّ حساب:

$3a+\frac{1}{a}+2$ ؛ $\frac{3a+1}{a+2}$ ؛ $\frac{3(a+1)}{a}+2$ ؛

$3a+\frac{1}{a+2}$ ؛ $\frac{3(a+1)}{a+2}$

قوى عدد حقيقي

26. عيّن إشارة كل من الأعداد التالية:

$(-3)^{5}$ ؛ $(-5)^{8}$ ؛ -3^{5} ؛ 10^{-3} ؛ $(-3^{3})^{2}$

27. احسب

1) $2^{2}\times3^{3}$ ؛ $2^{2}\times3^{3}\times5$ ؛ $2^{3}\times3^{3}$ ؛ $2^{3}+3^{2}$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\times3^{2}$ ؛ $\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{3}$ ؛ $2\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{4}{5}\right)^{2}$

3) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{3}$ ؛ $\left(-\frac{5}{4}\right)\times\left(\frac{4}{5}\right)^{2}\times\left(-\frac{2}{5}\right)$

28. احسب $A=\dfrac{(-2)^5\times(-6)^3\times(-3)^8}{(15)^2\times(-12)^3}$

29. اختصر العبارات التالية

$A=\left(2^3\times2^{-4}\right)^2\times\left(3^3\right)^2\times3^{-5}$ ؛ $B=2^3\times2^4\times2^{-5}$

$C=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times3^3$ ؛ $D=\left(2^3\times3^2\right)^2$

$$E=\left(-\frac{1}{3}\right)^2\times5^{-2}\times\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$$F=\left(\frac{2}{7}\right)^4\times\left(\frac{7}{4}\right)^2\times\left(\frac{-49}{2}\right)^3$$

$$G=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^4\times\left(\frac{27}{4}\right)^{-1}$$

30. اكتب الأعداد التالية على الشكل $2^n\times5^m$ حيث n و m عددان صحيحان نسبيان.

$a=\dfrac{2^4}{10^5}$ ؛ $b=\dfrac{25^3}{5^{-5}}$ ؛ $c=\dfrac{\left(10^2\right)^3}{2^6\times5^6}$

31. اختزل وأعط النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال.

$A=\dfrac{12^5\times35^{-2}}{49^{-3}\times21^4}$ ؛ $B=\dfrac{(-5)^3\times(-8)^3\times(-9)^2}{(15)^2\times(12)^2}$

32. نعتبر العدد:

$A=987891236^2-987891235^2$

1) احسب بالاستعانة بالحاسبة العدد A.

2) برّر، بالتمعن في رقم الآحاد، أنّ هذه النتيجة خاطئة.

3) ضع $a=987891236$. عبّر عن A بدلالة a ثمّ استنتج القيمة المضبوطة للعدد A.

الجذور التربيعية

33. عيّن من بين الكتابات التالية الأعداد الحقيقية

$\sqrt{\pi}$ ؛ $\sqrt{(-3)^2}$ ؛ $\sqrt{-25}$ ؛ $\sqrt{13-\sqrt{136}}$ ؛ $\sqrt{\dfrac{5}{9}}$

34. اكتب على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث b أصغر ما يمكن: $\sqrt{200}$ ؛ $\sqrt{6}\times\sqrt{48}$ ؛ $\sqrt{\dfrac{75}{27}}$ ؛ $\sqrt{3^2+4^2}$

35. اكتب على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث $a\in Z$ و $b\in N$

$$A=2\sqrt{3}+5\sqrt{12}-\sqrt{75}$$

$$B=3\sqrt{80}-\sqrt{180}-\sqrt{90}$$

36. عين الأعداد المتساوية

$\sqrt{2}$ ؛ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ ؛ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ؛ $\sqrt{8}-\sqrt{2}$

37. احسب

$$E=\left(\frac{12+25\sqrt{6}}{6}\right)\div\left(1+\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\sqrt{24}\right)$$

38. احسب مقلوب $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

39. اختصر كتابة كل من الأعداد التالية

$\sqrt{81}$ ؛ $\sqrt{175}$ ؛ $\sqrt{1080}$ ؛ $\sqrt{27}+\sqrt{48}$ ؛ $\sqrt{0,45}$ ؛ $\sqrt{27}+2\sqrt{75}-\sqrt{108}$ ؛ $\sqrt{36}-3\sqrt{6}+5\sqrt{144}$ ؛ $\sqrt{\dfrac{8}{9}}\times\sqrt{\dfrac{12}{25}}\times\sqrt{\dfrac{225}{24}}$.

40. انشر ثم اختزل

$\left(1+\sqrt{2}\right)^2$ ؛ $\left(2\sqrt{5}+3\right)^2$ ؛ $\left(1-5\sqrt{2}\right)^2$

$\left(7-\sqrt{3}\right)\left(7+\sqrt{3}\right)$ ؛ $\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)\times2\sqrt{2}$

41. اكتب الأعداد التالية بمقامات ناطقة

$\dfrac{5}{2\sqrt{10}}$ ؛ $\dfrac{\sqrt{7}}{3\sqrt{5}}$ ؛ $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}$ ؛ $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

42. اختزل الأعداد التالية (تعطى النتائج بمقامات ناطقة)

$B=\dfrac{3\sqrt{360}-2\sqrt{180}}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$ ؛ $A=\dfrac{2}{\sqrt{33}}\left(\dfrac{\sqrt{363}}{\sqrt{2}-1}\right)$

43. a و b عددان حقيقيان يحققان:

$a+b=1$ و $a^2+b^2=2$ ... (1)

1) احسب ab.

2) برهن أنّ a^4+b^4 عدد عشري.

3) برهن بالحساب أنّ $a=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ و $b=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ يحققان الشرطين (1).

44. برهن صحة المساواة

$$1+\sqrt{3}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=1$$

45. نعتبر العبارة $E=x^2-3x+4$

باستعمال حاسبة، احسب قيمة E من أجل $x=1+\sqrt{3}$.

القيم المقربة

46. احسب، بالاستعانة بالحاسبة، المدور إلى 10^{-3} لكلّ من الأعداد التالية:

$\frac{2000}{7}$ ؛ $\frac{\pi}{60}$ ؛ $\cos(80°)$ ؛ $\frac{3\sqrt{7}-9}{2}$

47. بالاستعانة بالحاسبة، أكمل الجدول التالي:

العدد	$\frac{3\pi}{2}$	$1205\sqrt{3}\times4.10^{-4}$
المدور إلى 10^{-3}		

48. من بين الأعداد التالية، عيّن الأعداد المكتوبة على الشكل العلمي ثم اكتب الأعداد الأخرى على هذا الشكل:

12×10^{-3} ؛ $6{,}5\times10^{5}$ ؛ $5{,}03\times10^{-4}$ ؛ $-34{,}56\times10^{-2}$

49. أكتب الأعداد التالية على الشكل العلمي ثمّ أعط رتبة مقدار هذه الأعداد.

$251{,}3$ ؛ $0{,}095$ ؛ $27{,}31\times10^{3}$ ، 150×10^{-3}

50. اكتب على الشكل العلمي العدد :

$A=9\times10^{-3}+0{,}4\times10^{-2}-9\times10^{-4}$

(دون الحاسبة)

51. تقدر سرعة الضوء بـ $3\times10^{8}m.s^{-1}$ والمسافة المتوسطة بين الأرض والشمس بـ $149\times10^{6}\,km$.

احسب الزمن اللازم لإشارة ضوئية معطاة من الأرض للوصول إلى الشمس.

52. أعط رتبة مقدار نتيجة كل حساب مما يلي:

1) $851{,}7\times0{,}0018\times0{,}073$

2) $0{,}05\times1200\times10^{-3}$

3) $\frac{181{,}47}{78{,}956}$

53. ردا على سؤال يتعلق بإيجاد عدد ذرات النحاس الموجودة في $1\,mm^3$ من النحاس، كانت الإجابة هي العدد $8{,}5\times10^{19}$.

ما هو رأيك في هذه الإجابة ؟ إذاعلمت أنّ كتلة ذرة النحاس هي $1{,}05\times10^{-25}\,kg$ وكتلة $1\,mm^3$ من هذا المعدن هي $8{,}96\times10^{-6}\,kg$.

54. a و b عددان لهما على الترتيب كرتبة مقدار 7×10^{8} و 6×10^{-15}.

1) عيّن رتبة مقدار a^2، b^2 ثم a^2b^2.

2) عيّن رتبة مقدار ab و $(ab)^2$.

ماذا تستنتج ؟

55. نصف قطر الكرة الأرضية $6371km$ والكتلة الحجمية لها $5{,}5\,g.cm^{-3}$.

أعط تقديرا بالأطنان لكتلتها.

الأعداد الأولية

56. اجب بصحيح أو خاطئ:

- كلّ الأعداد الفردية أولية.
- لا يوجد عدد زوجي أولي.
- يوجد عدد غير منته من الأعداد الأولية.

57. عيّن الأعداد الأولية من بين الأعداد التالية:

197؛ 101؛ 89؛ 43؛ 27؛ 23؛ 18؛ 405؛ 319.

58. هل العدد 259 أولي ؟

59. حلل إلى جداء عوامل أولية.

2520 ؛ 7951

60. أكتب كلا من الأعداد الزوجية التالية على شكل مجموع عددين أوليين (يمكن أن يكونا متساويين):
4 ؛ 6 ؛ 8 ؛ 10 ؛ 12 ؛ 14 ؛ 16 ؛ 18 ؛ 20
ما هو التخمين الذي تضعه ؟

61. نعتبر العبارة: $P(n)=n^2+n+41$
حيث n عدد طبيعي.
1) احسب $P(0)$ ؛ $P(1)$ ؛ $P(2)$ ؛ $P(3)$ ؛ $P(4)$
2) بيّن أنّ الأعداد الناتجة أولية.
3) هل العبارة تعطي دائما أعدادا أولية ؟

62. نسمي **عددا تاما** العدد الطبيعي الذي يساوي مجموع قواسمه، باستثناء العدد نفسه.
مثال: العدد 6 كامل، لأنّ $6=1+2+3$.
عيّن العدد الكامل الوحيد المحصور بين 25 و 30.

63. 1) أنشر ثم بسط العبارة $(n+1)^2-n^2$.
استنتج أنّ كلّ عدد فردي يمكن كتابته كفرق مربعين.
2) تحقق من ذلك بواسطة العددين 13 و 45.

64. ليكن $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$
1) احسب S.
2) باعتبار n عدد طبيعي غير معدوم، اختزل العبارة $A=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.
3) احسب A من أجل قيم n التالية:
1، 2، 3، 4، 5
استنتج طريقة أبسط لحساب S ثم أوجد هكذا قيمتها المعينة في السؤال 1).

65. اختزل باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية.
$A=\frac{(-4)^2(-25)^3}{36\times10^2}$ ؛ $B=\frac{6\sqrt{288}\times\sqrt{75}}{\sqrt{90}\times\sqrt{20}}$

66. اختزل الكسور التالية:
$\frac{48}{75}$ ؛ $\frac{180}{126}$ ؛ $\frac{585}{1275}$ ؛ $\frac{17303}{792}$

67. اكتب على الشكل $a\sqrt{b}$ كلا من الأعداد التالية:
$\sqrt{54}$ ؛ $\sqrt{74}$ ؛ $\sqrt{845}$ ؛ $\sqrt{1000}$ ؛ $\sqrt{20825}$

68. 1) حلل 330 و 252 إلى جداء عوامل أولية.
2) عيّن الشكل غير القابل للاختزال للعدد $\frac{315}{252}$ والكتابة المختصرة للعدد $\sqrt{252}$.

69. نعتبر العدد $A=2^3\times5^2\times7$
1) تحقق من أنّ A يقبل 24 قاسما.
2) أوجد أصغر عدد طبيعي k حيث يكون kA مربعا لعدد طبيعي.
3) أوجد أصغر عدد طبيعي m حيث يكون mA مكعبا لعدد طبيعي.

70. نعتبر الأعداد من الشكل $f_n=2^{2^n}+1$.
1) احسب الأعداد f_0، f_1، f_2، f_3 ثمّ تحقق أنها أولية.
2) بين أن f_5 عدد يقبل القسمة على 641.

71. نعتبر الأعداد من الشكل 2^n-1 حيث n عدد أولي.
1) تحقق من أنّ هذا الشكل يعطي أعدادا أولية من أجل قيم n المتمثلة في الأعداد الأولية الأولى.
2) أوجد القيمة الأولى للعدد n التي من أجلها لا يعطي الشكل السابق عددا أوليا.

72. 1) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 45 و 105.
2) اختزل $\frac{45}{105}$ و $\sqrt{45}$.
3) استنتج التحليل إلى عوامل أولية لكلّ من 45×105 و 45^4 و 105^3

73. عدد صفحات كتابين هو 378 و 420 صفحة على الترتيب.
يتكوّن كلّ كتاب من عدد معيّن من الكراريس ذات نفس عدد الصفحات.
1) ما هو أكبر عدد الصفحات التي يمكن أن يتضمنها كراس ؟
2) ما هو في هذه الحالة عدد الكراريس التي يتشكل منها كلّ كتاب ؟

74. ليكن $A^2 = 4^3 \times 15^4 \times 11^2$.
عيّن التحليل إلى عوامل أولية لكلّ من A و A^2 .

75. أوجد أصغر عدد طبيعي n حيث يكون $240 \times n$ مربعا تاما.

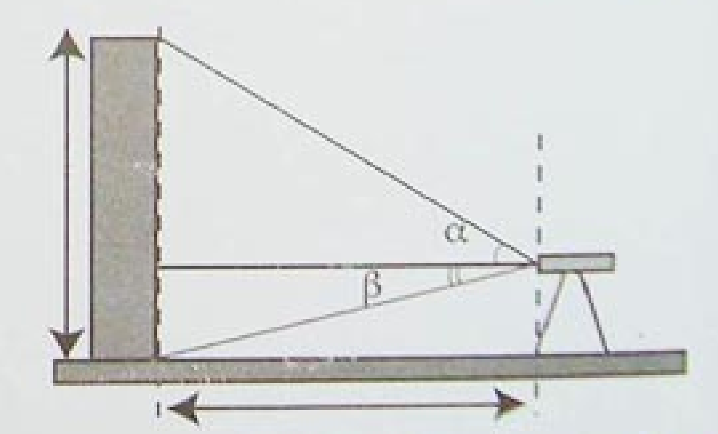
مسائل

76. في عام 1998،اكتشف فريق من باحثين أمريكيين كلاركسون- وولتمان- كيروفسكي $p = 2^{3\,021\,377} - 1$ أكبر عدد أولي عرف آنذاك:
أعط تقديرا لعدد أرقام p .

77. 1) ABC مثلث متقايس الأضلاع، ضلعه 2.
أ) عيّن ارتفاع هذا المثلث.
ب) أنشئ، على مستقيم مدرج (الوحدة $5\,cm$)، النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{3}$.

2) ا) بملاحظة أنّ $3 \times 13 = 39$، أوجد عددين طبيعيين a و b بحيث $(a+b)(a-b) = 39$.
ب) استنتج طريقة لإنشاء العدد $\sqrt{39}$.

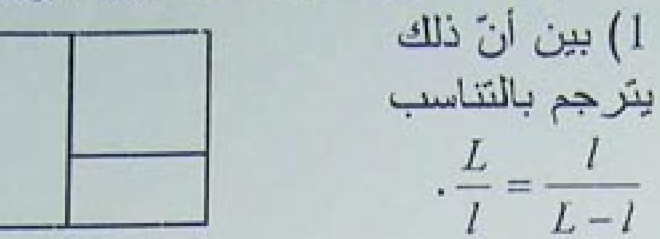
78. تسمح المزولة (جهاز تيودوليت) بقياس زوايا واقعة في المستوي الشاقولي انطلاقا من المستوي الأفقي.



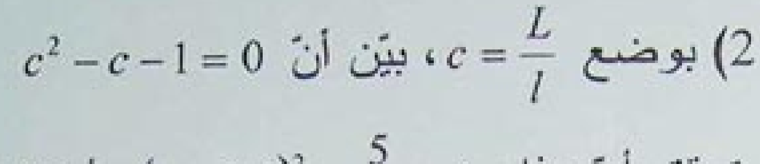
وضع الجهاز على بعد $64{,}3\ m$ من عمارة.
عند التسديد نحو القمة، نقيس الزاوية α ونجد $30°$، عند التسديد نحو القاعدة، نقيس الزاوية β نجد $2{,}45°$.

ما هو ارتفاع العمارة ؟

79. لتمييز شكل مستطيل نستعمل النسبة بين طوله وعرضه.
نسمي مستطيلا ذهبيا، كل مستطيل بعداه L و l حيث، عند نزع مربع طول ضلعه l منه يبقى مستطيل له نفس شكل المستطيل الأول.



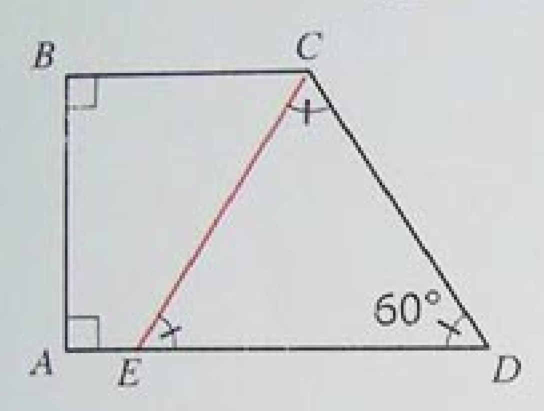
1) بين أنّ ذلك يترجم بالتناسب $\frac{L}{l} = \frac{l}{L-l}$.



2) بوضع $c = \frac{L}{l}$، بيّن أنّ $c^2 - c - 1 = 0$

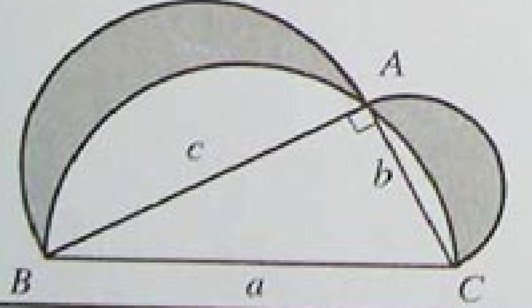
وتحقق أنّ هذا يعني $(c-0{,}5)^2 = \frac{5}{4}$ وأنّ الحلّ الموجب الوحيد هو $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

80. $ABCD$ شبه منحرف قائم، حيث:
$C\hat{D}A = 60°$ و $CD = 4cm$
E نقطة من القطعة $[AD]$ حيث المثلث CDE متقايس الأضلاع.



عيّن القيمة المضبوطة للطول AE التي من أجلها يكون محيط شبه المنحرف $ABCE$ مساويا محيط المثلث CDE .

81. ABC مثلث قائم في. نضع $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$. نرسم نصف الدائرة التي قطرها $[BC]$ والذي يشمل A، ثمّ نرسم نصفي الدائرتين اللتين قطراهما $[AB]$و $[AC]$ خارج المثلث ABC .



الجزء المظلل يمثل ما يسمى هلالية هيبوقراط
1) ما هي مساحة المثلث ABC بدلالة a و b و c ؟
2) عبّر بدلالة a و b و c عن مساحة كلّ من أنصاف الدوائر التي أقطارها $[AB]$ و $[AC]$ و $[BC]$.
3) استنتج مساحة الجزء المظلل بدلالة a و b و c
4) استخلص.

التّرتيب - المجالات - القيمة المطلقة

الكفاءات المستهدفة

- إختيار معيار لمقارنة عددين.
- إيجاد حصر لعدد حقيقي.
- حصر عبارة جبرية.
- حصر عبارة تتضمن مقلوبا.
- حصر مجموع وجداء عددين حقيقيين.
- كتابة عبارة تشتمل رمز القيمة المطلقة على شكل عبارة مكافئة لها بدون رمز القيمة المطلقة.
- التعبير عن جزء متصل من $\mathbb{R}$ بإحدى الصيغ الأربعة: بمجال أو بحصر أو بمسافة أو باستعمال القيمة المطلقة.

العدد العجيب π

يعتبر العدد π عددا عجيبا لما أثاره من تساؤلات وفضول لدى الكثير من العلماء والباحثين عبر العصور، ولقد ارتبط تاريخ هذا العدد بالمشكل المشهور والمعروف بإحاطة الدائرة، والذي آل إلى محاولة "إنشاء مربع مساحته تساوي مساحة قرص نصف قطره r باستعمال المسطرة والمدور" الأمر الذي آل بدوره إلى إنشاء قطعة مستقيم طولها c حيث $c^2 = \pi r^2$.

تمّ البرهان على استحالة هذا الإنشاء في القرن التّاسع عشر وسمحت مختلف المحاولات بإعطاء قيم مقربة لهذا العدد.

والجدير بالذكر أنّ فكرة العدد π كانت معروفة عند القدامى على أنّها نسبة طول محيط الدائرة إلى قطرها و لم تكن قد نضجت كما هو حالها الآن سواء من حيث القيم المقربة لها أو من حيث الرمز المعطى لها.

ونجد عند البابليين قاعدة تعطي العدد $3+\frac{1}{8}$ كقيمة مقربة للعدد π ويستبدله البعض بالعدد 3. كما نجد في مخطوط بردية ريند التى عُثر عليها في مصر عام 1855 م، العدد $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ قيمة مقربة للعدد π، تمّ الحصول عليها باستعمال قاعدة تدعى قاعدة "التخفيض بالتسع" التى تسمح بحساب المساحة S لقرص بمعرفة طول قطره D وهي: $S=\left(D-\frac{D}{9}\right)^2$. ويبدو أنّ أصل هذه القاعدة يعود إلى تقريب مساحة قرص قطره D إلى مساحة ثماني أضلاع ينجز انطلاقا من مربع طول ضلعه D وهذا من أجل $D=9$ ومنه تمّ الحصول على التقريب $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ للعدد π. وقام أرخميدس (287.212 ق.م) بإحاطة دائرة نصف قطرها 1 بين مضلعين منتظمين لهما "3×2" ضلعا، فاستطاع أن يتحصل في حالة مضلعين لهما 96 ضلعا على الحصر التالي:

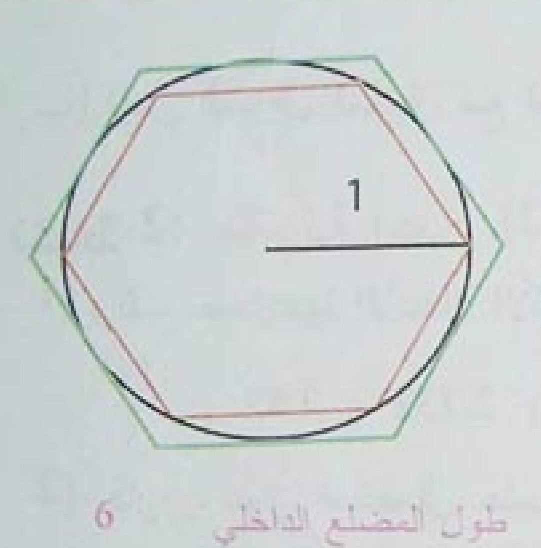
$$3+\frac{10}{17} < \frac{\text{المحيط}}{\text{القطر}} < 3+\frac{1}{7}$$

وهو بالترميز الحديث: $3+\frac{10}{17}<\pi<3+\frac{1}{7}$

وباستعمال نفس الإجراء، تمكن الرياضي غياث الدين جمشيد بن محمود الكاشي حوالي 1429م من الحصول على الأرقام العشرية الأربعة عشرة الأولى للعدد π حيث ذكر ذلك في كتابه **الرسالة المحيطية**.

وباستعمال الوسائل الحديثة والقوية للحساب، تمكن الباحثون من اكتشاف أكثر من 000 000 100 241 1 رقما عشريا للعدد π عام 2002، ولازالت البحوث في هذا المجال مستمرة.

إنشاء أرخميدس المحقق في حالة مضلعين لكل منهما 3×2^1 ضلعا



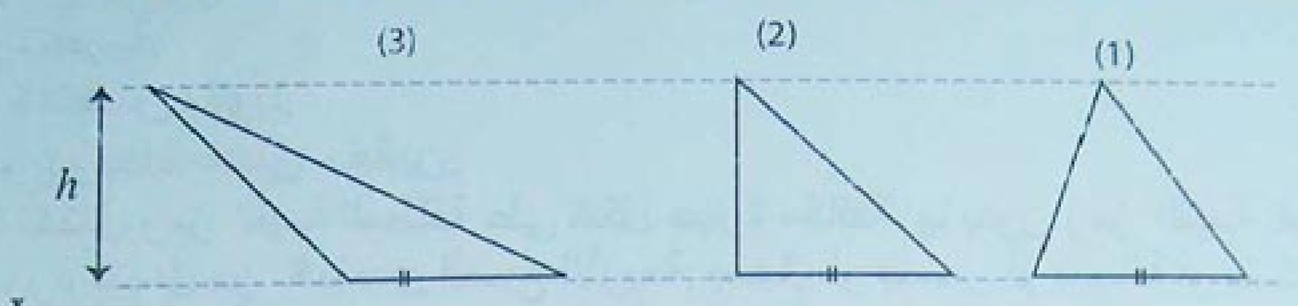
طول المضلع الداخلي 6

طول المضلع الخارجي 6,928

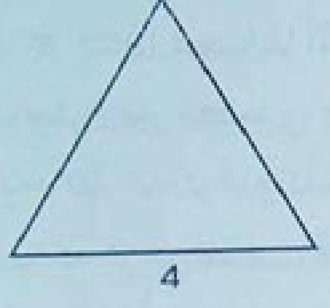
المسألة رقم 48 من مخطوط بردية ريند

نشاط 1: مقارنة أعداد (1)

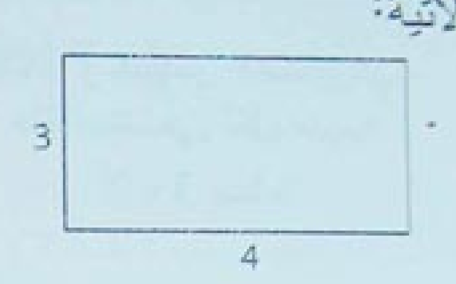
1) قارن مساحات المثلثات الآتية ذات نفس القاعدة b والمرسومة على شريط عرضه h:



2) أ) رتّب تصاعديا، دون استعمال حاسبة، محيطات المستطيل والدائرة والمثلث المتقايس الأضلاع الآتية:







ب) نفس السؤال السابق مع استبدال المحيطات بالمساحات.

نشاط 2: مقارنة أعداد (2)

1) رتّب تصاعديا الأعداد الآتية:

$$\frac{14}{5} \ ; \ 2{,}82 \ ; \ 2{,}732 \ ; \ 273\times10^{-2} \ ; \ 1+\sqrt{3}$$

2) قارن، دون استعمال حاسبة، مع التبرير.

$$\frac{9}{11} \text{ و } \frac{7}{11} \ ; \ \frac{13}{21} \text{ و } \frac{13}{23} \ ; \ \frac{2}{3} \text{ و } \frac{5}{8} \ ; \ 0{,}25^2 \text{ و } 1{,}25^2 \ ; \ \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ و } \frac{1}{2}$$

3) قارن العددين A و B، دون استعمال حاسبة، مع التبرير.

$$A=\frac{3}{2}\times\frac{5}{3} \text{ و } B=\frac{3}{2}\times\frac{3}{5} \ ; \ A=-\frac{3}{4}\times\frac{5}{7} \text{ و } B=-\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}$$

نشاط 3: الحصر

نسكب 6 قارورات ماء سعة كلّ منها V لتر حيث $1{,}6 < V < 1{,}7$ ، في حوض مائي له شكل بلاطة قائمة بعدا قاعدتها a و b بالسنتمتر يحققان $20{,}5 < a < 20{,}6$ و $35{,}6 < b < 35{,}7$.

1) تحقق من أن ارتفاع الماء y يحقق $y=\frac{6V}{ab}$.

2) أعط حصرا للعدد y (إرشاد: يمكن كتابة $y=\frac{6V}{ab}=6V\times\frac{1}{ab}$).

نشاط 4: المسافة

1) ارسم مستقيما عدديا (D) مبدؤه O ثمّ علم عليه النقاط A، B، C، D ذات الفواصل على الترتيب: 6، 10، 3−، 5−.

2) عيّن المسافات OA ؛ OB ؛ OC ؛ AB ؛ AC ؛ CD ؛ BC مع ذكر في كلّ مرة الإجراء المستعمل.

3) M نقطة من (D) فاصلتها x. برّر $OM=\sqrt{x^2}$، ثمّ اكتب $\sqrt{x^2}$ دون رمز الجذر التربيعي، تبعا لموضع النقطة M بالنسبة إلى المبدأ O.

1. الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

تعريف 1

a و b عددان حقيقيان.

- القول إنّ a أكبر من b أو يساويه معناه $a-b$ عدد موجب.
  ونكتب: $a \geq b$ معناه $a-b \in \mathbb{R}^+$.
- القول أنّ a أصغر من b أو يساويه معناه أنّ $a-b$ عدد سالب.
  ونكتب: $a \leq b$ معناه $a-b \in \mathbb{R}^-$

ملاحظة

$a > b$ معناه $a-b \in \mathbb{R}^+$ و $a \neq b$: نقول إنّ a أكبر من b، وعلى محور معلمه $(O;I)$ تكون النقطة A ذات الفاصلة a على يمين النقطة B التي فاصلتها b.

$a < b$ معناه $a-b \in \mathbb{R}^-$ و $a \neq b$: نقول إنّ a أصغر من b.

تعريف 1

مقارنة عددين a و b معناه التصريح بصحة إحدى الحالات الثلاث الآتية:

- $a < b$
- $a > b$
- $a = b$

مثال:

من أجل $a = 1+2\sqrt{2}$ و $b = 7-\sqrt{11}$
$a-b$ موجب تماما، وبالتالي $a > b$.

```
1+2√(2)→A
        3.828427125
7-√(11)→B
         3.68337521
A-B
        .1450519151
```

يمكن إختبار مقارنة عددين بالحاسبة وذلك باستعمال اللمسة TEST

مبرهنة 1

من أجل كلّ أعداد حقيقية a، b، c: إذا كان $\begin{pmatrix} a \leq b \\ \text{و} \\ b \leq c \end{pmatrix}$ فإنّ $a \leq c$.

برهان

إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فإنّ $a-b$ و $b-c$ سالبان، وبالتالي يكون مجموعهما سالبا،
أي أنّ $(a-b)+(b-c)$ سالب. لكن $(a-b)+(b-c) = a-b+b-c = a-c$.
منه $a-c \in \mathbb{R}^-$، وهذا معناه $a \leq c$.

2. الترتيب والعمليات

- **الترتيب والجمع**

مبرهنة 2

من أجل كلّ أعداد حقيقية a ، b ، c: إذا كان $a \leq b$ فإنّ $a+c \leq b+c$.

برهان

$a \le b$ معناه $a-b \in \mathbb{R}^-$. لكن $(a+c)-(b+c)=a-b$ ،

ومنه $(a+c)-(b+c) \in \mathbb{R}^-$ ، وهذا يعني أنّ $a+c \le b+c$.

مثال :

أستطيع أن أضيف نفس العدد إلى طرفي متباينة:

$a+5 \le b+2$ ——— أضيف -5 ⟵ $a \le b-3$

مبرهنة 3

من أجل كلّ أعداد حقيقية a ، b ، c ، d : إذا كان $\begin{pmatrix} a \le b \\ \text{و} \\ c \le d \end{pmatrix}$ فإنّ $a+c \le b+d$

برهان

إذا كان $a \le b$ و $c \le d$ ، فيكون، حسب المبرهنة 2: $a+c \le b+c$ و $b+c \le b+d$.

وحسب المبرهنة 1: $a+c \le b+d$.

مثال:

أستطيع أن أجمع طرفا بطرف متباينتين من نفس الاتجاه.

$a \le 2$ و $b \le -3$ ——— اجمع طرفا بطرف ⟵ $a+b \le -1$

- الترتيب والضرب

مبرهنة 4

a ، b ، c أعداد حقيقية.

من أجل $c>0$ لدينا: $a \le b$ يكافئ $ac \le bc$.

من أجل $c<0$ لدينا: $a \le b$ يكافئ $ac \ge bc$.

برهان: لدينا $ac-bc=(a-b)c$

- من أجل $c>0$.

تكون للعددين $a-b$ و $ac-bc$ نفس الإشارة.

وحيث أنّ $a \le b$ يكافئ $a-b \in \mathbb{R}^-$.

ينتج عنه : $a-b \in \mathbb{R}^-$ يكافئ $ac-bc \in \mathbb{R}^-$ وبالتالي $a \le b$ يكافئ $ac \le bc$

- من أجل $c<0$.

تكون للعددين $a-b$ و $ac-bc$ إشارتان مختلفتان.

وحيث أنّ $a \le b$ يكافئ $a-b \in \mathbb{R}^-$.

ينتج عنه $a-b \in \mathbb{R}^-$ يكافئ $ac-bc \in \mathbb{R}^+$ وبالتالي $a \le b$ يكافئ $ac \ge bc$

مثال: أستطيع أن أضرب طرفي متباينة في نفس العدد الموجب :

$0{,}1a \le 0{,}3b$ ——— اضرب في 10 ⟵ $a \le 3b$

أستطيع أن أضرب طرفي متباينة في نفس العدد السالب بشرط أن أغيّر اتجاه المتباينة:

$-\frac{1}{2}a \le 5$ ——— اضرب في -2 ⟵ $a \ge -10$



مبرهنة 5

من أجل كل أعداد حقيقية موجبة a ، b ، c ، d:
إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فإنّ $ac \leq bd$.

برهان

نفرض a ، b ، c ، d أعدادا حقيقية موجبة حيث $a \leq b$ و $c \leq d$.

- إذا كان $b = 0$ أو $c = 0$ فإنّ $ac \leq bd$.
- إذا كان $b \neq 0$ و $c \neq 0$ فإنّ $ac \leq bc$ و $bc \leq bd$ (حسب المبرهنة 4)، وبالتالي $ac \leq bd$ (حسب المبرهنة 1).

مثال:

أستطيع أن أضرب طرفي متباينتين من نفس الاتجاه، طرفا بطرف، عندما يتعلق الأمر بأعداد موجبة:

$a \leq \frac{1}{2}$ و $b \leq 10$ ← أضرب طرفا بطرف ← $ab \leq 5$

3- قواعد المقارنة

مبرهنة 6

a ، b عددان حقيقيان.

- من أجل $a \geq 0$ و $b \geq 0$ لدينا : $a \leq b$ يكافئ $a^2 \leq b^2$.
- من أجل $a \leq 0$ و $b \leq 0$ لدينا : $a \leq b$ يكافئ $a^2 \geq b^2$.

برهان

نعلم أنّ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

- من أجل $a \geq 0$ و $b \geq 0$

لدينا $a + b \in \mathbb{R}^+$ ومنه العددان $a^2 - b^2$ ، $a - b$ من نفس الاشارة.

وحيث أنّ $a \leq b$ يكافئ $a - b \in \mathbb{R}^-$

ينتج أنّ $a - b \in \mathbb{R}^-$ يكافي $a^2 - b^2 \in \mathbb{R}^-$ وبالتالي $a \leq b$ يكافئ $a^2 \leq b^2$.

حذار من تطبيق قواعد المقارنة بين الأعداد دون أخذ إشاراتها بالاعتبار.

- من أجل $a \leq 0$ و $b \leq 0$

لدينا $a + b \in \mathbb{R}^-$ ومنه العددان $a^2 - b^2$ ، $a - b$ من إشارتين مختلفتين.

وحيث أنّ $a \leq b$ يكافئ $a - b \in \mathbb{R}^-$

ينتج أنّ $a - b \in \mathbb{R}^-$ يكافي $a^2 - b^2 \in \mathbb{R}^+$ وبالتالي $a \leq b$ يكافئ $a^2 \geq b^2$.

مثال:

أرتب مربعي عددين موجبين والجذرين التربيعيين لهما بنفس ترتيب هذين العددين وأرتب مربعي عددين سالبين في الاتجاه المعاكس لترتيبهما.
إذا كان $0 \leq a \leq 2$، فإنّ $a^2 \leq 4$ و $\sqrt{a} \leq \sqrt{2}$.

مبرهنة 7

a ، b عددان حقيقيان موجبان لدينا : $a \leq b$ يكافئ $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

إرشاد للبرهنة: لإثبات المبرهنة 7 يمكن الاعتماد على المبرهنة 6.

مبرهنة 8

a ، b عددان حقيقيان غير معدومين ومن نفس الإشارة لدينا: $a \leq b$ يكافئ $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

إرشاد للبرهنة: يمكن الاستفادة من $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$.

مثال :

أرتّب مقلوبي عددين حقيقيين غير معدومين ومن نفس الاشارة في التّرتيب المعاكس لترتيبهما.

إذا كان $0 < a \leq 2$، فإنّ $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{2}$.

مبرهنة 9

a عدد حقيقي لدينا:
- إذا كان $0 \leq a \leq 1$ فإنّ $a^3 \leq a^2 \leq a$.
- إذا كان $a \geq 1$ فإنّ $a^3 \geq a^2 \geq a$.

برهان

- إذا كان $0 \leq a \leq 1$، فإنّ $a^2 \leq a$ وبالتالي $a^3 \leq a^2$.
  ومنه $a^3 \leq a^2 \leq a$.
- إذا كان $a \geq 1$، فإنّ $a^2 \geq a$ وبالتالي $a^3 \geq a^2$.
  ومنه $a^3 \geq a^2 \geq a$.

ملاحظة: يمكن تعميم ترتيب قوى عدد حقيقي موجب a كما يلي:

إذا كان a محصورا بين 0 و 1، فإنّ قوى a ترتب ترتيبا تنازليا.

إذا كان a أكبر من 1، فإنّ قوى a ترتب ترتيبا تصاعديا.

مثال :

من أجل $a = 2$، لدينا $2^3 \geq 2^2 \geq 2$، و من أجل $a = \frac{1}{2}$، لدينا $\frac{1}{2^3} \leq \frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{2}$.

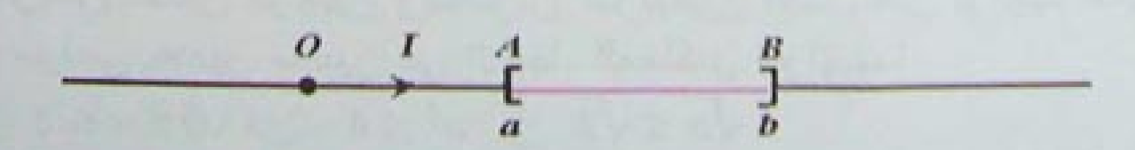
4- المجالات

تعريف

a و b عددان حقيقيان حيث $a \leq b$.
نسمي مجالا مغلقا حدّاه a و b، مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $a \leq x \leq b$ ،
ونرمز إليه بالرّمز $[a ; b]$.

- تمثيل مجال

يمثّل المجال $[a ; b]$ هندسيا بالشّكل الآتي حيث A و B نقطتان فاصلتاهما a و b على التّرتيب.



• أنواع المجالات

المجال الذي يُرمز إليه ...	هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث ...	يُمثّل على المستقيم العددي بالشكل ...
$[a ; b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a ; b[$	$a \leq x < b$	
$]a ; b]$	$a < x \leq b$	
$]a ; b[$	$a < x < b$	
$]-\infty ; b]$	$x \leq b$	
$]-\infty ; b[$	$x < b$	
$[a ; +\infty[$	$x \geq a$	
$]a ; +\infty[$	$x > a$	

في المجال المغلق $[a ; b]$، العارضتان موجّهتان نحو الدّاخل.

$]a ; b[$ هو مجال مفتوح، العارضتان موجّهتان نحو الخارج.

ملاحظات

- الحدّان a و b ينتميان إلى المجال $[a ; b]$ ولا ينتميان إلى المجال $]a ; b[$.
- الرمزان $-\infty$ و $+\infty$ (يقرآن: ناقص لانهاية ، زائد لانهاية) لا يمثّلان عددين حقيقيين وبالتالي تكون العارضتان مفتوحتين عندهما.

• تقاطع وإتحاد مجالين

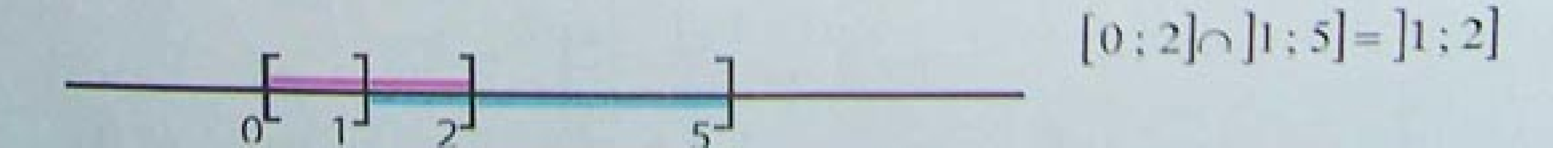
تعريف

- تقاطع مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I و J، ونرمز إليه بالرّمز $I \cap J$.
- إتحاد مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I أو J، ونرمز إليه بالرّمز $I \cup J$.

أمثلة

- $[0 ; 2] \cap]1 ; 5]$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $0 \leq x \leq 2$ و $1 < x \leq 5$.

$[0 ; 2] \cap]1 ; 5] =]1 ; 2]$



▪ $[+\infty;2]\cup]3;4-]$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $-4 < x \le 3$ و $x \ge 2$

$$]-4;3]\cup[2;+\infty[=]-4;+\infty[$$

5. القيمة المطلقة والمسافة

• القيمة المطلقة لعدد حقيقي

تعريف

x عدد حقيقي، M نقطة من مستقيم مزوّد بمعلم (O,I) فاصلتها x.
القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM ، ونرمز إليها بالرّمز $|x|$. ونكتب $|x| = OM$.

• $x \ge 0$

$|x| = OM = x$

• $x \le 0$

$|x| = OM = -x$

حذار $(-x)$ ليس عددا سالبا دوما.

نتائج:

▪ بما أنّ المسافة موجبة فإنّ $|x| \ge 0$ من أجل كلّ عدد حقيقي x.

▪ من أجل كلّ عدد حقيقي x:
$$\begin{cases} |x| = x \ ; \ x \in [0\ ;+\infty[\\ |x| = -x \ ; \ x \in]-\infty\ ;0] \end{cases}$$

أمثلة

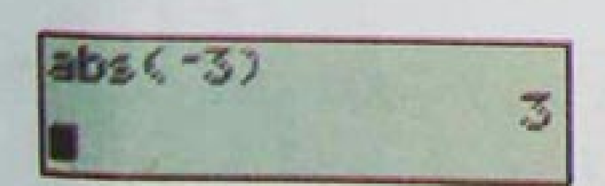
• من أجل $x = \sqrt{3}$ ، العدد x موجب، وبالتالي $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$.

• من أجل $x = 1-\sqrt{2}$ ، العدد x سالب،
وبالتالي $|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$

• $|0| = 0$

1-√(2)
-.4142135624

ملاحظة: يمكن حساب القيمة المطلقة لعدد حقيقي x باستعمال الدالة $abs(\ )$ للحاسبة.



خواص

بفرض x و y عددين حقيقيين، لدينا:

▪ $|-x| = |x|$

▪ $\sqrt{x^2} = |x|$

▪ $|xy| = |x| \times |y|$

▪ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ مع $y \ne 0$

▪ $|x+y| \le |x| + |y|$ (المتباينة المثلثية)

ملاحظة

المتباينة المثلثية تصبح $|x+y|=|x|+|y|$ عندما يكون العددان x و y من نفس الإشارة.

أمثلة:

- العدد ومعاكسه لهما نفس القيمة المطلقة: $2=|-2|=|2|$.
- $\sqrt{(1-2\sqrt{3})^2}=|1-2\sqrt{3}|=2\sqrt{3}-1$ لأنّ $1-2\sqrt{3}\in R^-$.
- $|-3(x-2)|=|-3|\times|x-2|=3|x-2|$.
- $|x-3|\leq|x|+|-3|$ ومنه $|x-3|\leq|x|+3$.

• المسافة بين نقطتين

مبرهنة 10:

إذا كانت A ، B نقطتين من مستقيم مزوّد بمعلم $(O;I)$ فاصلتاهما a ، b على الترتيب فإنّ
$AB=|a-b|=|b-a|$

برهان

نقتصر على الوضعية التي تكون فيها النقطة B على يمين النقطة A أي $b\geq a$
وبالتالي $|b-a|=b-a$ ، لأن الوضعية الأخرى تبرهن بنفس الكيفيّة، ونميّز ثلاث حالات:

أ) النقطتان A ، B على يمين النقطة O.
$AB=OB-OA=b-a$

ب) النقطتان A ، B على يسار النقطة O.
$AB=OA-OB=-a-(-b)=b-a$

جـ) النقطة O بين النقطتين A ، B.
$AB=OA+OB=-a+b=b-a$

وجدنا في كلّ الحالات: $AB=|b-a|$.

مثال:

$AB=|-2-(-5)|=|-5-(-2)|=3$

$AB=|-1{,}5-3|=|3-(-1{,}5)|=4{,}5$

• المسافة بين عددين حقيقيين

تعريف

المسافة بين عددين حقيقيين a و b هي العدد $|a-b|$ (أو $|b-a|$).

نكتب $d(a;b)=|a-b|=|b-a|$.

أمثلة:

$d(0;-3)=|0-(-3)|=3$ ، $d(4;5)=|4-5|=1$.

$d(-2{,}7;-3)=|-2{,}7-(-3)|=0{,}3$ ، $d\left(-11;\frac{17}{3}\right)=\left|-11-\frac{17}{3}\right|=\frac{50}{3}$.

- الحصر

تعريف

حصر عدد حقيقي x يعني إيجاد عددين a و b بحيث $a \le x \le b$.

مثال :

باستعمال حاسبة، نحصل على: $\sqrt{5} \approx 2{,}23607$ وهي القيمة المدوّرة للعدد $\sqrt{5}$ إلى 10^{-5}.

$2 \le \sqrt{5} \le 3$ هو حصر العدد $\sqrt{5}$، بالتقريب إلى الوحدة.

$2{,}23 \le \sqrt{5} \le 2{,}24$ هو حصر العدد $\sqrt{5}$، بالتقريب إلى 10^{-2}.

√(5)
2.236067977

- القيمة المطلقة، المسافة، المجال والحصر

مبرهنة 11

c عدد حقيقي ، r عدد حقيقي موجب.
من أجل كل عدد حقيقي x، $|x-c| \le r$ معناه $x \in [c-r;c+r]$

برهان

- نبرهن أنه إذا كان $|x-c| \le r$ فإنّ $x \in [c-r;c+r]$.

ليكن x عددا حقيقيا حيث $|x-c| \le r$.

– إذا كان $x \ge c$ فإنّ $x-c \in \mathbb{R}^+$ و $|x-c| = x-c$ وبالتالي $x-c \le r$.
ونستنتج $x \le c+r$ ومنه $c \le x \le c+r$، وبالتالي $c-r \le x \le c+r$.

– إذا كان $x \le c$ فإنّ $x-c \in \mathbb{R}^-$ و $|x-c| = c-x$ وبالتالي $c-x \le r$.
ونستنتج $c-r \le x$ ومنه $c-r \le x \le c$، وبالتالي $c-r \le x \le c+r$.

يتضح أنّ في الحالتين لدينا $c-r \le x \le c+r$.

- نبرهن أنه إذا كان $x \in [c-r;c+r]$ فإنّ $|x-c| \le r$.

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[c-r;c+r]$، أي $c-r \le x \le c+r$ ومنه $-r \le x-c \le r$

لدينا من جهة $x-c \le r$.

ومن جهة أخرى $-r \le x-c$ ، ومنه $c-x \le r$.

وبما أنّ $|x-c|$ يساوي إمّا $x-c$ وإمّا $c-x$، نستخلص $|x-c| \le r$.

أمثلة :

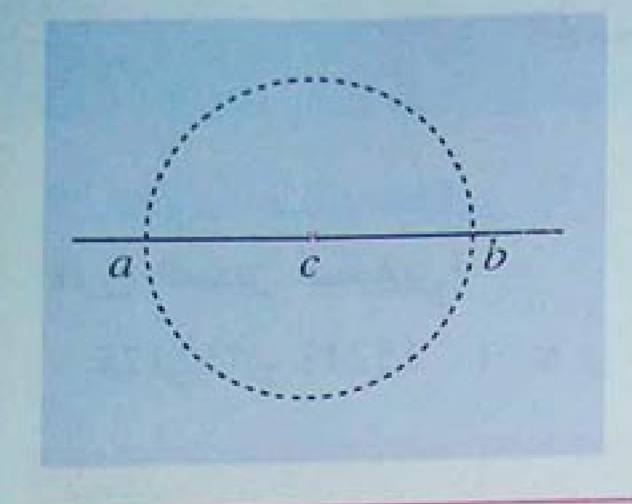
$|x-3| \le 1$ معناه $-1 \le x-3 \le 1$ أي $x \in [2;4]$.

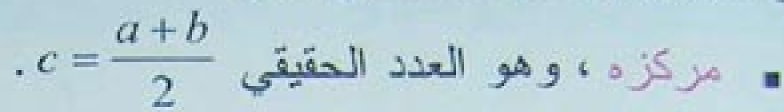
$|x| \le 4$ معناه $-4 \le x \le 4$ أي $x \in [-4;4]$.

$\left|x+\frac{5}{2}\right| \le \frac{3}{2}$ معناه $-\frac{3}{2} \le x+\frac{5}{2} \le \frac{3}{2}$ أي $x \in [-4;-1]$.

عناصر المجال:

يتميّز المجال $[a;b]$ بالعناصر الآتية:





- مركزه ، وهو العدد الحقيقي $c=\dfrac{a+b}{2}$.



- طوله ، وهو العدد الحقيقي الموجب $b-a$.
- نصف قطره ، وهو العدد الحقيقي الموجب $r=\dfrac{b-a}{2}$.

نتيجة

c عدد حقيقي كيفي و r عدد حقيقي موجب.
من أجل كلّ عدد حقيقي x ، النصوص الآتية متكافئة:

- $x\in[c-r;c+r]$ (في صيغة مجال) .
- $c-r\leq x\leq c+r$ (في صيغة حصر) .
- $d(c;x)\leq r$ (في صيغة مسافة) .
- $|x-c|\leq r$ (في صيغة قيمة مطلقة) .

مثال:

القيمة المطلقة	المسافة	الحصر	المجال	التمثيل
$\left\|x-\dfrac{3}{2}\right\|\leq\dfrac{7}{2}$	$d\left(x;\dfrac{3}{2}\right)\leq\dfrac{7}{2}$	$-2\leq x\leq 5$	$x\in[-2;5]$	-2 1,5 5

6. القيم المقربة لعدد حقيقي

تعريف

بفرض عدد حقيقي a وعدد عشري d وعدد طبيعي n.
القول أنّ d قيمة مقربة عشرية إلى 10^{-n} للعدد a معناه المسافة من a إلى d أصغر من 10^{-n}
بعبارة أخرى $|a-d|<10^{-n}$.
وتبعا لكون $d\leq a$ أو $d\geq a$، نتحدث عن قيمة مقربة بالنقصان أو بالزيادة.

مثال :

الحاسبة تظهر من أجل $\cos 20°$ العدد $0,9396926208$.
يمكن أن نستنتج مثلا $0,93<\cos 20°<0,94$.
$0,93$ و $0,94$ هما قيمتان مقربتان للعدد $\cos 20°$ ، إلى 10^{-2} ، بالنقصان وبالزيادة على الترتيب.
كلّ عدد عشري من المجال $[0,93\,;0,94]$ هو قيمة مقربة للعدد $\cos 20°$ إلى 10^{-2}، لأنه موجود على مسافة أصغر من 10^{-2} بالنسبة إلى $\cos 20°$.

0,93 0,94 cos20°

طـــرائق وتمارين محلولة

• مقارنة عددين حقيقيين (1)

قارن العددين الحقيقيين:

152,125 و 152,13 ؛ π و $\frac{22}{7}$ ؛ $\frac{19}{13}$ و $\frac{17}{21}$ ؛ $\frac{159}{32}$ و $\frac{472}{95}$.

حلّ	تعاليق
▪ 152,125 و 152,13 عددان عشريان لهما نفس الجزء الصحيح. لمقارنتهما نعتبر الجزأين العشريين فيهما ونجد: $152{,}125 < 152{,}13$.	نستعمل طريقة مقارنة عددين عشريين.
▪ لمقارنة العددين π و $\frac{22}{7}$، يمكن استعمال الحاسبة ونجد: π 3.141592654 22/7 3.142857143 الرقمان الممثلان للجزأين من الألف مختلفان. و لكون $2 > 1$ فإنّ $\frac{22}{7} > \pi$.	الحاسبة تعطي قيما مقربة في شكل كتابة عشرية، تتم المقارنة كما في الحالة السابقة.
▪ بمقارنة كلّ من الكسرين بالعدد 1، نجد: $\frac{19}{13} > 1$ و $\frac{17}{21} < 1$ ونستنتج $\frac{19}{13} > \frac{17}{21}$.	عند المقارنة بالعدد 1، نلاحظ البسط والمقام في كلّ كسر: – إذا كان البسط أكبر من المقام فإنّ الكسر أكبر من الوحدة. – إذا كان البسط أصغر من المقام فإنّ الكسر أصغر من الوحدة.
▪ نحسب الفرق $\frac{472}{95} - \frac{159}{32}$ ونجد: $\frac{159}{32} - \frac{472}{95} = \frac{95\times159 - 32\times472}{3040} = \frac{15105 - 15104}{3040} = \frac{1}{3040}$ و لكون $\frac{1}{3040} > 0$، نستنتج $\frac{159}{32} > \frac{472}{95}$.	عند حساب الفرق، نستعمل الطريقة المذكورة في الصفحة 12، التمرين 4. ثمّ ندرس إشارة الفرق.

طريقة

لمقارنة عددين حقيقيين، يمكن:

- استعمال الحاسبة للحصول على قيم مقربة.
- مقارنة كلّ من العددين بعدد ثالث.
- دراسة إشارة الفرق.

• مقارنة عددين حقيقيين (2)

قارن العددين الحقيقيين:

$1-\sqrt{5}$ و $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ ؛ $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2^2}$ و $\frac{1}{2^3}$ ؛ π و π^2 و π^3

تعاليق	حلّ
نستعمل المتطابقات الشهيرة لحساب مربعي العددين.	▪ نضع $A=1-\sqrt{5}$ و $B=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ ثمّ نحسب A^2 و B^2: $A^2=(1-\sqrt{5})^2=1^2-2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2=6-2\sqrt{5}$ $B^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2=6-2\sqrt{5}$ نلاحظ أنّ $A^2=B^2$ وكون $1-\sqrt{5}\in R^-$، نستنتج: $A=-B$.
نطبق قواعد مقارنة قوى عدد حقيقي a (المبرهنة 6).	▪ المطلوب هو مقارنة قوى عدد حقيقي a في حالة $a<1$. نجد: $\frac{1}{2}>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{2^3}$ ▪ المطلوب هو مقارنة قوى عدد حقيقي a في حالة $a>1$. نجد: $\pi<\pi^2<\pi^3$.

طريقة

لمقارنة عددين يتضمنان جذورا تربيعية، يمكن مقارنة مربعيهما.
إذا كان مربعا عددين متساويين فإنّ هذين العددين متساويان أو متعاكسان:
إذا كان $A^2=B^2$ فإنّ $A=B$ أو $A=-B$

• مقارنة عددين حقيقيين (3)

x عدد حقيقي حيث $x\geq 1$، برهن صحة المتباينتين: $2-5x\leq -3$ ؛ $\frac{1}{3x+1}\leq\frac{1}{4}$

تعاليق	حلّ
نطبق خواص المتباينات.	▪ لدينا $x\geq 1$ وبضرب طرفي المتباينة في العدد السالب -5، نحصل على $-5x\leq -5$. ثم بإضافة 2، نستخلص: $2-5x\leq -3$. ▪ لدينا $x\geq 1$ وبالتالي $3x+1\geq 4$ وذلك بالاستدلال كما في السؤال السابق. ولكون العددين الحقيقيين الموجبين $3x+1$ و 4 مرتبين في الترتيب المضاد لمقلوبيهما، نستخلص: $\frac{1}{3x+1}\leq\frac{1}{4}$.

طريقة

لمقارنة عددين حقيقيين مكتوبين على الشكل الجبري، يمكن استعمال خواص المتباينات.

- **إيجاد حصر لعدد حقيقي**
- **حصر مجموع وجداء**

a و b عددان حقيقيان بحيث $3 \le a \le 8$ و $1 \le b \le 7$.
احصر العددين $a+b$ و $a \times b$.

- **حصر فرق وحاصل قسمة**

بنفس المعطيات السابقة، أحصر العددين $a-b$ و $\frac{a}{b}$

تعاليق	حلّ
نطبق خواص المتباينات.	▪ باستعمال قاعدة الجمع طرفا بطرف للمتابينات، نجد: $4 \le a+b \le 15$. لكون الأعداد الستة موجبة وبالضرب طرفا بطرف نجد: $3 \le ab \le 56$.
لا توجد قاعدة للطرح طرفا بطرف !!	▪ نكتب $a-b$ على الشكل $a+(-b)$. بضرب المتباينة المضاعفة $1 \le b \le 7$ في العدد السالب (-1) ، نحصر $-b$: $-7 \le -b \le -1$. وبالجمع طرفا بطرف ، نجد : $3 \le a \le 8$ و $-7 \le -b \le -1$ $-4 \le a-b \le 7$
لا توجد قاعدة للقسمة طرفا بطرف !!	نكتب $\frac{a}{b}$ على الشكل $a \times \left(\frac{1}{b}\right)$. الأعداد 1 ، b ، 7 من نفس الإشارة و $1 \le b \le 7$ فيكون $\frac{1}{7} \le \frac{1}{b} \le 1$. ولكون الأعداد 3، a، 8، $\frac{1}{7}$، $\frac{1}{b}$، 1 موجبة وبالضرب طرفا بطرف، نجد: $\frac{3}{7} \le \frac{a}{b} \le 8$

طريقة

لحصر فرق أو حاصل القسمة نتذكر أنّ الطرح يعني إضافة المعاكس والقسمة تعني الضرب في المقلوب.

إعادة استثمار

مستطيل طوله L وعرضه l حيث $L \in]134 ; 135[$ و $l \in]25 ; 26[$.
أعط حصرا للمحيط P وللمساحة $\mathcal{A}$ وللقطر D للمستطيل.

• حلّ معادلة أو متراجحة تتضمن القيمة المطلقة

حلّ المعادلات والمتراجحات الآتية:

(1) $|x+3| = 4$ (2) $|x+3| = |x-5|$ (3) $|x+3| < |x-5|$

تعاليق	حلّ
نعبّر عن القيمة المطلقة بعبارات المسافة على المستقيم العددي.	1. على مستقيم مدرج، نسمي M النقطة التي فاصلتها x. $\|x+3\|$ هي المسافة من النقطة M إلى النقطة A ذات الفاصلة 3-. $\|x+3\| = 4$ تكافئ $MA = 4$ A ; -7 ; -3 ; 0 ; 1 ; 4 ; 4 توجد عندئذ نقطتان متناظرتان بالنسبة إلى A ، المسافة من كلّ منهما إلى A هي 4: هما النقطتان اللتان فاصلتاهما -7 و 1. ومنه مجموعة حلول المعادلة: $S_1 = \{-7;1\}$ 2. على مستقيم مدرج، نسمي M النقطة التي فاصلتها x. $\|x+3\|$ هي المسافة من النقطة M إلى النقطة A ذات الفاصلة 3-. $\|x-5\|$ هي المسافة من النقطة M إلى النقطة B ذات الفاصلة 5 $\|x+3\| = \|x-5\|$ تكافئ $MA=MB$ و $M \in (AB)$ A ; I ; M ; B ; -3 ; 0 ; 1 ; x ; 5 هذا يعني أنّ M منتصف $[AB]$. فاصلة M هي $1 = \frac{-3+5}{2}$. ومنه مجموعة حلول المعادلة: $S_2 = \{1\}$ 3. بنفس الفرضيات والشكل كما في السؤال 2)، $\|x+3\| < \|x-5\|$ تكافئ $MA < MB$ هذا يعني أنّ النقطة M تكون أقرب من النقطة A عنه من B. إذا فرضنا I منتصف $[AB]$، فإنّ النقطة M تكون أقرب من النقطة A عندما تكون قبل I أي من أجل كلّ النقاط ذات فاصلة أصغر تماما من 1. ومنه مجموعة حلول المتراجحة: $S_3 =]-\infty\,;1[$

طريقة

لحلّ معادلة أو متراجحة تتضمن قيما مطلقة، نعبّر عن القيم المطلقة بعبارات المسافة على المستقيم العددي ونترجم المساويات أو المتباينات بعبارات المسافة بين نقطتين.

إعادة الاستثمار

حلّ المعادلة والمتراجحة الآتيتين:

$|x+3|+|x-5| = 8$ ؛ $|x+4| \leq 2$.

تعلّم البرهنة

الهدف: إعطاء معنى للاستلزام والتكافؤ

① الاستلزام

تصادفنا في بعض النصوص العبارة " إذا كان ... فإنّ ... "، مثل:

- إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع فإنّ $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان.
- إذا كان لعددين حقيقيين نفس المربع فإنّهما متساويان أو متعاكسان.

عموما، إذا كان P فإنّ Q، حيث P هي الفرضية و Q هي النتيجة، نقول أنّ P تستلزم Q

تمرين 1: في كلّ نصّ من النصوص الآتية، عيّن الفرضية والنتيجة ثمّ أعد التحرير باستعمال الصيغة " إذا كان ... فإنّ ... ":

1) العدد المحصور بين 0 و 1 يكون أكبر من مربعه.
2) المستقيمان اللذان لهما نفس معامل التوجيه متوازيان.
3) متوازي الأضلاع الذي له زاوية قائمة يكون مستطيلا.

تمرين 2: بيّن إن كان كلّ نصّ (قضية) من النصوص الآتية، صحيحا أم خاطئا مبررا إجابتك.

1) إذا كان $ABCD$ مربعا فإنّ القطرين $[AC]$ و $[BD]$ متعامدان.
2) إذا كان في مضلع $ABCD$ القطران $[AC]$ و $[BD]$ متعامدين فإنّ $ABCD$ مستطيل.
3) إذا كان $-2a \geq 5b$ فإنّ $a \leq -\frac{5}{2}b$.

② التكافؤ

نعلم أنّه:

- إذا كان $ABCD$ رباعي متوازي أضلاع فإنّ قطريه $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان.
- إذا كان القطران $[AC]$ و $[BD]$ في رباعي $ABCD$ متناصفين فإنّه متوازي أضلاع.

إذا رمزنا بالرمز P إلى النصّ " $ABCD$ رباعي متوازي أضلاع "
و بالرمز Q إلى النصّ "قطرا الرباعي $ABCD$ متناصفان "
نجد P يستلزم Q و Q يستلزم P في آن واحد.

- نقول إنّ النصّين P و Q متكافئان. ونقرأ " P يكافئ Q" أو " P إذا وفقط إذا Q".
- نقول عن الاستلزامين السابقين أنّ كلّ منهما عكس الآخر.

تمرين 3: أنقل ثمّ أكمل الجدول بصحيح (ص) أو خاطئ (خ).

المعطيات	P	Q	P يستلزم Q	Q يستلزم P	P يكافئ Q
x عدد حقيقي	$\lvert x \rvert = 2$	$x = 2$ أو $x = -2$			
x و y عددان حقيقيان	$xy > 0$	$x > 0$ و $y > 0$			
A ، B ، C ، D أربع نقاط من المستوي	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$			

لتبرير الخاصية " M منتصف $[AB]$"، دار هذا الحديث بين تلميذين، المطلوب مناقشة كلّ اقتراح:

أمين: " بما أنّ $AM = \frac{1}{2}AB$ ، فإنّ M منتصف $[AB]$".

عمر: " $M \in (AB)$ و $AM = MB$ وبالتالي M منتصف $[AB]$".

تقريب جذر تربيعي بطريقة هيرون Héron

الهدف: ترجمة طريقة Héron هندسيا والتحقق باستعمال حاسبة و مجدول.

- **الطريقة الهندسية**

الغرض من هذا النشاط هو تقريب $\sqrt{30}$ مثلا.
1. أنشئ مستطيلا طوله L يساوي 15 وعرضه ℓ يساوي 2 بحيث تكون مساحته مساوية 30.
2. باعتبار أن بعدي هذا المستطيل مختلفان كثيرا، أنشئ مستطيلا جديدا حيث يكون طوله L' مساويا الوسط الحسابي للبعدين L و ℓ $\left(L'=\frac{L+\ell}{2}\right)$ ومساحته هي أيضا 30.

(إنّ اللجوء إلى الوسط الحسابي من شأنه تقليص الاختلاف بين بعدي المستطيل).

3. أعد التجربة مرة ثانية ثم مرة ثالثة. ماذا تلاحظ ؟ ما هو شكل المستطيل الأخير وما هما بعداه بالتقريب؟

- **التحقق بحاسبة**

انقل ثمّ أكمل الجدول التالي:

المستطيل رقم	L (كسر)	ℓ (كسر)	L (مدور إلى 10^{-6})	ℓ (مدور إلى 10^{-6})
1	15	2	15,000 000	2,000 000
2				
3				
4				

1. قارن الأعداد المحصل عليها في الخانات المظللة مع القيم الظاهرة على الحاسبة.
2. هل هذه النتائج تؤكد الملاحظة المسجلة عند الترجمة الهندسية ؟

- **التحقق بمجدول**

الشكل المقابل يمثل ورقة مجدول تسمح بحساب قيمة مدورة إلى 10^{-14} لكل من L و ℓ. للحصول على هذه الدقة، ينبغي برمجة المجدول إلى 14 رقما عشريا.

Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre

	A	B
1	L	ℓ
2	15,00000000000000	2,00000000000000
3	8,50000000000000	3,52941176470588
4	6,01470588235294	4,98777506112469
5	5,50124047173882	5,45331551204081
6	5,47727799188981	5,47717315871513
7	5,47722557530247	5,47722557480085
8	5,47722557505166	5,47722557505166
9	5,47722557505166	5,47722557505166
10	5,47722557505166	5,47722557505166

1. ما هي الدساتير المكتوبة في الخليتين $A3$ و $B3$ والمنقولة إلى الأسفل ؟
2. ما هو عدد الخطوات الضرورية للحصول على قيمة مقربة إلى 10^{-2}، 10^{-5}، 10^{-12} للعدد $\sqrt{30}$ ؟

حـــلّ مسألة إدماجيـــة

1) ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما ويختلف عن $\sqrt{2}$.

أ) بيّن أنّ a و $\frac{2}{a}$ يحصران $\sqrt{2}$.

ب) قارن $\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$ و $\sqrt{2}$ (العدد $\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$ هو الوسط الحسابي للعددين a و $\frac{2}{a}$).

2) علّم على المستقيم العددي النقط ذات الفواصل a، $\frac{2}{a}$، $\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$، $\sqrt{2}$.

لوّن بالأزرق أصغر مجال يشمل $\sqrt{2}$. ما هو الحصر المحصل عليه عندئذ ؟

3) انطلاقا من $a=1$ وبتعويض a بالقيمة المضبوطة للعدد $\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$، اوجد باستعمال النتائج السابقة حصرا جديدا للعدد $\sqrt{2}$. هل هذا الحصر أفضل من الحصر المحصل عليه في السؤال 2)؟

1) أ) للإجابة، نميّز حالتين:

■ $0<a<\sqrt{2}$

بالمرور إلى مقارنة المقلوبين، نجد $\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{a}$

وبالتالي $\frac{2}{a}>\frac{2}{\sqrt{2}}$. ولكون $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ نحصل على:

$\sqrt{2}<\frac{2}{a}$ ومنه الحصر $a<\sqrt{2}<\frac{2}{a}$.

■ $\sqrt{2}<a$

نجد بالمثل $\frac{1}{a}<\frac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه $\frac{2}{a}<\frac{2}{\sqrt{2}}$ أي أنّ:

$\frac{2}{a}<\sqrt{2}<a$.

وهكذا يكون في الحالتين، a و $\frac{2}{a}$ يحصران $\sqrt{2}$.

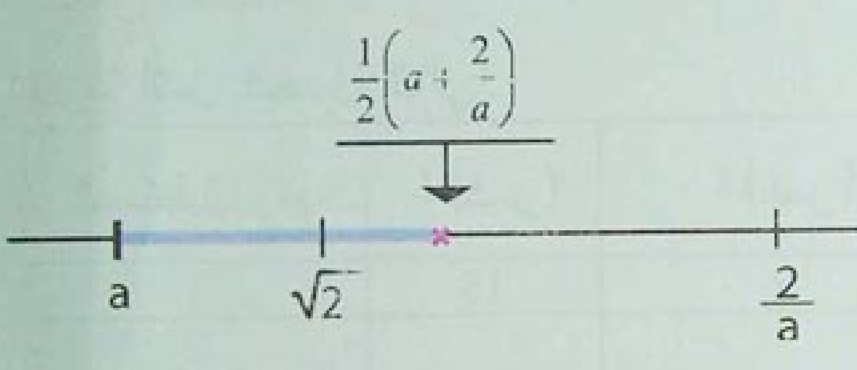
ب) لمقارنة العددين $\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$ و $\sqrt{2}$، ندرس إشارة فرقهما:

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}-2\sqrt{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2a}\left(a^2+2-2a\sqrt{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2a}\left(a-\sqrt{2}\right)^2$$

وباعتبار أنّ a موجب وكذلك $\left(a-\sqrt{2}\right)^2$ فيكون الفرق موجبا، وبالتالي:

$$\sqrt{2}<\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$$

1) في الحالة $a<\sqrt{2}$:



من أجل كلّ قيمة مقربة a للعدد $\sqrt{2}$ يمكن أن نعطي قيمة مقربة أخرى للعدد $\sqrt{2}$ تكون أفضل هي الوسط الحسابي $\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$.

2) انطلاقا من $a=1$، نجد:

$\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)=\frac{3}{2}$ وبالتالي $1<\sqrt{2}<\frac{3}{2}$

وبتعويض a بالقيمة المضبوطة للعدد $\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$، أي $\frac{3}{2}$، نجد:

$\frac{2}{a}=\frac{4}{3}$ و $\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)=\frac{17}{12}$

وبالتالي:

$$\frac{4}{3}<\sqrt{2}<\frac{17}{12}$$

هذا الحصر أفضل من الحصر الأول لأنّ طول المجال الأول $\left]1;\frac{3}{2}\right[$ أصغر من طول المجال الثاني $\left]\frac{4}{3};\frac{17}{12}\right[$.

أصحيح أم خاطئ؟

أجب بنعم أو لا على الأسئلة الآتية:

1. العدد ومقلوبه من إشارتين متعاكستين.

2. العدد هو دائما أصغر من أو يساوي مربعه.

3. جداء عددين حقيقيين كلّ منهما أكبر من 2 أكبر من 2.

4. إذا كان $-2x \le 6$ فإنّ $x \ge -3$.

5. $\sqrt{7}+\sqrt{13}=\sqrt{20}$.

6. 1) $2 \in]-\infty;5] \cap]3;8[$

2) إذا كان $-3 \le x < 8$ فإنّ $x \in [-3;7]$.

7. إذا كان a و c من إشارتين مختلفتين، فإن العدد: $-25a^3b^2c$ موجب مهما كان b.

8. من أجل كلّ عدد حقيقي x: $|x^2| = |x|^2$.

9. إذا كان $x \ge 2$ فإنّ $|1-2x| = 1-2x$.

10. $\frac{1}{4}$ هو مركز المجال $\left[\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right]$.

الترتيب ـ الترتيب والعمليات ـ المقارنة

11. رتّب تصاعديا الأعداد الآتية:
$0,757$ ؛ $0,77$ ؛ $0,577$ ؛ $0,57$ ؛ $0,557$.

12. رتّب تنازليا الأعداد الآتية:
$-2,02$ ؛ $-2,202$ ؛ $-2,22$ ؛ $-2,2$ ؛ $-2,022$.

13. أدرج عددا عشريا بين:
$32,528$ و $32,509$ ؛ $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ ؛
$\frac{31}{17}$ و $\frac{181}{99}$ ؛ $\frac{57}{6}$ و $\sqrt{92}$.

14. عيّن قيم الرقم العشري d حيث:
$-40,501 \le -40,6d9$ ؛ $25,d22 \le 25,22$.

15. من بين الأعداد الآتية، عيّن الأعداد المحصورة بين 0 و 1:
$(-10)^{-2}$ ؛ $\frac{1}{10^{-3}}$ ؛ $\left(-\frac{4}{3}\right)^5$ ؛ 25% ؛ $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$.

16. قارن، دون استعمال الحاسبة، كلّ عددين فيما يلي:
$\frac{17}{22}$ و $\frac{17}{23}$ ؛ $-\frac{9}{11}$ و $-\frac{8}{11}$ ؛ -10^{-3} و -10^{-4}

17. نفس السؤال من أجل:
$\frac{1}{2\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ ؛ $\sqrt{2}-1$ و $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$
$1+\sqrt{7}$ و $\sqrt{2\sqrt{7}+8}$ ؛ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$.

18. 1) بفرض a عدد حقيقي كيفي، قارن العددين الحقيقيين a^2-8a و -16.
2) استنتج، دون استعمال الحاسبة، مقارنة العددين الحقيقيين $2-8\sqrt{2}$ و -16.

19. احسب بالاستعانة بحاسبة الفرق $x-y$ ثم استنتج مقارنة x و y.
$x=\pi\sqrt{2}$ و $y=\frac{138}{31}$.

20. رتب، باستعمال حاسبة، من الأصغر إلى الأكبر الأعداد: 2π ؛ $7,07$ ؛ $\sqrt{50}$ ؛ $\frac{1258}{181}$ ؛ $\frac{4109}{587}$.

21. ما هو أكبر العددين:
$\alpha=\sqrt{1-10^{-19}}$ ؛ $\beta=1-10^{-18}$.

22. 1) نريد ترتيب الأعداد $1-4\times10^{-15}$ و $\left(1-4\times10^{-15}\right)^2$ و $\dfrac{1}{1+4\times10^{-15}}$.
تصاعديا. هل يكون ذلك ممكنا بالحاسبة ؟
2) نضع $a=4\times10^{-15}$. ما هو المطلوب عندئذ ؟ استخلص.

23. 1) أكمل باستعمال < أو > أو =:
$\sqrt{9}+\sqrt{16} \ \ldots \ \sqrt{25}$
2) نعتبر $A=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $B=\sqrt{a+b}$
احسب A^2 و B^2 ثم قارن A و B.

24. رتّب تصاعديا الأعداد a و a^2 و a^3 في الحالتين:
- $a=\sqrt{2}-1$.
- $a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$.

25. x عدد حقيقي حيث $x\in\left]0;1\right[$ ، قارن العددين $(1-x)$ و $(1-x)^2$.

26. x عدد حقيقي حيث $x\geq 2$. نعتبر العبارتين $A=(x-1)^2$ و $B=(x-2)^2$.
1) حلل الفرق $A-B$.
2) استنتج إشارة $A-B$ ثم قارن A و B .

27. بفرض $x<0$ و $y<0$ ، أنقل وأكمل الجدول:

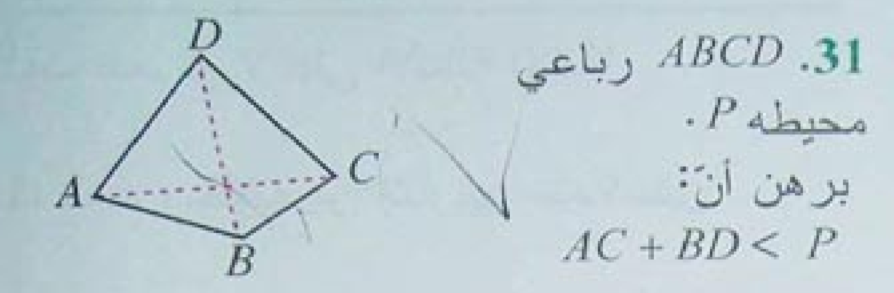
	صحيح	خاطئ	لا يمكن الحكم
$-2x<0$			
$-x+y<0$			
$x+y<0$			
$-x-y>0$			
$x-y<0$			

28. بفرض $a<b$ ، بيّن أنّ:
1) $2a+1<2b+1$.
2) $3-a>3-b$.

29. برهن أنّ:
1) $x\geq 3$ معناه $2x+1\geq 7$.
2) $x\geq 5$ معناه $-x+4\leq -1$.

30. a و b و c أعداد حقيقية موجبة تماما.
1) بيّن أنه إذا كان $a<b$ ، فإنّ $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$.
2) بيّن أنه إذا كان $a<b$ ، فإنّ $\dfrac{c}{a}>\dfrac{c}{b}$.

31. $ABCD$ رباعي محيطه P .
برهن أنّ:
$AC+BD<P$



32. أين الخطأ في الاستدلال التالي:
"$\pi>3$ وبالتالي $3\pi>9$ ومنه $3\pi-\pi^2>9-\pi^2$
إذن $(3-\pi)\pi>(3-\pi)(3+\pi)$ وهكذا
$\pi>3+\pi$ وعليه $0>3$".

المجالات

33. عيّن المجالات الموافقة للأعداد الحقيقية:
1) الأكبر من أو المساوية -2.
2) المحصورة تماما بين 4 و7.
3) الأصغر تماما من 1.
4) السالبة تماما أو الأكبر من أو المساوية 3.

34. بفرض قائمة أعداد حقيقية:
$-2{,}2$ ؛ π ؛ 5 ؛ $\sqrt{2}$ ؛ $-\dfrac{11}{3}$.
وقائمة مجالات:
$[-2;2]$ ؛ $[-1;5[$ ؛ $[-4;+\infty[$ ؛ $]-\infty;+\infty[$.
بيّن بالنسبة إلى كلّ مجال إن كان كلّ عدد ينتمي إليه أو لا ينتمي.

35. مثّل على المستقيم العددي المجالات الآتية:
$[1;4]$ ؛ $]-2;-1[$ ؛ $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ ؛ $\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right[$.

36. عيّن كلّ الأعداد الطبيعية ثم كلّ الأعداد الصحيحة النسبية التي تنتمي إلى المجال $\left[-2;\dfrac{9}{2}\right]$.

37. عيّن المجالات الآتية

1) $[0;2]\cap]1;6]$.

2) $[-2;2]\cap]-2;+\infty[$.

3) $[-1;3]\cap]3;+\infty[$

4) $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\cap\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

38. أكتب، على شكل مجالات، مجموعات الأعداد الحقيقية الممثلة و الملونة على المستقيم العددي·

] عند -5	[عند -1 ،] عند 3 ،] عند 7
[عند -3 ، [عند 4	[عند -7 ،] عند -4 ، [عند -1 ، [عند 2

39. أكتب على شكل مجالات مجموعات الأعداد الحقيقية المعرفة بالمتباينات الآتية:

1) $2\leq x\leq 6$ 3) $x\leq -2{,}5$

2) $-4\leq x\leq 3$ 4) $x>\sqrt{3}$

40. نفس السؤال السابق من أجل:

1) $x<2$ و $x\geq -1$.

2) $-4<x<1$ أو $1\leq x\leq 5$.

41. اكتب على شكل مجالات المجموعات الآتية:

$\mathbb{R}$ ؛ $\mathbb{R}^-$ ؛ $\mathbb{R}^+$ ؛ $\mathbb{R}^*$ ؛ $\mathbb{R}^{+*}$.

42. عيّن مركز وطول كلّ مجال:

$[-2;2]$ ؛ $[-0{,}5;0{,}1]$ ؛ $[-\pi+1;\pi+1]$.

43. ما هما حدا المجال المغلق الذي مركزه $-5{,}3$ وطوله $0{,}7$ ؟

44. أنقل ثم أكمل الجدول·

المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية x
$]-1;2[$	
	$2\leq x\leq 5$
	$x\geq 0$
$\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$	

45. أنقل ثم أكمل الجدول·

المتباينات	$x\in$
$-2\leq x<3$	
	$]-3;0[$
	$[5;+\infty[$
$x\leq -\sqrt{2}$	

46. عيّن المجالات الآتية:

- $]-\infty;3]\cup[2;+\infty[$ ▪ $]-\infty;0]\cup]0;+\infty[$
- $[-2;3[\cup[-4;6]$ ▪ $]-\infty;1]\cup]1;+\infty[$

47. أنقل ثم أكمل الجدول·

I	J	$I\cap J$	$I\cup J$
$[2;5]$	$[1;+\infty[$		
$]-1;3]$	$]-5;5[$		
$\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$	$\left]-\frac{5}{2};\frac{1}{3}\right]$		
$[1;2]$	$\left]\frac{1}{2};2\right[$		

المسافة و القيمة المطلقة

48. أنقل ثم أكمل الجدول بالمسافة d للعدد الحقيقي x إلى 0.

x	$1{,}5$	0	-3	10^2
d				

49. بفرض M و N و P ثلاث نقاط ذات الفواصل -4 ، 0 ، -3 على الترتيب من المستقيم العددي· أحسب المسافات MN و NP و MP .

50. أحسب المسافة بين كلّ عددين حقيقيين فيما يلي: 5 و 11 ؛ -3 و -2 ؛ $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ ؛ 3π و 9 .

51. مثل على المستقيم العددي مجموعة الأعداد الحقيقية حيث:

1) $|x|\leq 3$ 2) $|x|>1$

52. عيّن في كلّ حالة الأعداد الحقيقية x حيث:

1) $|x|=4$ 2) $|x|=\sqrt{2}$ 3) $|x^2|=1$

53. بفرض x فاصلة نقطة M على مستقيم عددي، أحسب المسافات الآتية:

$$CM = |x-2| \text{ ؛ } BM = \left|x+\frac{2}{3}\right| \text{ ؛ } AM = \left|x-\frac{1}{3}\right|$$

من أجل $x=-3$.

54. لحلّ كلّ من المعدلات أو المتراجحات الآتية في $\mathbb{R}$ ترجم العلاقات الآتية في عبارات المسافة ومثّل الوضعية على مستقيم عددي قبل الاستخلاص.

$|x-3|=2$ ؛ $|x+2|=\frac{5}{2}$ ؛ $|x+2|\le 1$.

55. على المستقيم المزود بالمعلم $(O;I)$ علّم النقطتين A و B ذات الفاصلتين 2- و 5 على الترتيب والنقطة J منتصف $[AB]$. M نقطة متحركة فاصلتها x.

عيّن في كلّ حالة من الحالات الآتية موضع (أو مواضع) M عندما تحقق فاصلتها الشرط المعين:

1) $|x+2|=|x-5|$ 2) $|x+2|+|x-5|=7$

3) $|x+2|<|x-5|$

56. باستعمال اللمسة abs للحاسبة، أحسب $|-3|+|5|$ و $|5-3|$ و $|5+3|$. قارن النتائج.

57. بفرض K مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث: $|3-x|\le 1$

أكتب K على شكل مجال.

58. بالاستعانة بالحاسبة بيّن إن كان العدد 2 أقرب من $\sqrt{5}$ أو من $\sqrt{3}$.

قارن عندئذ $|\sqrt{5}-2|$ و $|\sqrt{3}-2|$.

59. بفرض $A=3x-|2-4x|$، أحسب A من أجل $x=3$.

60. أحسب العدد A المعرف بالشكل:

$$A=|a+b|-|a-1|+2|2-b|$$

في الحالات الآتية:

1) $a=b=\frac{1}{2}$ 2) $a=3$ و $b=4$

3) $a=-2$ و $b=3$.

61. ما هي القيمة المطلقة لكل من الأعداد:

1) -5 ؛ $(-2)^3$ ؛ $\sqrt{5}-\sqrt{7}$ ؛ $-\frac{1}{10^2}$.

2) x عندما $x^2=9$.

62. أحسب القيم المطلقة:

1) $|2-\sqrt{5}|$ 2) $|-2-\pi|$ 3) $\left|-2-\frac{4}{5}\right|$.

4) $\left|-0{,}4+\frac{1}{5}\right|$ 5) $\left|\frac{1}{3}-3\right|+\left|5-\frac{3}{2}\right|$.

63. أحسب القيم المطلقة:

1) $\left|(2-\sqrt{3})^2\right|$ 2) $|-2\sqrt{2}+1|$.

3) $2|6-2\sqrt{5}|$ 4) $\sqrt{(\sqrt{7}-5)^2}$.

64. برر المساويتين:

1) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$

2) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=|1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1$

الحصر

65. باستعمال الحصر $4{,}4721<\sqrt{20}<4{,}4722$

أحصر كلا من الأعداد الآتية:

$\frac{\sqrt{20}}{2}$ ، $10\sqrt{20}$ ؛ $6+\sqrt{20}$ ؛ $-\sqrt{20}$.

66. a عدد حقيقي حيث $-1 < a < 2$.

استنتج من هذا الحصر حصرا لكلّ من الأعداد الآتية:

$2a+1$ ؛ $5a-2$ ؛ $7-3a$ ؛ $\frac{1}{2a-5}$

67. b عدد حقيقي حيث $2 < b < 3$.

أعط حصرا للعدد $\frac{2-b^2}{5}$.

يعطى أيضا عدد حقيقي a حيث $1 < a < 2$.

أعط حصرا للعدد $b-2a$.

68. أحصر $\frac{1+A}{2}$ علما أنّ $2,36 < A < 2,37$.

أحصر $\frac{5-2B}{10}$ علما أنّ $3,16 < B < 3,17$.

69. بفرض $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ و $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

أحصر: $A = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ ، $B = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

70. x و y عددان حقيقيان حيث:

$1,2 < x < 1,3$ ؛ $2,4 < y < 2,5$

أحصر $x+y$ ؛ $x-y$ ؛ $5x-4y$ ؛ xy

71. بفرض $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$

أحصر $y-x$ ؛ $x-2y$ ؛ x^2 ؛ y^2.

72. بفرض z عدد حقيقي يحقق $25 < z < 36$.

أحصر $\frac{1}{z}$ ؛ $\frac{1}{z^2}$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{z}}$.

73. 1) عيّن باستعمال الحاسبة قيما عشرية مقربة بالزيادة وبالنقصان إلى 10^{-4} للأعداد:

$a = \sin 71°$ ، $b = \sin^2 71°$

$c = \cos 71°$ ، $d = \cos^2 71°$

$e = \sin^2 71° + \cos^2 71°$.

2) قارن العددين e و 1.

74. أعط حصرا للعدد x في الحالات الآتية:

1) $10,1 \leq x - 8 \leq 10,2$

2) $|x-3| < 2,5$

3) $d(5;x) \leq 10^{-2}$

75. عيّن حصرا لكلّ من محيط ومساحة قرص نصف قطره r، علما أنّ $2,1 < r < 2,2$.

(الوحدة cm).

يعطى $3,14 < \pi < 3,15$.

76. أحصر $\mathcal{A}$ مساحة شبه منحرف قاعدتاه b و B وارتفاعه h حيث:

$19 < b < 20$ ؛ $29 < B < 30$ ؛ $10 < h < 11$

(الوحدة cm).

77. أحصر $\mathcal{V}$ حجم مخروط نصف قطره r وارتفاعه h علما أنّ: $3,14 < \pi < 3,15$ ؛

$3,530 < r < 3,531$ ؛ $5,10 < h < 5,11$

(الوحدة cm).

78. مثلث مساحته محصورة بين $51cm^2$ و $52cm^2$ وقاعدته محصورة بين $7,9cm$ و $8,1\,cm$.

أحصر الارتفاع الموافق.

79. ترجم في الشكل $|x - \dots| \leq \varepsilon$ ما يلي:

1) $x \in [3 ; 5]$ 2) $x \in [4,1 ; 4,2]$

80. ترجم في شكل حصر ما يلي:

1) $|x-3| \leq 2$ 2) $|x+5,4| \leq 0,1$

81. أنقل ثمّ أكمل الجدول التالي:

الحصر	المجال	المسافة	القيمة المطلقة
$2 \leq x \leq 6$	$x \in \dots$	$d(\dots ; \dots) \leq \dots$	$\lvert\dots\rvert \leq \dots$
	$x \in]-1;5[$		
		$d\left(x;\frac{3}{2}\right) \leq \frac{7}{2}$	
			$\left\lvert x+\frac{5}{2}\right\rvert \leq \frac{3}{2}$

82. أعط حصرا للعدد المجهول a في الحالات الآتية:
- $2{,}715$ قيمة مقربة عشرية للعدد a إلى 10^{-3}.
- $3{,}1416$ قيمة مقربة عشرية للعدد a إلى 10^{-4}.

83. 1) بفرض n عدد صحيحا. برهن أنّ:
$2^n < \sqrt{p} < 2^{n+1}$ معناه $4^n < p < 4^{n+1}$.

2) استنتج ذهنيا قيمة n بحيث:
$2^n < \sqrt{27} < 2^{n+1}$.

3) أوجد n بحيث:
$2^n < \sqrt{3\,000} < 2^{n+1}$.

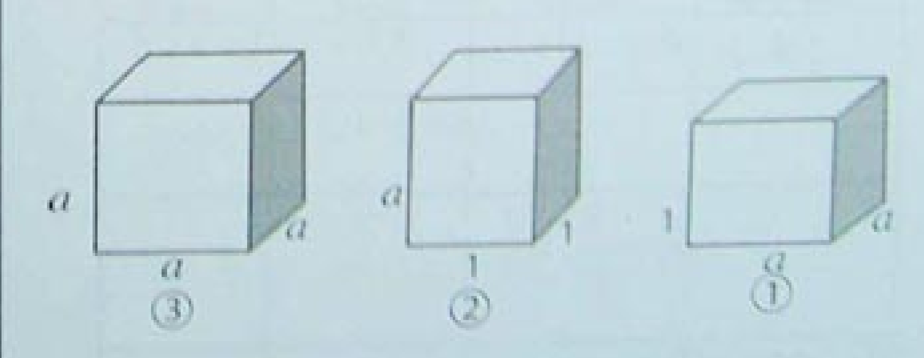
مسائل

84. هرم منتظم رأسه S وقاعدته مربع $ABCD$ مركزه O. بفرض $2{,}4cm$ مدور ضلع المربع و $3{,}5cm$ مدور الارتفاع SO، بيّن أنّ حجم الهرم V ينتمي إلى المجال $[6{,}72 ; 7{,}5]$.

85. هل يمكن تفريغ قارورة حليب مملوءة سعتها $1{,}8\ell$ في إناء أسطواني الشكل نصف قطره r وارتفاعه h حيث:
$8 < r < 8{,}1$
و
$8 < h < 8{,}1$
(الوحدة cm)

اعتبر $3{,}14 \le \pi \le 3{,}15$.

86. قارن المساحات الكلية لمتوازيات المستطيلات الآتية:



وحدة الأطوال هي cm و $a > 1$.

87. باستعمال صفيحة معدنية بعداها L و ℓ حيث $\ell < L$ يمكن أن نصنع نوعين من الأسطوانات (الشكل) وذلك باللف حسب الطول أو العرض.

1) عبّر بدلالة L و ℓ عن حجم كلّ من الأسطوانتين.

2) قارن الحجمين.

(1)

(2)

88. ABC مثلث قائم في A. الوتر a محصور بين 3 و 3,1 والضلع $[AC]$ طوله b محصور بين 1,5 و 1,6. (الوحدة cm).

1) أعط حصرا للضلع الثالث.

2) نسمي H نقطة تقاطع الارتفاع المتعلق بالرأس A مع $[CB]$ في المثلث ABC.
بكتابة مساحة المثلث ABC بكيفيتين، برهن أنّ:
$$BC \times AH = AB \times AC$$

2) استنتج حصرا للطول AH.

89. الهدف هو حصر $\sqrt{1+x}$.
بفرض x عددا حقيقيا موجبا تماما، نضع:
$$A = \sqrt{1+x} \quad ; \quad B = 1+\frac{x}{2} \quad ; \quad C = \frac{x^2}{8}+\sqrt{1+x}$$

1) بيّن أنّ كلا من A و B و C أكبر تماما من 1.

2) قارن A^2 و B^2 واستنتج أنّ:
$\sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}$.

3) بيّن أنّ:
$C^2 - B^2 = \frac{x^2}{4}\left(\sqrt{1+x}+\frac{x^2}{16}-1\right)$.

4) قارن B^2 و C^2 واستنتج أنّ:
$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}$.

تطبيق:
دون الاستعانة بحاسبة، أعط حصرا للعدد $\sqrt{1{,}000\,2}$.

3

عموميات على الدّوال

الكفاءات المستهدفة

- تحديد دالة (متغيرها، مجموعة تعريفها، مجموعة قيمها)
- تعيين صورة عدد أو سابقة عدد وفق دالة معرفة بواسطة منحنى أو دستور.
- الربط بين دستور وجدول قيم وتمثيل بياني.
- توظيف الحاسبة البيانية لإعطاء التمثيل البياني لدالة معطاة على مجال بواسطة دستور.
- وصف سلوك دالة معرفة بمنحن باستعمال التعبير الرياضي المناسب.
- استنتاج جدول تغيرات دالة انطلاقا من تمثيلها البياني.
- إرفاق جدول تغيرات معطى بتمثيل بياني ممكن.
- استعمال الحاسبة البيانية لإيجاد القيم الحدية لدالة على مجال.
- التعرّف على شفعية دالة انطلاقا من تمثيلها البياني أو بالاعتماد على التعبير الجبري للخاصية.



كوت فرايد ويليام ليبنيتز (1646م-1716م) برع في المنطق والفلسفة والحقوق والرياضيات

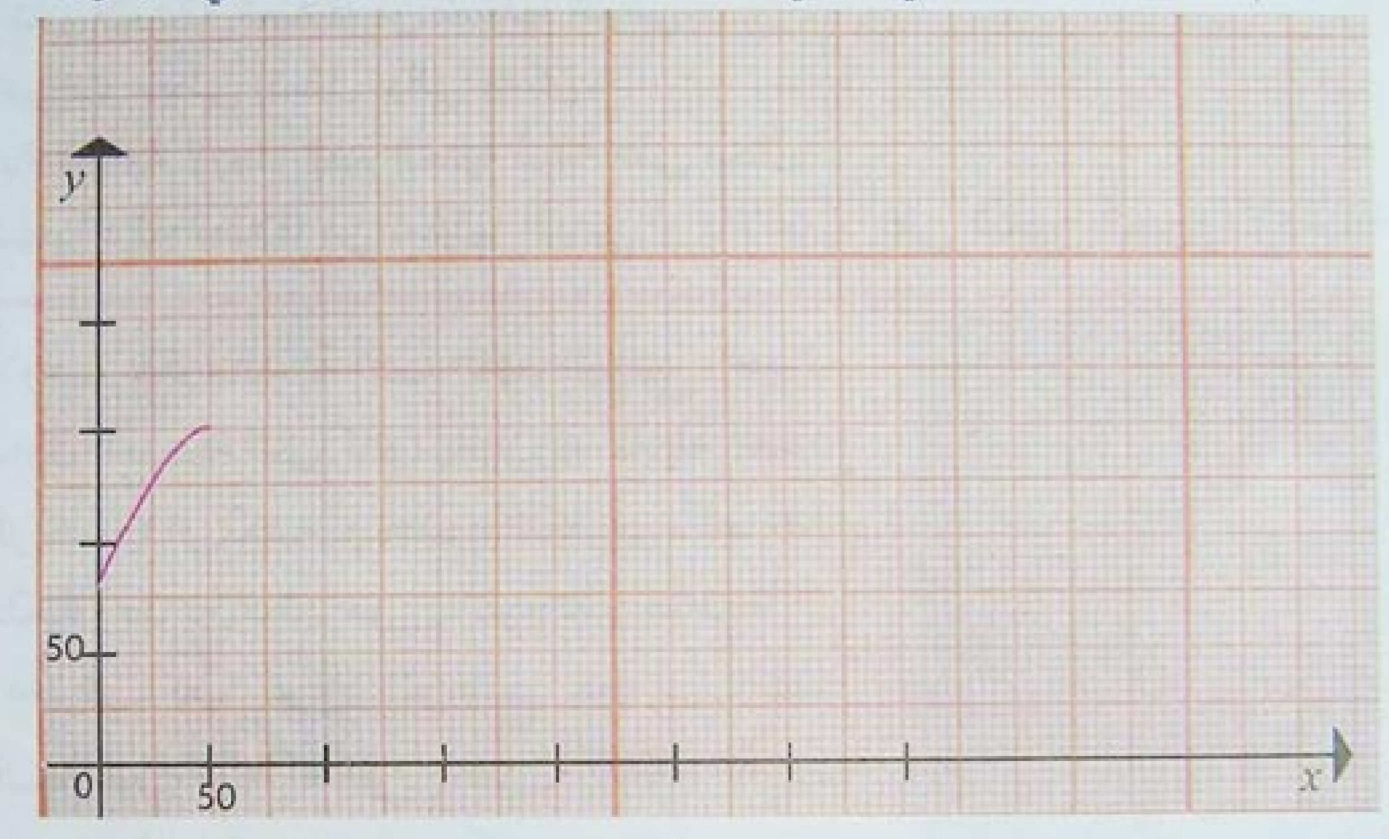
تعود البدايات الأولى لفكرة الدالة إلى العهد البابلي حيث ظهرت في الجداول العددية التي كانوا ينجزونها لمقابلة العدد بمربعه أو بمقلوبه أو بجذره أو بمكعبه أو بجذره التكعيبي، كما نجد في جداولهم الفلكية ربطا بين عدد من القيم تعبّر مثلا عن الزمن وقيم أخرى تعبّر عن المواضع. غير أن هذا الربط لا يرقى إلى مفهوم الربط الدّالي (من كلمة دالة) بين الكميات الذي نعرفه اليوم. وقد كان توجه بعض الرياضيين إلى التعبير عن ظواهر طبيعية كالحرارة والكثافة والسرعة، بواسطة كميات عددية بداية لتبلور هذا المفهوم. وهكذا قدّم الرياضي نيكول أوراسم (1320م-1382م) بخصوص مفهوم السرعة، برهانا هندسيا حول النتيجة الآتية : «في فترة زمنية معطاة، يقطع متحرك بحركة متسارعة بانتظام نفس المسافة التي يقطعها متحرك آخر بسرعة ثابتة تساوي متوسط السرعتين الأقصيين للمتحرك الأول.» وقد استخدم في ذلك تمثيلا بيانيا كان بمثابة أولى العلاقات الدّالية التي تربط الزمن بالسرعة. ثمّ تطور التعبير عن هذه العلاقة الدّالية مع مطلع القرن السابع عشر بواسطة ما يسمى « دستور» وهذا بفضل عاملين أساسيين ومصيريين ليس فقط بالنسبة لمفهوم الدالة، بل لتقدم الرياضيات عموما : العامل الأول هو اكتشاف الترميز الحرفي في الجبر والعامل الثاني هو التصور الجديد للرياضيات كلغة تعبر عن الحقائق الفيزيائية الطبيعية، هذا التصوّر الذي عبر عنه قاليليو (1564م-1642م). ويعود الفضل إلى ديكارت (1596م-1650م) في التعبير لأوّل مرة عن فكرة الارتباط بين كميتين متغيرتين. أما كلمة « دالة » فقد استخدمت في الرياضيات لأوّل مرة من طرف ليبنيتز (1646م-1716م). ولم يتضح مفهوم الدالة إلاّ بمجيء ريمان (1826م-1866م) حيث قدّم دراسة نظرية شاملة لهذا المفهوم.

نشاط 1: الدوال في الحياة اليومية

أثناء تجربة، قيس تواتر النبضات القلبية، عدد النبضات في الدقيقة، لعداء مسافة $400\ m$ وسُجلت النتائج التالية:

المسافة المقطوعة x (m)	0	50	100	150	200	250	300	350	400
تواتر النبضات القلبية y (عدد النبضات في الدقيقة)	80	150	165	170	175	185	190	200	210

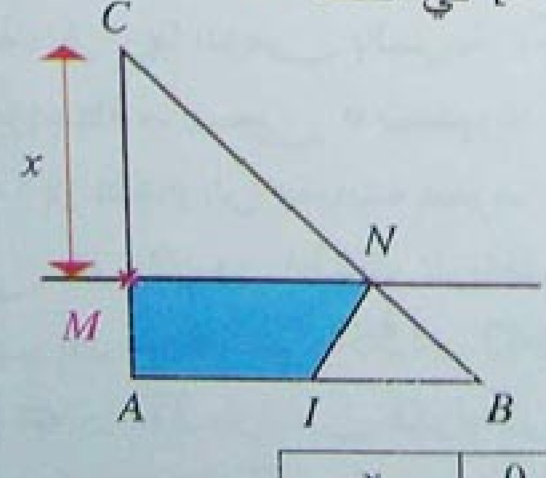
1. أنقل ثمّ أكمل التمثيل البياني التالي، باستعمال المعطيات الواردة في الجدول السابق.



2. ما هو تواتر نبض العداء عند بداية السباق؟ عند قطع نصف المسافة ؟
3. ما هو عدد الأمتار التي قطعها العداء وتواتر نبضه يساوي 175 نبضة في الدقيقة ؟
4. على أي مسافة كان هذا التواتر أكبر من 165 نبضة في الدقيقة؟

نشاط 2: الدوال في الهندسة

ABC مثلث قائم ومتقايس الضلعين رأسه A حيث $AB=10\ cm$، I منتصف $[AB]$.
لتكن M نقطة متغيرة من $[AC]$. نضع $CM=x$.
المستقيم (D) الموازي للمستقيم (AB) والمار بالنقطة M يقطع $[BC]$ في النقطة N.
نسمي $A(x)$ مساحة الرباعي $AINM$.



1. إلى أيّ مجال ينتمي الطول x ؟
2. أوجد عبارة $A(x)$ بدلالة x.
3. ما هي قيم x التي من أجلها يكون $A(x)=25\ cm^2$ ؟
4. باستعمال الحاسبة، أتمم الجدول الآتي:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	...	9	9,5	10
$F(x)$										

نشاط 3: دوال معرفة باستعمال حاسبة

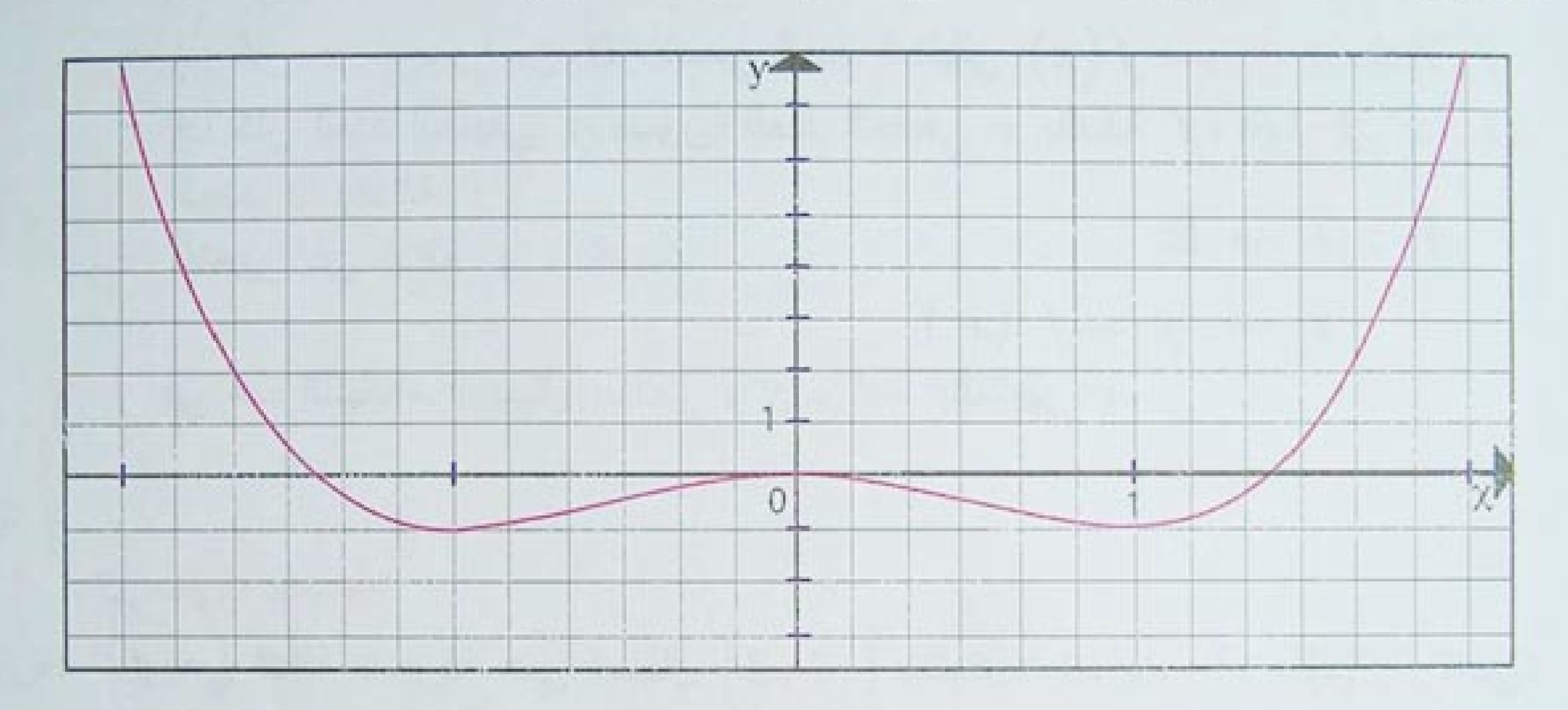
تجد على ملمس حاسبة علمية أو حاسبة بيانية اللمسة ln التي تعني "اللوغاريتم النيبيري"، وهي الدالة التي ترفق بعدد حقيقي x العدد $\ln x$. نسمي العدد $\ln x$ صورة x بالدالة "اللوغاريتم النيبيري".

1. أ) أحسب $\ln x$ من أجل بعض قيم x.
   ب) ماذا تظهر الحاسبة من أجل القيم السالبة للمتغير x ؟
   حـ) بالتجريب على عدة أعداد، ضع تخمينا حول قيم x التي نستطيع من أجلها حساب $\ln x$.
2. a و b عدداد حقيقيان موجبان تماما.
   قارن $\ln b$ و $\ln\left(\frac{1}{b}\right)$ ثم $\ln(a\times b)$ و $\ln a+\ln b$ من أجل بعض قيم a و b.
   ماذا تلاحظ؟

نشاط 4: شفعية دالة

لتكن الدالة المعرفة على المجال $[-2\,;2]$ بالشكل: $f(x)=x^4-2x^2$

الشكل الآتي يبيّن التمثيل البياني لهذه الدالة في معلم متعامد للمستوي.



1. قارن بيانيا وبالحساب $f(1)$ و $f(-1)$ ثم $f(2)$ و $f(-2)$.
2. من أجل $x\in[-2\,;2]$، اشرح لماذا $-x\in[-2;2]$ وقارن $f(x)$ و $f(-x)$.
3. ما هي الخاصية الهندسية التي يحققها المنحني ؟
4. نعتبر النقطة M من المنحني ذات الفاصلة x والنقطة M' من المنحني ذات الفاصلة $-x$، بيّن أنّ M و M' متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب.
5. ماذا نستنتج ؟

نشاط 5: الدوال التآلفية

لقياس درجة الحرارة، نستعمل سلم الدرجات المئوية (°C) أو سلم درجات فاهرنهايت (°F).
يذوب الجليد عند 0 °C ويقابل ذلك 32 °F ويغلي الماء عند 100 °C ويقابل ذلك 212 °F؛
نقبل بأنّ الظاهرة يمكن ترجمتها بدالة تآلفية:

1. في معلم متعامد $(O;I,J)$ للمستوي، علم النقطتين $A(0\,;32)$ و $B(100\,;212)$.
   أرسم المستقيم (AB).
2. عيّن، بيانيا، المقابل في سلم درجات فاهرنهايت لكل من الدرجتين 37 °C ، 40 °C.

1. مفهوم الدّالة

تعريف 1

D جزء من $\mathbb{R}$. نعرّف دالة f على D عندما نرفق بكلّ عدد حقيقي x من D عددا حقيقيا وحيدا، نرمز إليه بالرمز $f(x)$

تعابير واصطلاحات

- نرمز عادة إلى الدوال بالرموز f، g، h، ...
- D جزء من $\mathbb{R}$ و f دالة معرفة على D:
  - D هي مجموعة تعريف الدالة.
  - إذا كان x عنصرا من D، نسمي العدد الحقيقي $f(x)$ صورة x بالدالة f.
  - إذا كان العدد الحقيقي y صورة العدد الحقيقي x بالدالة f، نقول إنّ x سابقة للعدد y بالدالة f.
  - للتعبير عن الدالة f، نكتب:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

في هذه الكتابة، x يمثّل المتغيّر و y مرتبط بالمتغيّر x.

أمثلة

- دالة معرفة بدستور

العبارة: " f هي الدالة المعرفة على المجال $[-2;2]$ بالشكل: $f(x)=x^2+2x+1$ " تعني:

- مجموعة تعريف الدالة f هي المجال $[-2;2]$.
- بكلّ عدد حقيقي x من المجال $[-2;2]$ نرفق العدد x^2+2x+1: هكذا نرفق بالعدد -2 العدد $(-2)^2+2(-2)+1$ وبما أنّ $(-2)^2+2(-2)+1=1$، نكتب $f(-2)=1$ ونقول أنّ 1 هو صورة -2 بالدالة f.

ملاحظة

لا يمكن أن يكون لعدد حقيقي من مجموعة التعريف عدّة صور، لكن يمكن أن يكون للصورة عدّة سوابق.

ففي الدّالة f لدينا: $f(-2)=1$ و $f(0)=1$.

أي أنّ العددين -2 و 0 لهما نفس الصورة بالدالة f.

عندما تعرّف دالة بدستور، يمكن إعطاء جدول لبعض قيمها:

X	Y1
0	ERROR
1	1
2	.5
3	.33333
4	.25
5	.2
6	.16667

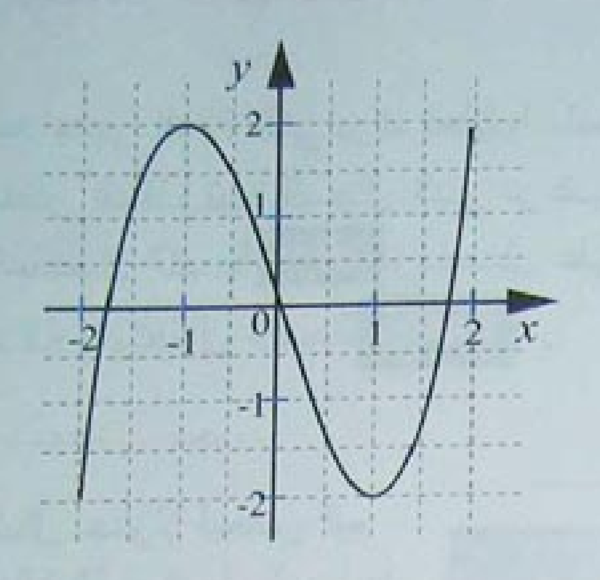
Y1=1/X

إذا كانت g الدالة المعرفة بالعبارة $g(x)=\frac{1}{x}$، فإن مجموعة تعريفها D هي $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ باعتبار أنّ كلّ عدد حقيقي باستثناء 0 يقبل مقلوبا.

تسمح أغلبية الحاسبات باظهار جدول لقيم دالة وذلك باستعمال اللمسة TABLE.



- دالة معرفة بتمثيل بياني



المنحني البياني المقابل يمثل دالة h معرفة على المجال $[-2\,;2]$.

نقرأ على التمثيل البياني:

$h(-2)=-2$ ، $h(1)=-2$ ، $h(0)=0$

- دالة معرفة بإجراء حساب

الطرود البريدية	
التعريفة (دج)	الوزن بالكيلوغرام
25,00	إلى غاية 5
40,00	$]5\,;\,10]$
62,00	$]10\,;\,15]$
83,00	$]15\,;\,20]$
110,00	$]20\,;\,30]$

الجدول المقابل مأخوذ من تعريفات بريد الجزائر للسنة 2005.

نتعرف على دالة P معرفة على المجال $[0\,;30]$.

وهكذا نجد صورة 12 بالدالة P هي 62 .

العدد 10 ليس له سوابق بالدالة P.

سوابق العدد 83 هي كلّ الأعداد الحقيقية من المجال $]15\,;20]$.

2. التمثيل البياني لدالة

تعريف 2

المستوي منسوب إلى معلم $(O;I,J)$. f دالة معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.

التمثيل البياني (أو المنحني الممثل) للدالة في المعلم $(O;I,J)$ هو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث:

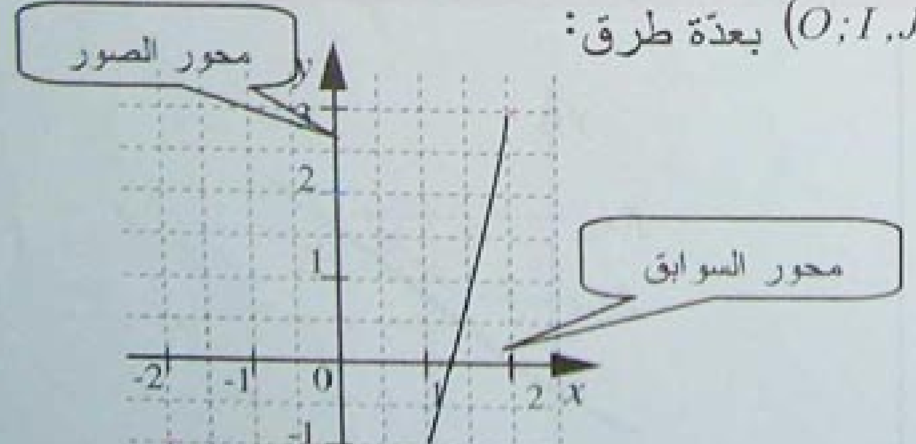
$$y=f(x) \text{ و } x\in D$$

إذا رمزنا إلى منحني الدالة f بالرمز $(\mathscr{C}_f)$، نقول أنّ $y=f(x)$ هي معادلة $(\mathscr{C}_f)$ في المعلم $(O;I,J)$.

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على $[-2\,;2]$ بالشكل $f(x)=x^2+x-3$

يمكن رسم المنحني الممثل للدالة f في المعلم $(O;I,J)$ بعدّة طرق:



- باستعمال جدول لبعض قيم الدالة:

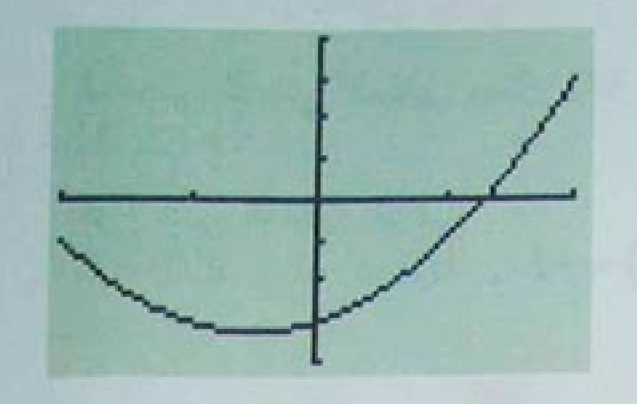
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	-3	-3	-1	3

نعلّم النقاط الموافقة في المعلم ونصل بينها باليد.

تنبيه

إنّ إعطاء مجموعة من القيم لا يكفي للحصول على المنحني الممثل للدالة. هناك العديد من الكيفيات للمرور من نقطة إلى أخرى. فمن الضروري إذن أن تعطى معلومات أخرى حول سلوك الدالة.

• باستعمال حاسبة بيانية



بعد حجز الدالة التي يراد تمثيلها باستعمال اللمسة Y= نختار النافذة تبعا للمجال الذي نرغب إظهار المنحني فيه باستعمال اللمسة WINDOW ونحصل على المنحني الممثل للدالة باستعمال اللمسة GRAPH .

• باستعمال مجدول

نشكّل جدولا لبعض قيم الدالة ثمّ نستعمل المساعد البياني للمجدول للحصول على المنحني الممثّل للدالة.

E24 = =x^2+x-3

Book1

	A	B
1	-2	-1
2	-1.5	-2.25
3	-1	-3
4	-0.5	-3.25
5	0	-3
6	0.5	-2.25
7	1	-1
8	1.5	0.75
9	2	3
10		
11		

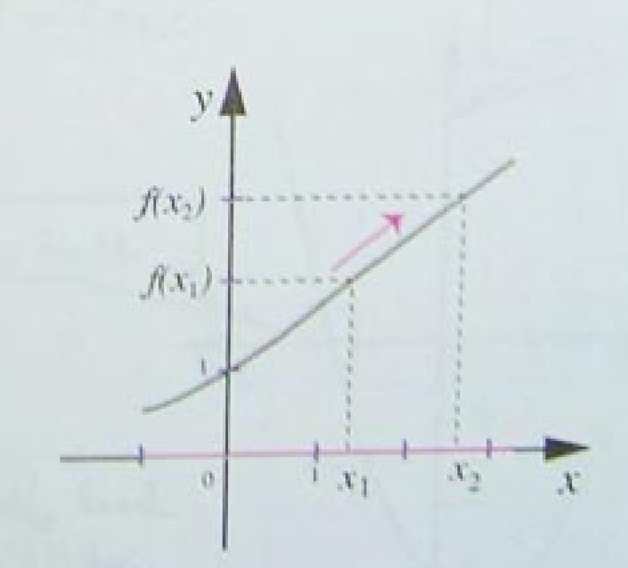
يسمى التّمثيل البياني لدالة **بيان الدّالة**

3. تغيرات دالة معرفة على مجال

تعريف 3

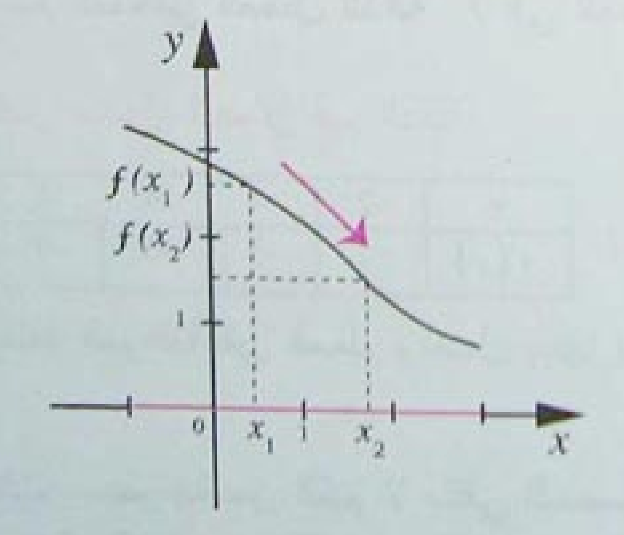
f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

- f متزايدة تماما على I يعني:
  من أجل كلّ x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإنّ $f(x_1) < f(x_2)$
- f متناقصة تماما على I يعني:
  من أجل كلّ x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإنّ $f(x_1) > f(x_2)$
- f ثابتة على I يعني:
  من أجل كلّ x_1 و x_2 من I، $f(x_1) = f(x_2)$



دالة متزايدة تماما

$f(x_1)$ و $f(x_2)$ في نفس ترتيب x_1 و x_2.
الدالة تحفظ الترتيب.



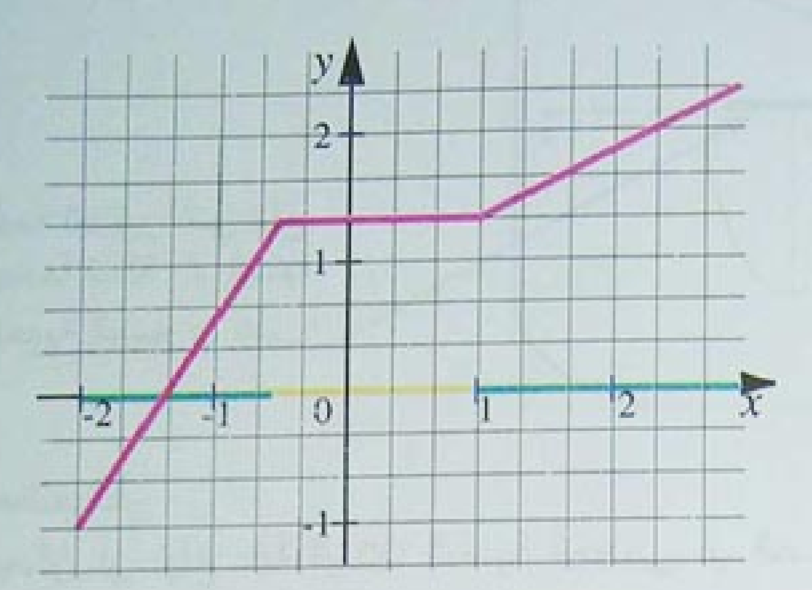
دالة متناقصة تماما

$f(x_1)$ و $f(x_2)$ ليسا في نفس ترتيب x_1 و x_2.
الدالة تعكس الترتيب.

ملاحظة

نعرّف كذلك اتجاه تغيّر دالة كالآتي:

- f متزايدة على I يعني: من أجل كلّ x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإنّ $f(x_1) \leq f(x_2)$
- f متناقصة على I يعني: من أجل كلّ x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإنّ $f(x_1) \geq f(x_2)$



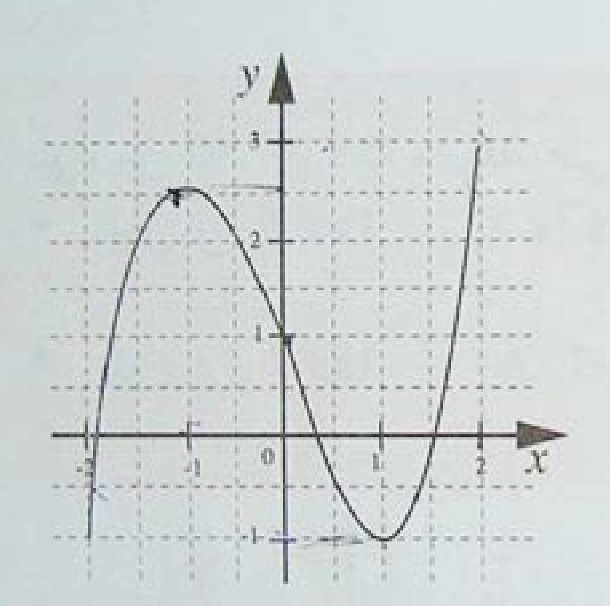
مثال

الدالة المعرفة بالبيان المقابل متزايدة تماما على كلّ من المجالين $[-2\,;-0{,}5]$ ، $[1\,;3]$ وثابتة على $[-0{,}5\,;1]$.

نقول أيضا إنّها متزايدة على المجال $[-2\,;3]$.

- نعني بدراسة اتجاه تغيّر دالة، تعيين المجالات التي تكون فيها هذه الدالة متزايدة تماما أو متناقصة تماما أو ثابتة.

تلخّص نتائج هذه الدراسة في جدول يسمّى جدول التغيرات



مثال

الدالة الممثلة بالمنحني المقابل معرفة على المجال $[-2\,;2]$، هي متزايدة تماما على المجالين $[-2\,;-1]$ و $[1\,;2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-1\,;1]$.

- جدول التغيرات

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	-1 ↗	3 ↘	-1 ↗	3

4- القيم الحدية لدالة

تعريف 4

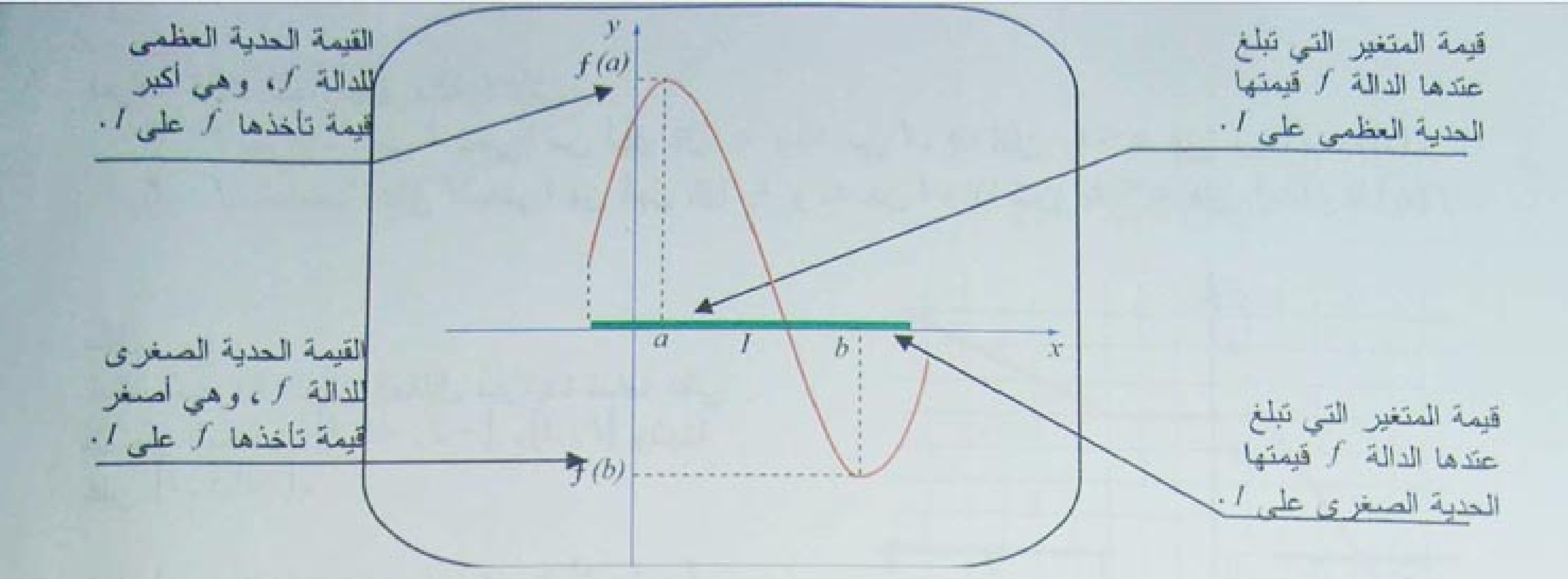
f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

- القيمة الحدية العظمى للدالة f على I هي أكبر صورة $f(x)$ تبلغها f من أجل عدد a من I.

  من أجل كلّ x من I، $f(x) \leq f(a)$

- القيمة الحدية الصغرى للدالة f على I هي أصغر صورة $f(x)$ تبلغها f من أجل عدد b من I.

  من أجل كلّ x من I، $f(x) \geq f(b)$



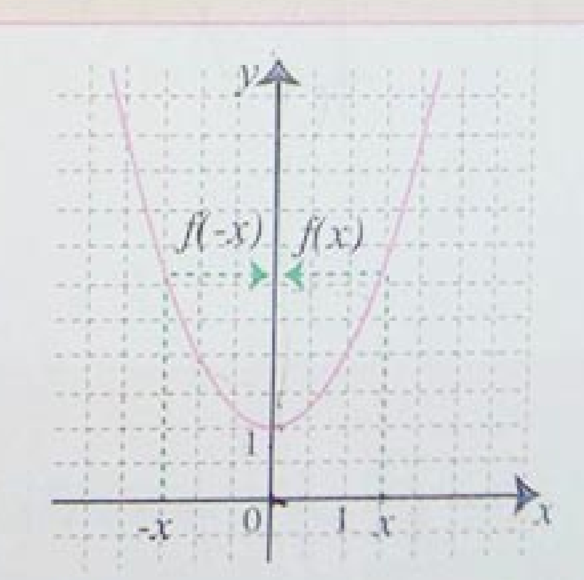
ملاحظة
يمكن أن تبلغ دالة قيمتها الحدية العظمى أو الصغرى على مجال عند أكثر من عنصر واحد من المجال.
والقيمة الحدية تكون دائما عددا حقيقيا (بمعنى أنّ $+\infty$ أو $-\infty$ لا يمكن أن يكونا قيمة حدّية).

5. شفعية دالة

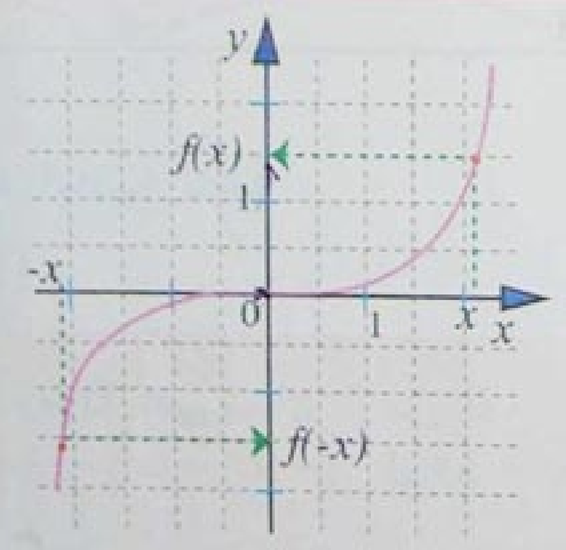
تعريف 5

D جزء من $\mathbb{R}$، f دالة معرّفة على D.

- نقول إنّ f دالة زوجية إذا كان D متناظرا بالنسبة إلى 0 وكان لكلّ x من D، $f(-x)=f(x)$
- نقول إنّ f دالة فردية إذا كان D متناظرا بالنسبة إلى 0 وكان لكلّ x من D، $f(-x)=-f(x)$



بيان دالة زوجية في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد يكون متناظرا بالنسبة إلى محور التراتيب.



بيان دالة فردية في المستوي المنسوب إلى معلم يكون متناظرا بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

أمثلة

1. الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=2x^2+1$ دالة زوجية، لأنّ :
مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0 (بمعنى، لكلّ x من $\mathbb{R}$، $-x\in\mathbb{R}$)
ولكلّ x من $\mathbb{R}$، $f(-x)=2(-x)^2+1=2x^2+1=f(x)$.

2. الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة $g(x)=-\frac{2}{x}$ فردية لأنّ:

مجموعة تعريفها $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة إلى 0

ولكلّ x من $\mathbb{R}^*$، $g(-x)=-\frac{2}{(-x)}=-\left(-\frac{2}{x}\right)=-g(x)$.

3. الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=2x^2+1$ ليست زوجية ولا فردية، لأنّ المجال $]0;+\infty[$ غير متناظر بالنسبة إلى 0.

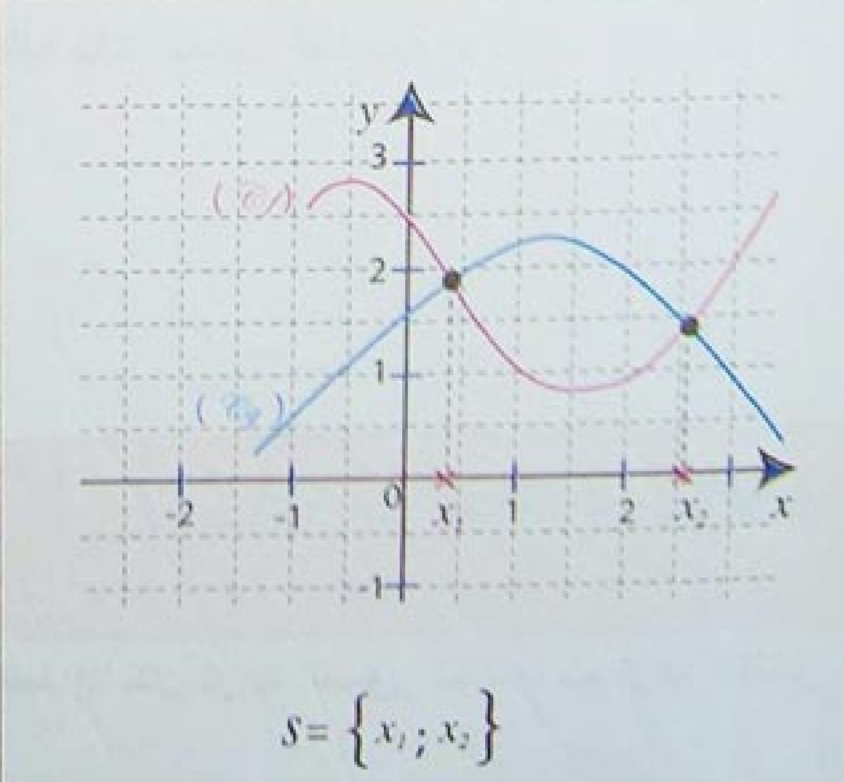
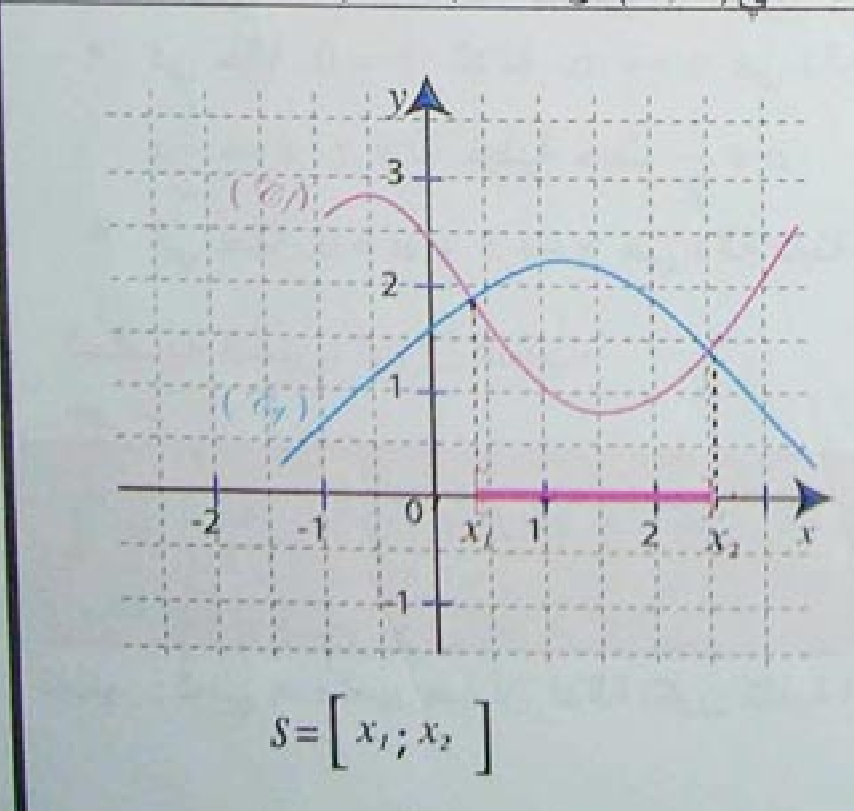
4. الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $u(x)=x+3$ ليست زوجية ولا فردية، لأنّه بالرغم من أنّ مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0، لكن $u(-x)=-x+3$ لا يساوي $u(x)$ ولا يساوي $-u(x)$.

ملاحظة

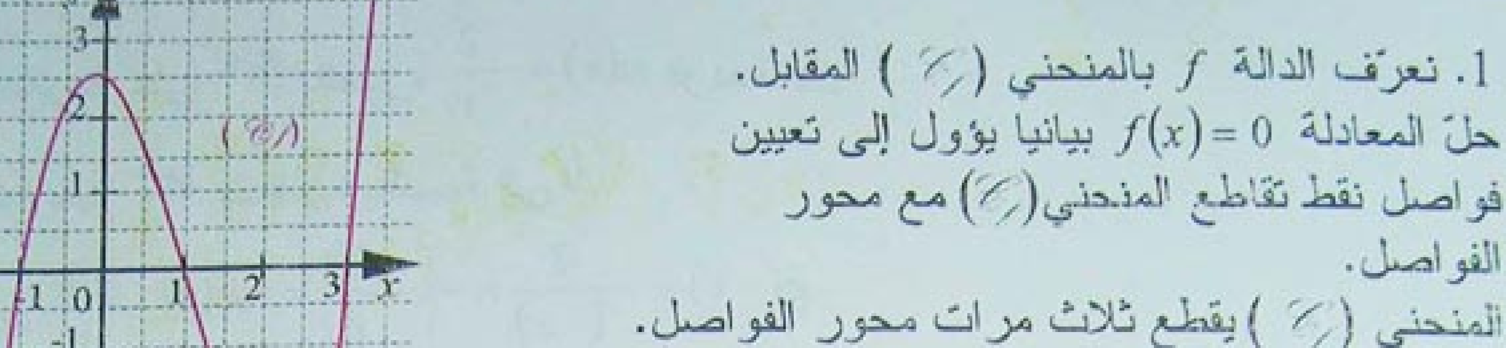
للبرهان على أنّ f ليست دالة زوجية (أو دالة فردية)، يكفي إيجاد عنصر a من مجموعة تعريفها حيث $f(-a)\neq f(a)$ (أو $f(-a)\neq -f(a)$). ويعتبر التمثيل البياني للدّالة وسيلة للتحقق من شفعية الدالة.

6. حلّ معادلات ومتراجحات بيانيا

f و g دالتان معرفتان على مجموعة D، $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ منحنياهما في معلم للمستوي.

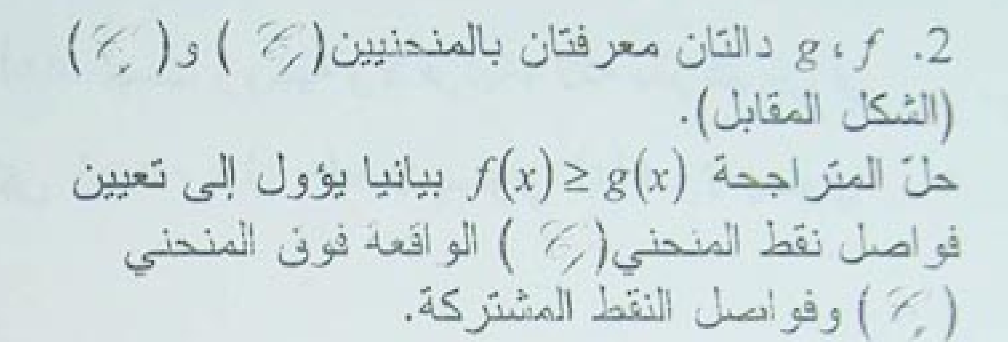
• حلّ المعادلة $f(x)=g(x)$ بيانيا يعني: تعيين فواصل النقط المشتركة للمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$.	• حلّ المتراجحة $f(x)\leq g(x)$ بيانيا يعني: تعيين فواصل نقط المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الواقعة فوق المنحني $(\mathscr{C}_g)$ أو المنطبقة عليه.
	
$S=\{x_1;x_2\}$	$S=[x_1;x_2]$

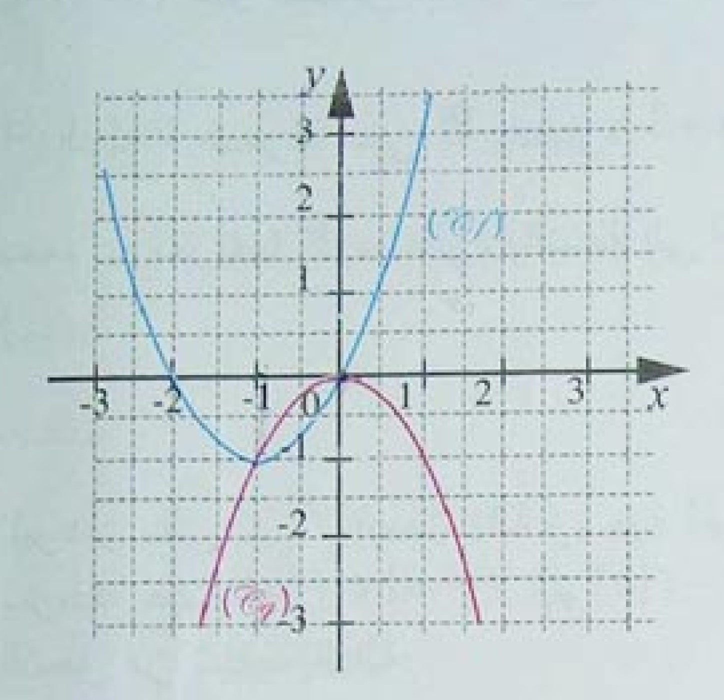
أمثلة



1. نعرّف الدالة f بالمنحني $(\mathscr{C})$ المقابل.
حلّ المعادلة $f(x)=0$ بيانيا يؤول إلى تعيين فواصل نقط تقاطع المنحني $(\mathscr{C})$ مع محور الفواصل.
المنحني $(\mathscr{C})$ يقطع ثلاث مرات محور الفواصل.

حلول المعادلة $f(x)=0$ هي فواصل هذه النقط:
$S=\{-1;1;3\}$





2. f، g دالتان معرفتان بالمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ (الشكل المقابل).
حلّ المتراجحة $f(x)\geq g(x)$ بيانيا يؤول إلى تعيين فواصل نقط المنحني $(\mathscr{C}_f)$ الواقعة فوق المنحني $(\mathscr{C}_g)$ وفواصل النقط المشتركة.

$$S=]-\infty;-1]\cup[0;+\infty[$$

7. الدالة التآلفية

تعريف 6

نسمّي دالة تآلفية كلّ دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان مفروضان.

أمثلة :

- الدالة $f:x\mapsto 2x-3$ هي دالة تآلفية حيث 2 هو المعامل الذي يُضرب فيه x و -3 هو صورة 0 بالدالة f، بمعنى $f(0)=-3$.
- في حالة $b=0$، الدالة $x\mapsto ax$ هي دالة خطية ذات معامل التناسبية a.
$g:x\mapsto \frac{1}{2}x$ دالة خطية حيث $a=\frac{1}{2}$.
- في حالة $a=0$ ، $x\mapsto b$ هي دالة ثابتة.

الخاصية المميزة للدوال التآلفية

مبرهنة 1

تكون الدالة f تآلفية، إذا وفقط إذا كانت النسبة $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ ثابتة، من أجل كلّ عددين حقيقيين مختلفين x و x'.

تفسير : تعني هذه المبرهنة أنّ الدّالة تكون تآلفية إذا وفقط إذا كان تزايد الصور متناسبا مع تزايد المتغيّر

التمثيل البياني

التمثيل البياني لدالة تآلفية معرفة بالعبارة $f(x) = ax + b$ في معلم هو المستقيم $(\mathcal{D})$ الذي معامل توجيهه a ويشمل النقطة $B(0;b)$.

b هي الترتيب إلى المبدأ.

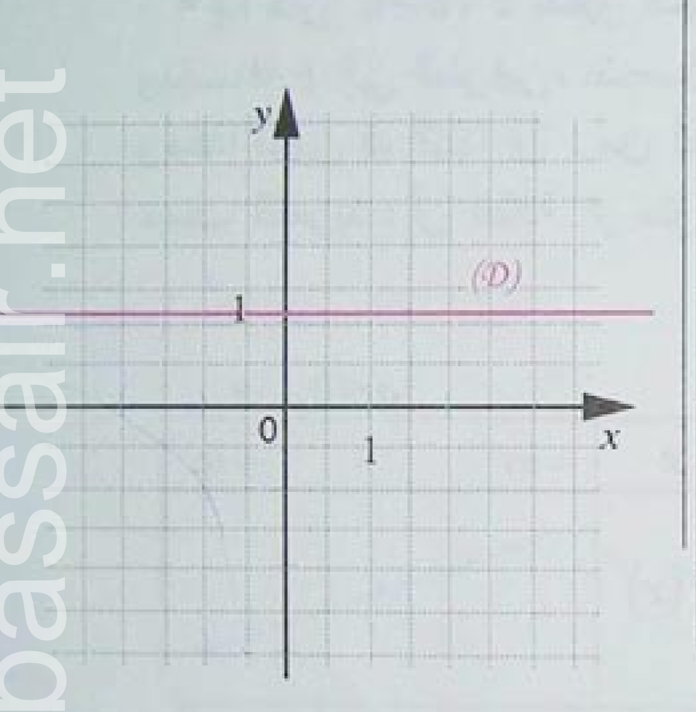
$y = ax + b$ هي المعادلة المبسطة للمستقيم $(\mathcal{D})$.

أمثلة

1. الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x) = -\sqrt{2}x + 1$ تمثل بالمستقيم $(\mathcal{D})$ الذي معادلته $y = -\sqrt{2}x + 1$.
$(\mathcal{D})$ يمر من النقطة $B(0\,;1)$ ومعامل توجيهه $a = -\sqrt{2}$

2. في حالة دالة خطية $x \longmapsto ax$، المستقيم $(\mathcal{D})$ الذي معادلته $y = ax$ يمرّ من مبدأ المعلم.

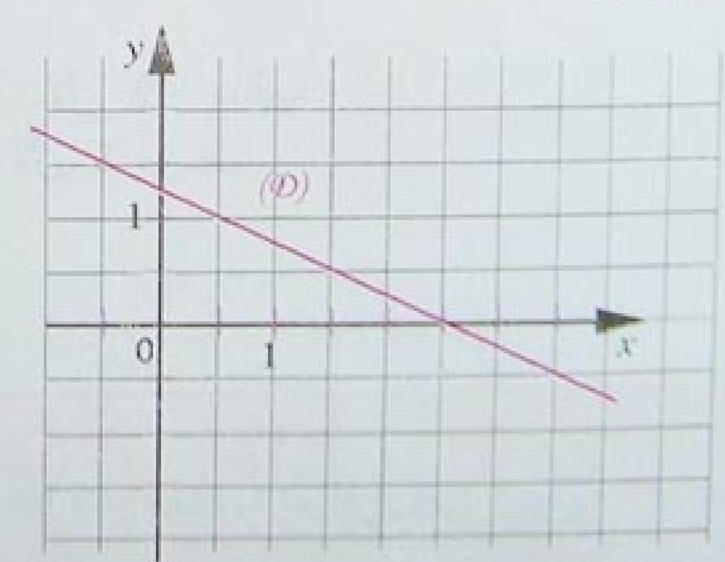
3. في حالة دالة ثابتة $x \longmapsto b$ المستقيم $(\mathcal{D})$ الذي معادلته $y = b$ يوازي محور الفواصل.



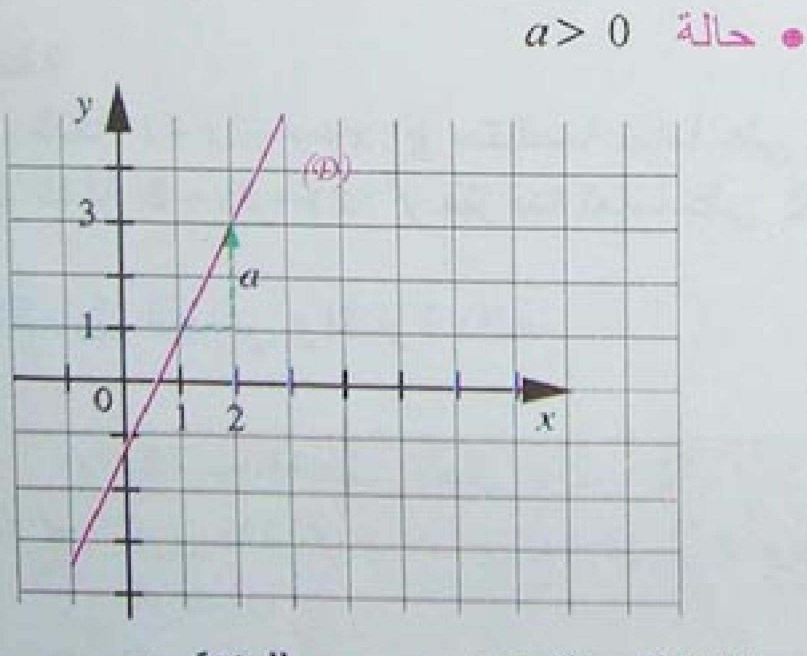
القراءة البيانية لمعامل توجيه دالة تآلفية

أمثلة

• حالة $a < 0$



• حالة $a > 0$



ملاحظة : إنّ قيمة المعامل a حيث $a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ لا تتعلق بالقيمتين x_1 و x_2 للمتغيّر x.

مبرهنة 2

f دالة تآلفية معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=ax+b$.

- إذا كان $a<0$، فإنّ f متناقصة تماما.
- إذا كان $a>0$، فإنّ f متزايدة تماما.

برهان

لتكن f الدالة التآلفية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=ax+b$.

نعتبر عددين حقيقيين x و x' حيث $x<x'$.

بضرب طرفي المتباينة في العدد a، نجد:

- إذا كان $a<0$، يتغير اتجاه المتباينة، أي أنّ $ax>ax'$.

وبإضافة b إلى الطرفين، نتحصل على $ax+b>ax'+b$، بمعنى $f(x)>f(x')$.

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ : من أجل كل عددين x و x' بحيث $x<x'$ فإنّ $f(x)>f(x')$ وهذا يعني حسب التعريف أنّ الدّالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

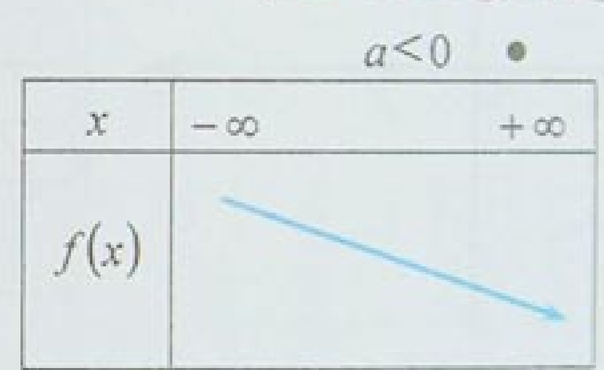
- إذا كان $a>0$، لا يتغير اتجاه المتباينة، أي أنّ $ax<ax'$.

وبإضافة b إلى الطرفين، نتحصل على $ax+b<ax'+b$، بمعنى $f(x)<f(x')$.

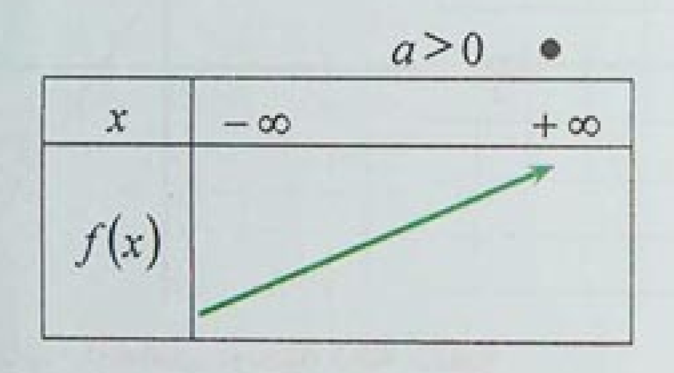
وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ : من أجل كل عددين x و x' بحيث $x<x'$ فإنّ $f(x)<f(x')$ وهذا يعني حسب التعريف أنّ الدّالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيّرات دالة تآلفية

- $a<0$



- $a>0$



ملاحظة: في الحالة $a=0$، تكون الدالة ثابتة.

أمثلة

1. الدالة $g:x\mapsto -2x+1$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$، لأنّ -2 سالب.
2. الدالة $f:x\mapsto 3x+2$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$، لأنّ 3 موجب.

8. التمثيل البياني وإشارة دالة

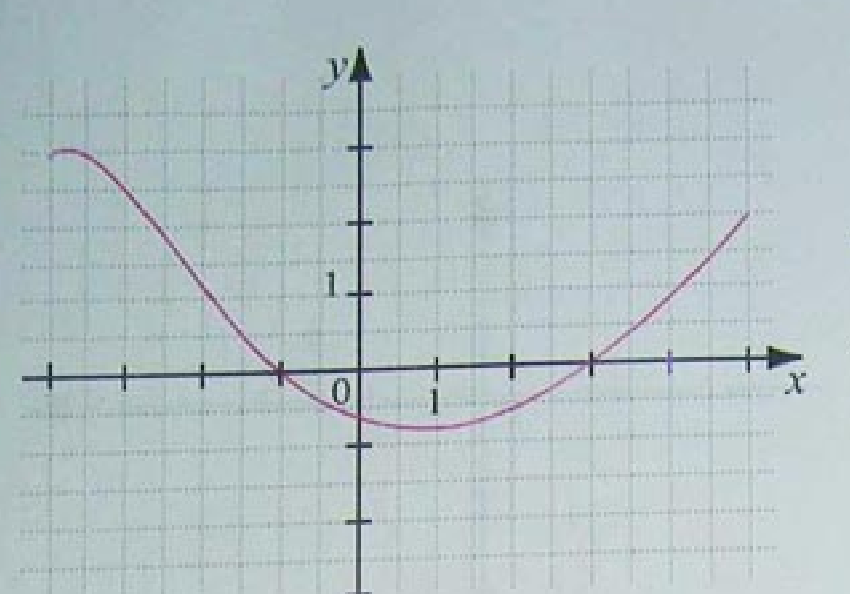
خواص

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

- تكون دالة f موجبة تماما على I إذا وفقط إذا كان تمثيلها البياني على I يقع فوق محور الفواصل.
- تكون دالة f سالبة تماما على I إذا وفقط إذا كان تمثيلها البياني على I يقع تحت محور الفواصل.
- تنعدم f من أجل x_0 من I إذا وفقط إذا كان تمثيلها البياني يقطع محور الفواصل عند x_0 .

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-4;5]$



والتي تمثيلها البياني معطى كما في الشكل المقابل.

يقع التمثيل البياني فوق محور الفواصل على المجالين $[-4;-1[$ و $]3;5]$ ؛ هو تحت محور الفواصل على المجال $]-1;3[$ ويقطع محور الفواصل عند -1 و 3 .

منه، الدالة f :

- موجبة تماما على $[-4;-1[$ و $]3;5]$.
- سالبة تماما على $]-1;3[$.
- تنعدم عند -1 و 3 .

ونلخص ذلك في الجدول التالي:

x	-4		-1		3		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- إشارة $ax+b$ $(a \neq 0)$

نعلم أنّ التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=ax+b$ حيث $a \neq 0$ هو مستقيم معادلته $y=ax+b$.

من جهة أخرى، لدينا $f(x)=0$ يكافئ $ax+b=0$ أي $x=-\frac{b}{a}$.

هذا يعني أنّ المستقيم الممثل للدالة f يقطع محور الفواصل عند $-\frac{b}{a}$.

لدراسة إشارة $ax+b$، نحلّ المتراجحة $ax+b>0$.

نميّز عندئذ حالتين:

- $a>0$

$ax+b>0$ تكافئ $x>-\frac{b}{a}$

المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ يقع فوق محور الفواصل من أجل $x>-\frac{b}{a}$.

منه جدول إشارة $ax+b$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
إشارة $ax+b$		$-$	0	$+$	

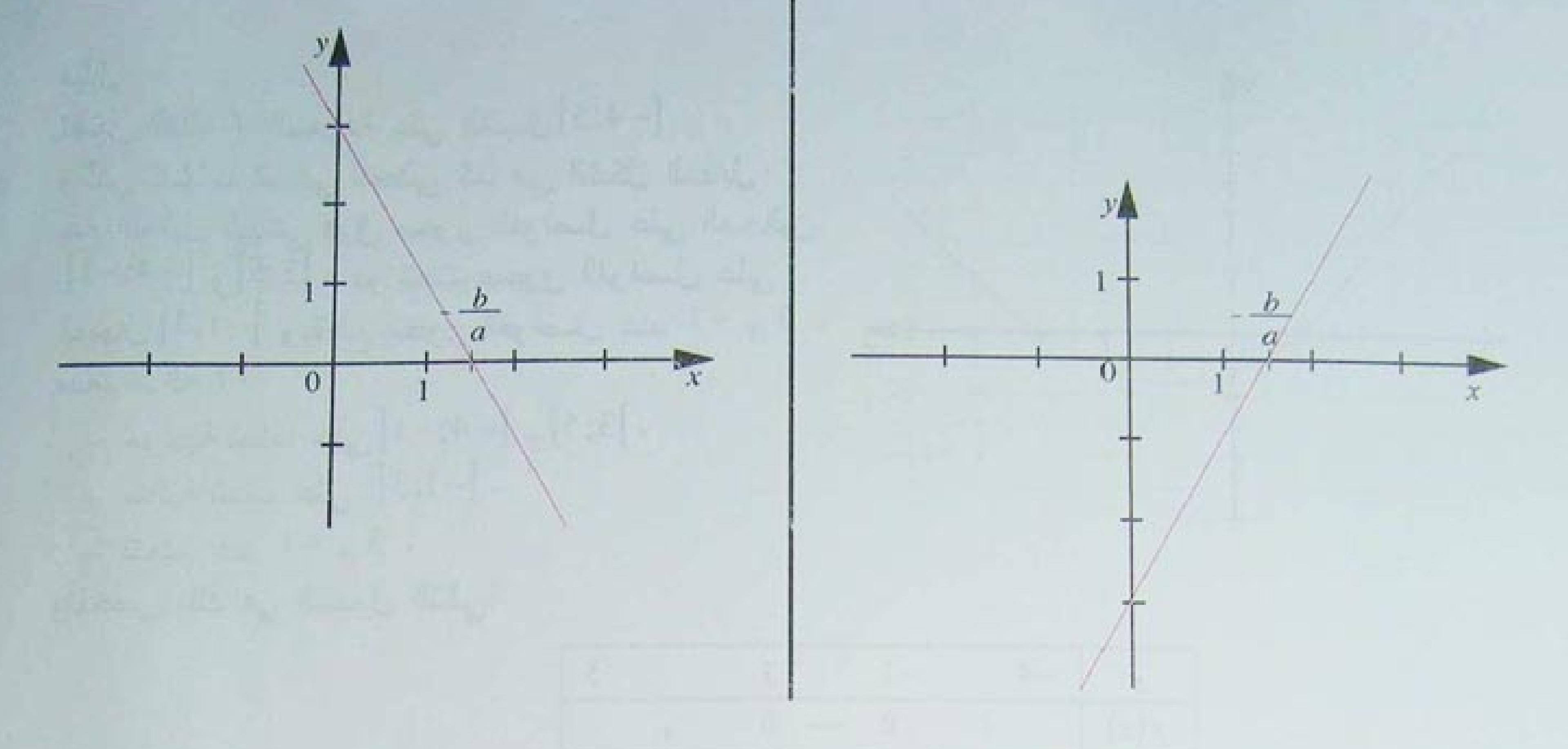
- $a<0$

$ax+b>0$ تكافئ $x<-\frac{b}{a}$

المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ يقع فوق محور الفواصل من أجل $x<-\frac{b}{a}$.

منه جدول إشارة $ax+b$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
إشارة $ax+b$		$+$	0	$-$	



- إشارة جداء أو حاصل قسمة

خاصية

جداء و حاصل قسمة عددين غير معدومين ومن نفس الإشارة هو عدد موجب تمام.
جداء و حاصل قسمة عددين غير معدومين ومن إشارتين متعاكستين هو عدد سالب تمام.

مثال

لندرس إشارة $f(x)=(2x+3)(1-x)$ على $\mathbb{R}$.

إنّ $2x+3$ هي عبارة دالة تآلفية، تمثيلها البياني مستقيم معادلته $y=2x+3$ ومعامل التوجيه له 2 موجب تماما. ولدينا كذلك $2x+3=0$ يكافئ $x=-\frac{3}{2}$.

كما أنّ $1-x$ هي عبارة دالة تآلفية، تمثيلها البياني مستقيم معادلته $y=-x+1$ ومعامل التوجيه له 1- سالب تماما. ولدينا كذلك $1-x=0$ يكافئ $x=1$.

منه:

x	$-\infty$ $\quad$ $-\frac{3}{2}$ $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
إشارة $2x+3$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ $\quad$ $+$
إشارة $1-x$	$+$ $\quad$ $\quad$ $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
إشارة $(2x+3)(1-x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

طرائق وتمارين محلولة

• تعيين مجموعة تعريف دالة

الدوال التالية معرفة كلما كان حساب الصورة ممكنا على $\mathbb{R}$ ، عيّن مجموعة التعريف لكلّ منها:

.1 $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x(x+1)}$ .2 $g : x \mapsto \sqrt{x+1}$ .3 $h : x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

تعاليق	الحلّ
يوجد عموما نوعان من القيم الممنوعة، أي القيم التي يكون من أجلها حساب الصورة غير ممكن: - القيم التي تعدم المقامات. - القيم التي تجعل المقادير تحت الجذر التربيعي سالبة.	.1 العبارة $f(x) = \dfrac{2x+1}{x(x+1)}$ تكون معرفة عندما يكون مقامها $x(x+1)$ غير معدوم. لكن $x(x+1) \neq 0$ يكافئ $x \neq 0$ و $x \neq -1$. وبالتالي تكون مجموعة تعريف f هي $D_f = R - \{-1;0\}$ نكتب أيضا $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$. .2 العبارة $g(x) = \sqrt{x+1}$ تكون معرفة عندما يكون المقدار الموجود تحت الجذر التربيعي موجبا. لكن $x+1 \geq 0$ يكافئ $x \geq -1$. وبالتالي تكون مجموعة تعريف g هي $D_g = [-1;+\infty[$. .3 العبارة $h(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ تكون معرفة عندما يكون المقدار الموجود تحت الجذر التربيعي موجبا ويكون المقام x غير معدوم. تكون إذن، العبارة $h(x)$ معرفة عندما يكون $x \geq 0$ و $x \neq 0$. ومنه مجموعة تعريف h: هي $D_h =]0;+\infty[$

طريقة

عند تعيين مجموعة تعريف دالة، نتمعن في الدستور المعرف للدالة:

- الدستور يتضمن مقاما يظهر فيه المتغيّر x، يجب رفض قيم x التي تعدم المقام.
- الدستور يتضمن جذرا تربيعيا يظهر تحته المتغير x، يجب رفض قيم x التي تجعل العبارة تحت الجذر التربيعي سالبة تماما.

• حساب صورة أو سابقة

لتكن f الدالة المعرفة بـ $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ من أجل $x \neq -2$.

.1 أ) احسب صورة العدد $-0{,}5$.

ب) احسب، في حالة وجودها، سابقة (أو سوابق) العدد 3 .

.2 احسب باستعمال حاسبة قيما مقربة إلى 10^{-2} لصور الأعداد $\sqrt{3}$ ، $\dfrac{1}{2}$ ، $-3{,}5$.

الحلّ	تعاليق

1. أ) لتعيين صورة العدد $-0,5$ نُعوّض في الدستور المُعرّف للدالة f المتغير x بالقيمة $-0,5$:

$$f(-0,5)=\frac{-0,5}{-0,5+2}=-\frac{1}{3}$$

صورة العدد $-0,5$ بالدالة f هي العدد الحقيقي $-\frac{1}{3}$.

X	Y1
-2	ERROR
-1	-1
0	0
1	.33333
2	.5
3	.6
4	.66667

X=-2

الدالة f غير معرفة من أجل العدد -2 ، فالعدد -2 لا يقبل صورة بالدالة f.
جدول قيم الدالة يشير على ذلك بالعبارة " error " التي تعني "خطأ":

ب) لتعيين سوابق العدد 3 بالدالة f، نحلّ المعادلة $f(x)=3$.

لدينا $f(x)=3$ تكافئ $\frac{x}{x+2}=3$ أي $x=3x+6$.

نجد $x=-3$.

العدد 3 يقبل -3 كسابقة وحيدة بالدالة f.

يمكن أن يكون للعدد 3 أكثر من سابقة واحدة بالدالة f كما يمكن ألا يقبل سوابق وذلك حسب وجود وعدد حلول المعادلة $f(x)=3$.

2. نظهر على الشاشة حجز وتذكّر الدوال ونكتب عبارة f في السطر Y1= ونصادق ENTER :

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=X/(X+2)
```

نعود إلى شاشة الحساب: 2nd QUIT

نبحث عن Y_1 في المتغيرات: [Y-VARS] 1

نكتب بعد Y_1 وبين قوسين العدد الذي نريد حساب صورته ونصادق. ونتحصل على الصور المطلوبة:

```
Y1(√(3))
        .4641016151
Y1(1/2)
                 .2
Y1(-3.5)
        2.333333333
```

للحصول على صور أعداد أخرى، يمكن إعادة كتابة نفس العبارة السابقة باستعمال ENTER 2nd ثم تعديلها.

طريقة

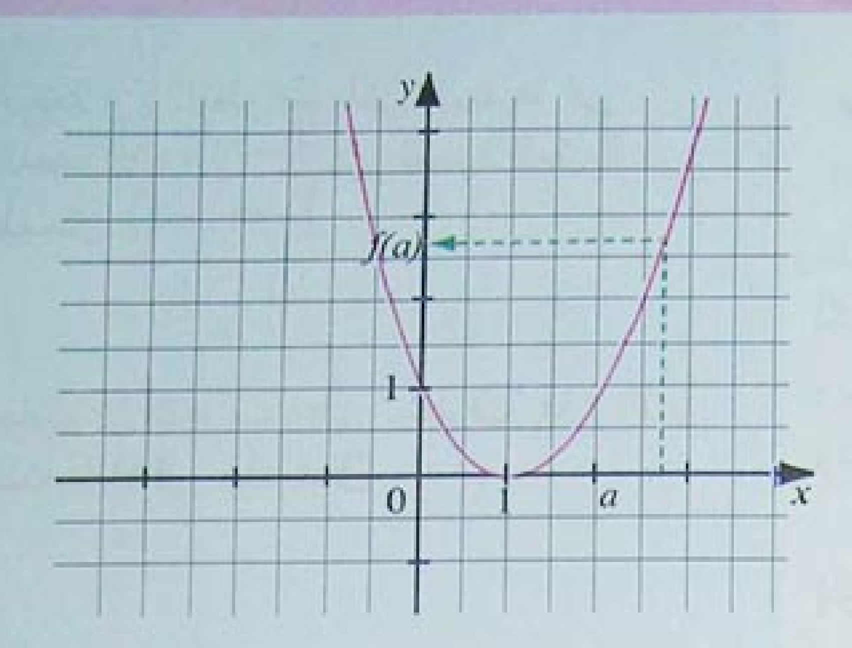
- لحساب صورة عنصر a من مجموعة تعريف دالة، نُعوّض في عبارة الدالة المتغير x بالقيمة a.
- لتعيين السوابق الممكنة لعنصر b، نحلّ المعادلة $f(x)=b$ ولا نحتفظ إلا بالحلول التي تنتمي إلى مجموعة تعريف الدالة.
- لحساب صور عناصر من مجموعة تعريف دالة بالحاسبة ولتجنب كتابة وحجز عدة مرات نفس برنامج حساب صورة عدد حقيقي بالدالة f ، نحجز عبارة الدالة ونضعها في ذاكرة الحاسبة ثم نطلب حساب صورة كلّ من الأعداد المفروضة.
في الحاسبة، يرمز للدوال بالشكل: Y_1، Y_2، ...

- **استعمال التمثيل البياني لدالة**

1. قراءة صورة عنصر وفق دالة

طريقة

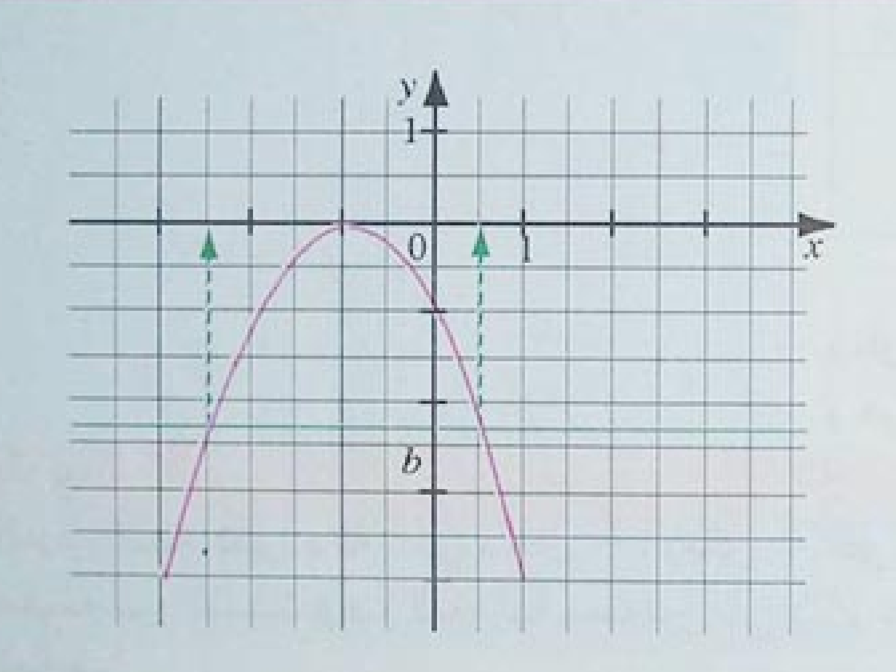
لقراءة صورة عنصر a وفق دالة f باستعمال التمثيل البياني لهذه الدالة. نضع العدد a على محور الفواصل، نرسم من النقطة $A(a\,;0)$ الموازي لمحور التراتيب. هذا المستقيم يقطع المنحنى عند نقطة M ترتيبها $f(a)$، صورة a وفق الدالة f.



2. قراءة سوابق عنصر وفق دالة

طريقة

لقراءة السوابق الممكنة لعنصر b وفق دالة f باستعمال التمثيل البياني لهذه الدالة، نضع العدد b على محور التراتيب، نرسم من النقطة $B(b;0)$ الموازي لمحور الفواصل.
فواصل نقاط التقاطع (في حالة وجودها) لهذا المستقيم والمنحني هي سوابق b.



- **دراسة اتجاه تغير دالة**

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x)=(x+2)^2-3$

1. بيّن أنّ f متزايدة تماما على المجال $[-1\,;+\infty[$. ما هو اتجاه تغيّرها على المجال $]-\infty\,;-1]$؟
2. شكل جدول تغيرات f. ما هي القيمة الحدية القصوى للدّالة f؟

تعاليق	الحلّ
نطبق خواص المتباينات.	1. ليكن a و b عددين حقيقيين من $[-1\,;+\infty[$ حيث $a<b$. لدينا $-1\leq a<b$، لنقارن $f(a)$ و $f(b)$ حيث: $f(a)=(a+1)^2-3$ و $f(b)=(b+1)^2-3$ بما أنّ $-1\leq a<b$ فإنّ $0\leq a+1<b+1$. ونجد $(a+1)^2<(b+1)^2$، لأنّ العددين الموجبين مرتبان في نفس ترتيب مربعيهما. وبإضافة -3 إلى طرفي المتباينة، نتحصل على:

$(a+1)^2-3<(b+1)^2-3$

إذن، من أجل كلّ a و b من $]-1;+\infty[$ حيث $a<b$، $f(a)<f(b)$.

نستنتج أنّ f متزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

لاحظ أننا نطبق بعض المبرهنات الواردة في الد ـس حول الترتيب

▪ إذا كان a و b من $]-\infty;-1]$ حيث $a<b$، فإن $a<b\leq -1$.

ومنه $a+1<b+1\leq 0$.

لكن العددين السالبين يرتبان في عكس ترتيب مربعيهما، وبالتالي $(a+1)^2>(b+1)^2$.

وبإضافة $3-$ إلى طرفي المتباينة، نتحصل على:

$(a+1)^2-3>(b+1)^2-3$

إذن، من أجل كلّ a و b من $]-\infty;-1]$ حيث $a<b$، $f(a)>f(b)$.

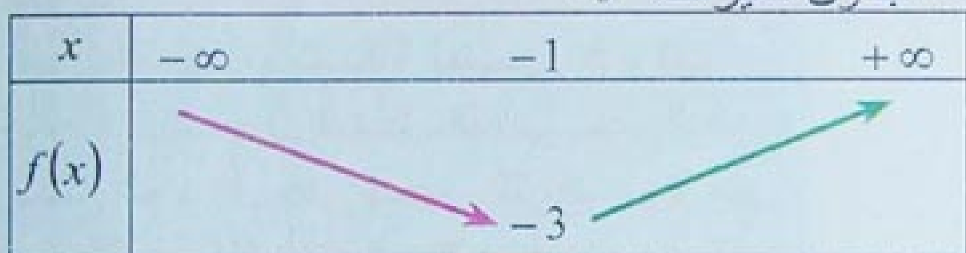
نستنتج أنّ f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$.

لاحظ أنّ الخطوات التي اتبعناها في المجال $[-1;+\infty[$ هي نفسها المتّبعة في المجال $]-\infty;-1]$

حاول ان تتعرّف على نمط البرهان الذي استعملناه في هذا الحلّ



2. جدول تغيرات f :



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-3	↗

ونقرأ على الجدول أنّ f تبلغ قيمتها الحدية الصغرى وهي -3 عند القيمة -1.

طريقة

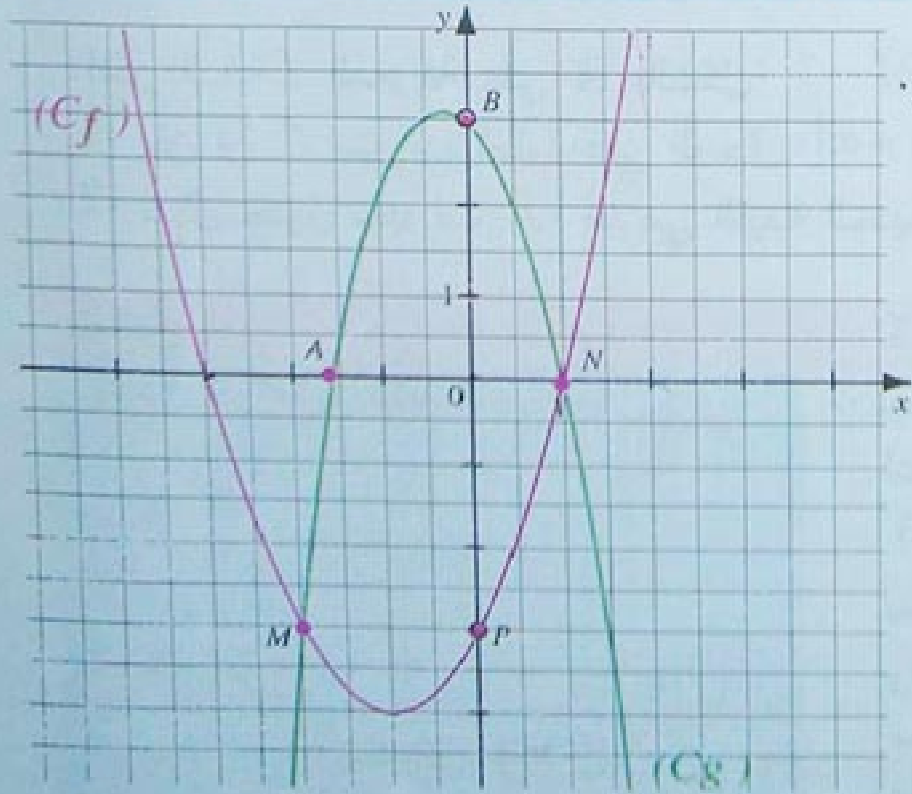
لتعيين اتجاه تغيّر دالة على مجال I، يمكن أن نفرض أنّ $a<b$ و نقارن بين $f(a)$ و $f(b)$ عبر سلسلة من الاستنتاجات المتوالية معتمدين في ذلك على الفرض الذي انطلقنا منه.

تطبيق

لتكن الدالتان f و g الممثلتان كما في الشكل المقابل.

باستعمال المعلومات الواردة في الشكل، أجب على الأسئلة التالية:

1. عيّن مجموعة التعريف لكلّ من f و g.
2. ما هي صورة 0 بكلّ من f و g ؟
3. ما هي سوابق 0 بكلّ من f و g ؟
4. ما هي القيمة الحدية الصغرى للدالة f ومن أجل أي قيمة للمتغير x نتحصل عليها؟
5. أعط جدول تغيرات f على المجال $[-3;1]$.
6. حلّ المعادلة $f(x)=g(x)$
7. عيّن المجالات حيث تكون g سالبة تماما.



- **إيجاد الدّالة التّآلفية المعرّفة بعددين مختلفين وصورتيهما**

أوجد الدالة التّآلفية f حيث $f(1)=-3$ ، $f(-4)=2$.

تعاليق

نترجم المعطيات بجدول تناسبية.

نستعمل الخاصية المميزة للدوال التّآلفية لتعيين a .

إحداثيا كلّ من النقطتين $M(1;-3)$ ، $M'(-4;2)$ يحققان المعادلة $y=ax+b$ للمستقيم الممثّل للدالة f .

حلّ

- **طريقة 1:** الدالة التّآلفية f تكتب على الشكل $f(x)=ax+b$

	1	-4
	-3	2

عندما يتغير x بـــ -5 ، $f(x)$ يتغيّر بـــ 5 .

لكن $-5=a\times 5$ ، ومنه $a=-1$. وبالتالي $f(x)=-x+b$.

وبما أنّ $f(1)=-3$ ، نكتب $-3=-1+b$ أي $b=-2$.

وهكذا نجد من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f(x)=-x-2$

- **طريقة 2:** الدالة التّآلفية f تكتب على الشكل $f(x)=ax+b$

نحلّ الجملة:

$$\begin{cases} f(1)=-3 \\ f(-4)=2 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} -3=a+b \\ 2=-4a+b \end{cases}$$

نجد: $a=-1$ ، $b=-2$

بالتعويض في الشكل العام للدالة التّآلفية،نجد:

من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f(x)=-x-2$

طريقة

لإيجاد الدالة التّآلفية المعرّفة بعددين مختلفين وصورتيهما:

- نحسب معامل التوجيه والترتيب إلى المبدأ.
- أو نحلّ جملة معادلتين.

- **تمثيل دالة تآلفية**

مثّل في المعلم $(O;I,J)$ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x)=2x-3$

تعاليق

لتسهيل الحسابات، يمكن اختيار نقطتي التقاطع مع محور الاحداثيات

اعتمدنا على الخاصية المميزة للدوال التآلفية.

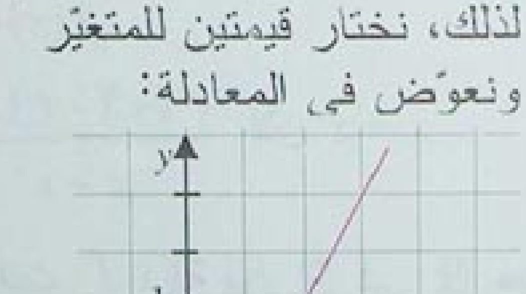
حلّ

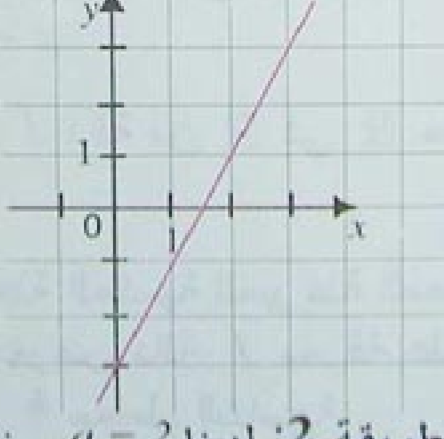
التمثيل البياني للدالة f هو مستقيم معادلته $y=ax+b$.

- **طريقة 1:** لرسم هذا المستقيم، يجب معرفة نقطتين.

لذلك، نختار قيمتين للمتغيّر ونعوّض في المعادلة:

x	0	1
y	-3	-1





- **طريقة 2:** لدينا $a=2$. نعتبر نقطة $A(1;-1)$ ، مثلا، إحداثياها يحققان المعادلة $y=2x-3$.

إذا أضفنا 1 إلى المتغير وأضفنا a إلى الصورة نتحصل على نقطة جديدة من المستقيم الممثّل للدالة f ، نجد $B(2;1)$

طريقة

لتمثيل دالة تآلفية، نستعمل نقطتين أو نقطة ومعامل التوجيه.

تعلم البرهنة

- برهان على التكافؤ المنطقي والتمييز بين الاستلزام واستلزامه العكسي

الاستلزام نصّ رياضي يعني أنّ فرضية ① تستلزم (أو تؤدي إلى) نتيجة ②.

مثال: إذا كان ① a و b عددين حقيقيين حيث $a\times b=0$، فإنّ ② $a=0$ أو $b=0$
ونكتب ذلك على الشكل:
($a\times b=0$ حيث a و b عددان حقيقيان) يستلزم ($a=0$ أو $b=0$)
في حالات معينة، يكون الاستلزام (② يستلزم ①) صحيحا أيضا.
نسمي (② يستلزم ①) الاستلزام العكسي للاستلزام (① يستلزم②).
نقول عندئذ أن النصّين ① و ② متكافئان ونكتب ① يكافئ ②
كما نستعمل أحيانا عبارات مثل "... إذا وفقط إذا ..."، "يعني"، ...

- دراسة مثال

الخاصية المميزة للدوال التآلفية

مبرهنة

تكون دالة f تآلفية، إذا وفقط إذا كانت، النسبة $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ ثابتة من أجل كلّ عددين حقيقيين مختلفين x و x'.

(بمعنى أنّ تزايد الصورة متناسب مع تزايد المتغير).
- أعد صياغة المبرهنة السابقة على شكل استلزام واستلزام عكسي (أي مبرهنة ومبرهنة عكسية).

أولا، نبرهن الاستلزام: إذا كانت الدالة f تآلفية فإنّ النسبة $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ ثابتة.

من أجل ذلك نفرض f دالة تآلفية ، x و x'عددين حقيقيين مختلفين.
بما أن f دالة تآلفية، فإنّ $f(x)=ax+b$ و $f(x')=ax'+b$.
وبالتالي $f(x)-f(x')=a(x-x')$.

ومنه، $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}=\frac{a(x-x')}{x-x'}=a$ لأن $x\neq x'$

ثانيا، نبرهن الاستلزام: إذا كانت f دالة من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ حيث $a=\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ ، فإنّ هذه الدالة تآلفية.

إرشاد: هذا الاستلزام يمثل المبرهنة العكسية للمبرهنة المعطاة في الجزء الأول.
للبرهان على المبرهنة العكسية، نفرض دالة f معرفة على R والتي من أجلها " تزايد الصورة متناسب مع تزايد المتغير" نسمي k معامل التناسبية.
1. x عدد حقيقي كيفي، أكتب بدلالة k تزايد الصورة بين 0 و x.
2. أستنتج أنّ الدالة f تآلفية.

إعادة استثمار

نسمّي الدّالة "مربع"، الدالة f المعرفة بالشكل $f(x)=x^2$. هل التكافؤ الآتي صحيح؟

f هي الدّالة "مربع"، إذا وفقط إذا كان، $f(x)\times f\left(\frac{1}{x}\right)=1$ من أجل كلّ عدد حقيقي غير معدوم x.

استعمال تكنولوجيات الإعلام والاتصال

1) الهدف من هذا النشاط هو التدرّب على استعمال الحاسبة البيانية لحجز دالة، تمثيلها بيانيا وحل معادلة بيانيا.

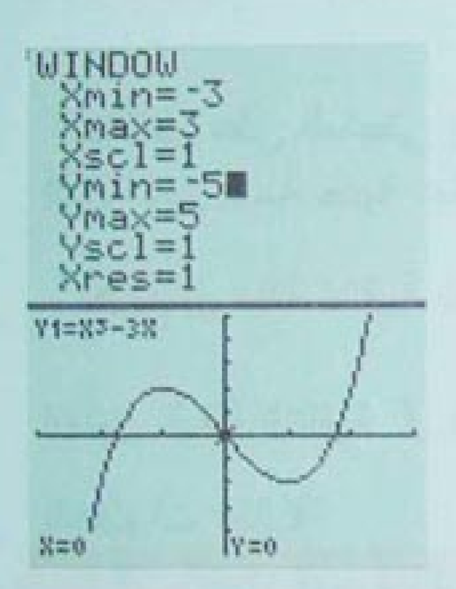
- **حجز دالة**

بعد تحديد في البرنامج MODE الاختيارات المرغوبة (Fct و Relié)، نحجز الدالة المعرفة بالشكل:
$$f(x)=x^3-3x$$

كما يلي:

Y= X,T,Θ,n MATH 3 - 3 X,T,Θ,n

- **إظهار بيان دالة على شاشة حاسبة بيانية**



يعطى البرنامج GRAPH (أو 6 ZOOM) تمثيلا بيانيا أولا للدالة، يسمح بضبط نافذة إظهار الحاسبة (قصد استغلال الشاشة بشكل جيد) وفق الاختيارات المقابلة.

بواسطة TRACE، نتحصل على التمثيل البيانى المقابل.
نقرأ، فى أعلى الشاشة، عبارة الدالة (تبعا لاختيارات برنامج FORMAT).

- **حلّ المعادلة $f(x)=0$ بيانيا**

باستعمال الاختيار 2 للبرنامج CALC (2nd CALC)، يمكن تعيين قيمة مقربة لأحد جذور $f(x)$.

ملاحظة

يمكن التحقق من أنّ $\sqrt{3}$ مثلا، حل للمعادلة $f(x)=0$ وذلك باستعمال الاختيار VALEUR للبرنامج CALC (1 CALC).

2) الهدف من هذا النشاط هو استغلال المنحنى المعطى بحاسبة بيانية ودراسة قيم حدية للدالة الممثلة.

• **جدول التغيرات الدالة المعرفة بالشكل:** $f(x)=x^3-3x$

– باستغلال التمثيل البياني للدالة f، استنتج جدول تغيرات f.

تبيّن الدراسة السابقة أنّ الدالة تقبل قيمة حدية عظمى على المجال $[-2;0]$ ، **سنحاول تعيين قيمتها.**

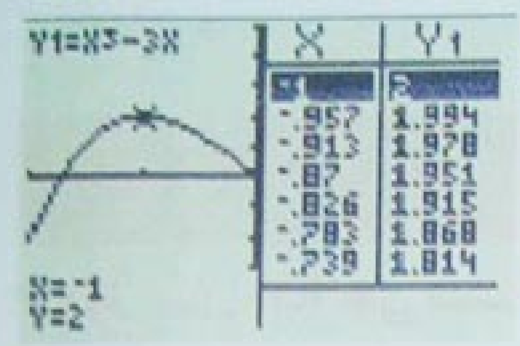
```
WINDOW
 Xmin=-2
 Xmax=0
 Xscl=1
 Ymin=-3
 Ymax=3
 Yscl=1
 Xres=1
```

تغيّر نافذة الإظهار في WINDOW كما على الشاشة المقابلة.

في السطر الأخير للبرنامج MODE ، نختار G-T لنتمكن من إظهار المنحنى وجدول قيم الدالة في آن واحد.

ويواسطة TRACE ، نتحصل على الشاشة

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bi re^θi
Full Horiz G-T
```



– بالتنقل على المنحني بواسطة ▶ وملاحظة التنقل على جدول القيم في نفس الوقت، تحقق من أنّ الدالة تقبل قيمة حدية عظمى على المجال $[-2:0]$ عند -1 هي $f(-1)=2$.

• تمثيل دالة تآلفية بحاسبة بيانية

لتمثيل الدالة التآلفية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=\frac{2}{7}x-\frac{11}{7}$ باستعمال حاسبة بيانية، نتبع الخطوات التالية:

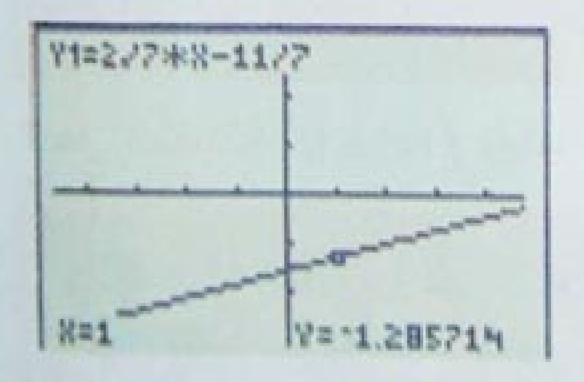
```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=2/7*X-11/7
\Y2=
```

- ندخل العبارة باستعمال اللمسة Y=

- نختار النافذة العشرية الأساسية:

– على TI 83 : ENTER 4:ZDecimal ZOOM

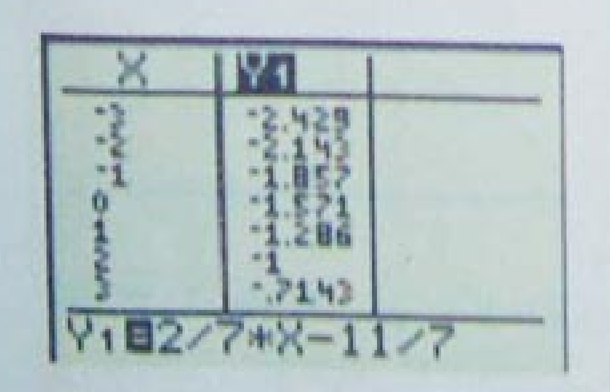
– على Casio : V.WINDOW INIT EXE DRAW



اللمسات ▶ ◀ TRACE تسمح بالتنقل على المنحنى الممثل للدالة.

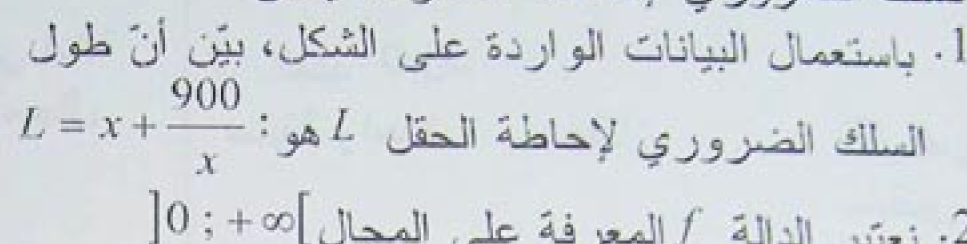
- يمكن أن نبحث مثلا، إن كان المنحنى يمرّ من نقاط ذات إحداثيات صحيحة. من أجل ذلك نستعمل جدول القيم واستعراض مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية:

TBLSET نختار 2- قيمة صغرى و ΔTbl=1 ثم TABLE للحصول على قيم من 10- إلى 10 .



نريد إحاطة حقل مستطيل الشكل مساحته $450m^2$ يحده واد من جهة أحد أضلاعه (الشكل).

المطلوب تعيين بعدي الحقل الذي يكون من أجله طول السلك الضروري لإحاطته أصغر ما يمكن.



1. باستعمال البيانات الواردة على الشكل، بيّن أنّ طول السلك الضروري لإحاطة الحقل L هو: $L = x + \frac{900}{x}$

2. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بالشكل: $f(x) = x + \frac{900}{x}$

أ) بيّن أنّ f متناقصة على المجال $]0\,;30[$ ومتزايدة على المجال $[30\,;+\infty[$.

ب) استنتج القيمة الحدية الصغرى للدالة f على المجال $]0\,;+\infty[$ وعند أي قيمة للمتغير x تبلغ f هذه القيمة الحدية.

3. عيّن عندئذ بعدي الحقل وطول السلك الضروري.

حلّ

1. بفرض x طول المستطيل، فيكون عرضه $\frac{450}{x}$ (وحدة الطول m).

عندئذ يكون طول السلك الضروري لإحاطة الحقل L هو: $L = x + 2\times\left(\frac{450}{x}\right)$

أي: $L = x + \frac{900}{x}$

2. أ) ليكن x و x' عددين حقيقيين من المجال $]0\,;30]$ $(x < x')$. لنحسب $f(x') - f(x)$.

لدينا:

$$f(x') - f(x) = x' + \frac{900}{x'} - x - \frac{900}{x}$$

$$= \frac{x'^2 x + 900x - x^2 x' - 900x'}{xx'}$$

$$= \frac{xx'(x'-x) - 900(x'-x)}{xx'}$$

$$= \left(\frac{x'-x}{xx'}\right)(xx' - 900)$$

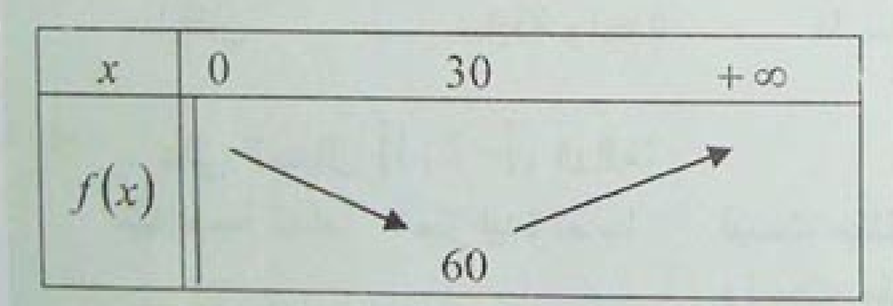
نلاحظ أنّ إشارة $f(x') - f(x)$ هي من إشارة $xx' - 900$ ، (لأنّ $\frac{x'-x}{xx'}$ موجب كون $x < x'$).

نستنتج أنّ لكلّ x و x' عددين حقيقيين من المجال $]0\,;30]$ $(x < x')$، $f(x') - f(x) \leq 0$

معنى ذلك، أنّ f متناقصة على المجال $]0\,;30]$.

ولكلّ x و x' عددين حقيقيين من المجال $[30\,;+\infty[$ $(x < x')$، $f(x') - f(x) \geq 0$.

معنى ذلك، أنّ f متزايدة على المجال $[30\,;+\infty[$.



ومنه جدول تغيرات f :

(الخط الأسود في جدول تغيرات f يعني أن f غير معرفة من أجل $x = 0$).

ب) يتضح على الجدول أنّ الدالة f تقبل، على المجال $]0\,;+\infty[$، قيمة حدية صغرى $f(30)$، عند $x = 30$.

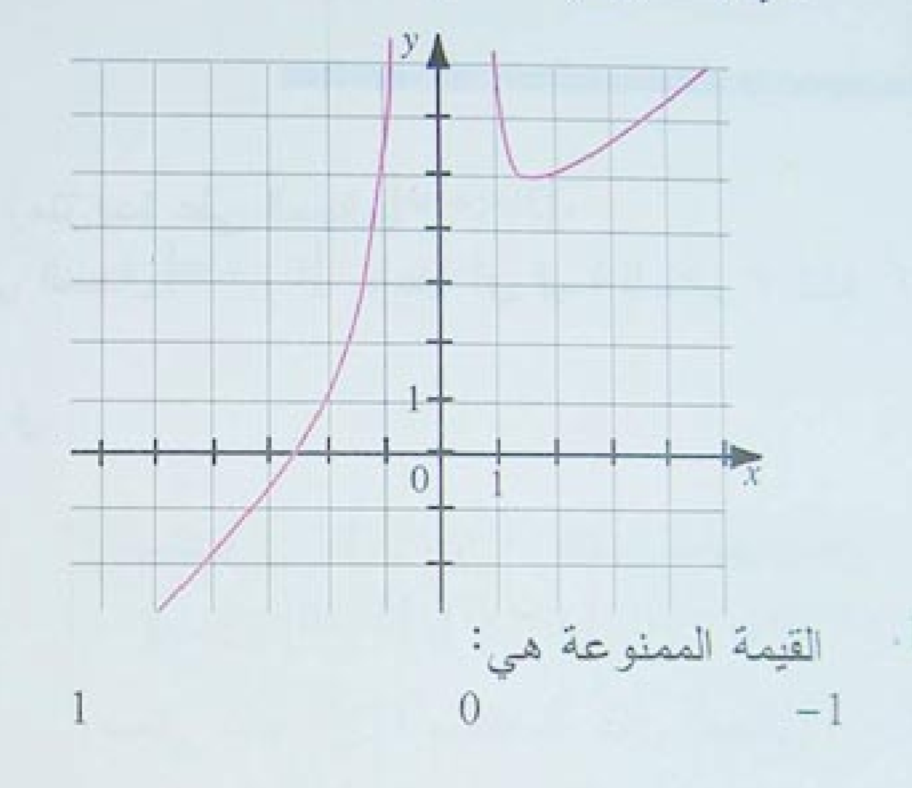
3. طول الحقل $30\,m$ وعرضه $15\,m$.

طول السلك الضروري لإحاطة الحقل L هو: $60m$

أسئلة متعددة الاختيارات

اختر التأكيد المناسب في كل مما يأتي.

- الأسئلة من 1 إلى 5 تتعلق بالتمثيل البياني لدالة (الشكل الموالي). الدالة f ممثلة على المجال الذي يتضمن قيمة ممنوعة.



1. القيمة الممنوعة هي:
-1 | 0 | 1

2. للعدد 3:
صورتان | صورة واحدة | 0 صورة

3. للعدد 5:
سابقتان | سابقة واحدة | 0 سابقة

4. على المجال $[-2\,;1]$، الدالة:
متناقصة تماما | متزايدة تماما | ليست متناقصة وليست متزايدة

5. على المجال $]-5\,;0]$، الدالة:
سالبة | موجبة | سالبة أحيانا وموجبة أحيانا

- الأسئلة من 6 إلى 10 تتعلق بجدول تغيرات دالة g معطى كما يلي:

x	-4		-2		3		5
$g(x)$	3	↘	-3	↗	4	↘	-1

6. منحني الدالة g:
لا يقطع محور الفواصل | **يقطع محور الفواصل مرة واحدة** | **يقطع محور الفواصل مرتين**

7. العدد 0 له:
سابقة واحدة | سابقتان | أكثر من سابقتين

8. على المجال $[-4\,;-2]$، الدالة g:
سالبة | **موجبة** | **مرة سالبة ومرة موجبة**

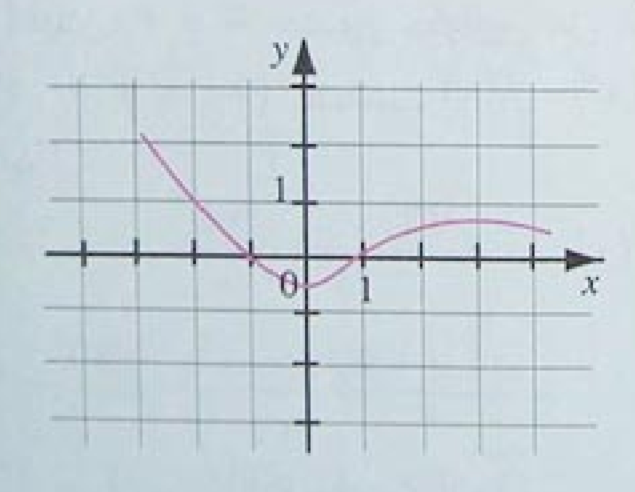
9. القيمة الحدية الصغرى للدالة g على $[-4\,;5]$ هي:
-3 | -1 | 4

10. صورة العدد 4:
موجبة | سالبة | لا نعرف

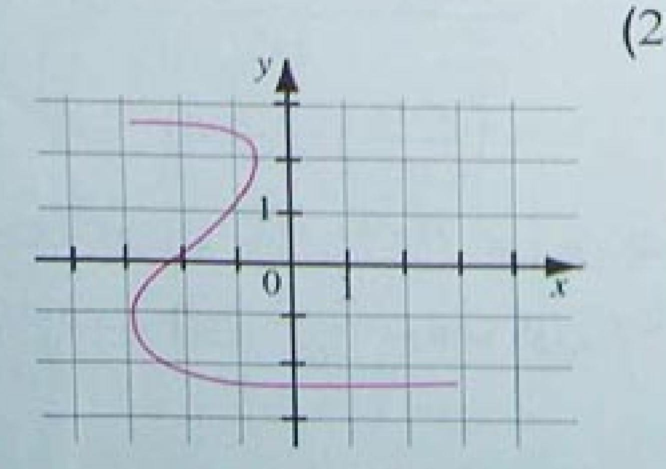
مفهوم دالة

11. من بين المنحنيات التالية، بيّن تلك التي يمكن أن تمثل دالة:

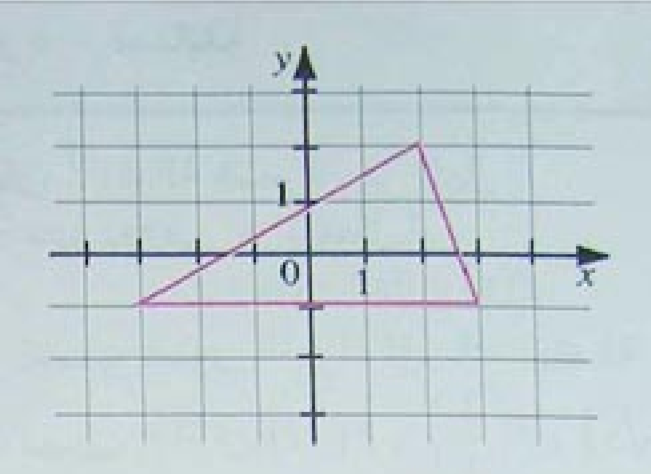
1)



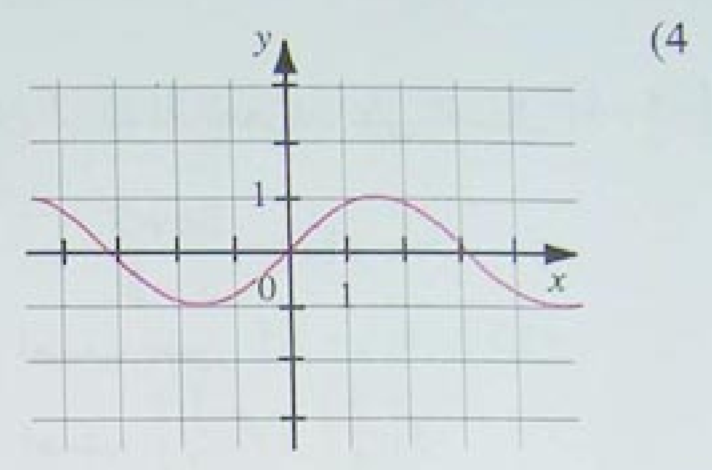
2)



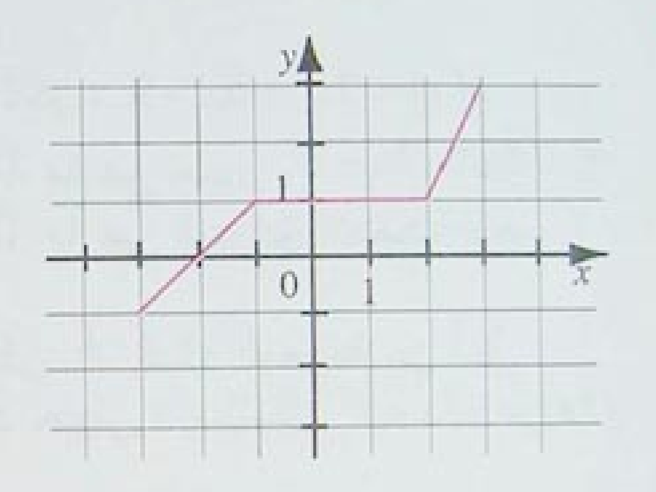
(3



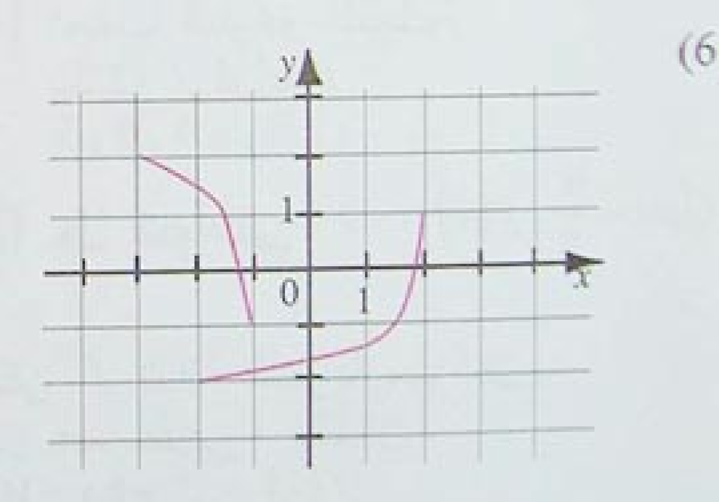
(4



(5

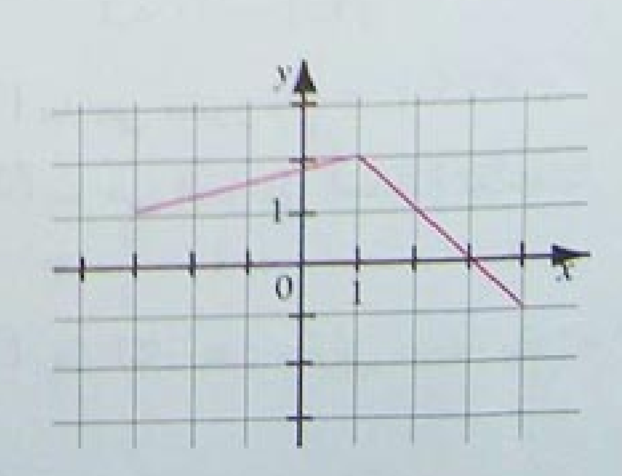


(6



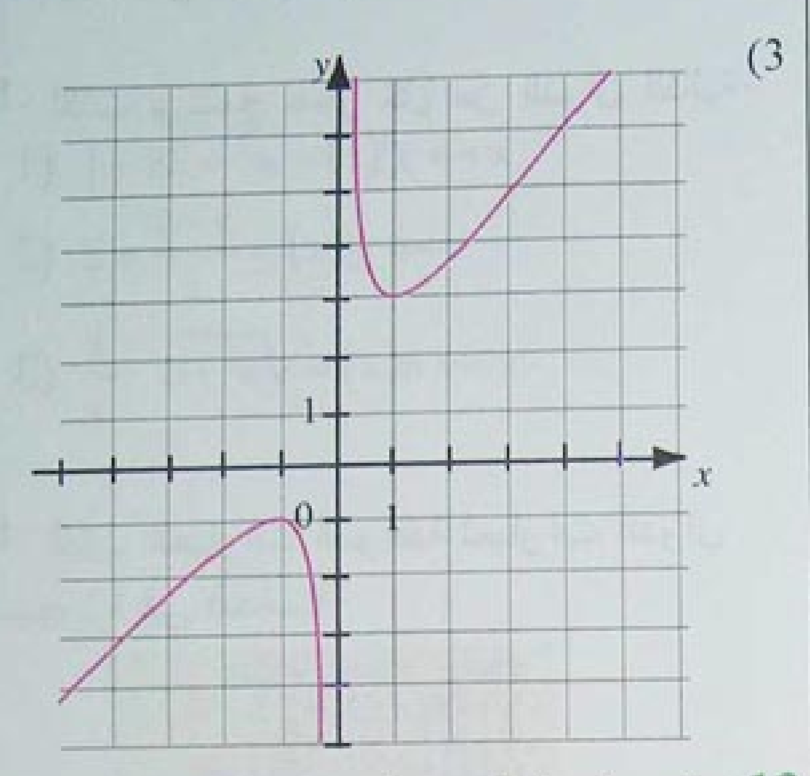
.12 عيّن مجموعة تعريف كلّ من الدوال الممثلة كما يلي:

(1



(2

(3



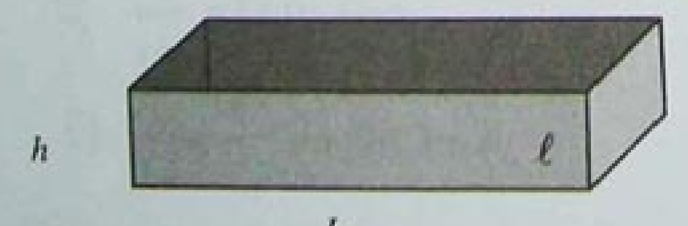
.13 الجدول التالي يعطي وزن وقامة بعض الأفراد:

القامة cm	1,5	1,55	1,6	1,68	1,7	1,6
الوزن kg	50	55	59	60	65	55

1) هل يمكن أن يُعبّر عن وزن فرد بدلالة قامته؟ برر.

2) هل يمكن أن يُعبّر عن قامة فرد بدلالة وزنه؟

.14 علبة بدون غطاء قاعدتها مستطيل وأبعادها كما في الشكل:



1) عبر عن المساحة S للعلبة بدلالة L و ℓ و h.

2) إذا كانت $S = 180cm^2$ و $L = 10cm$، عبّر عن h بدلالة ℓ.

15. أعط الدستور المعرف للدالة:
نرفق بكلّ عدد حقيقي مقلوب مجموع هذا العدد والعدد 3.

16. نفس السوال من أجل:
نرفق بكلّ عدد حقيقي حاصل قسمة مجموع هذا العدد و2 على مربعه.

17. أكتب برنامج حجز كلّ من الدوال التالية:

1) $x \mapsto f(x) = x^2 - 2x + 1$

2) $x \mapsto g(x) = \dfrac{x-1}{x} + 2$

3) $x \mapsto h(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x}$

18. أكتب العبارات الموافقة لعبارات الدوال المحجوزة في الحاسبة:

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=X/(X+2)
\Y2=√(X)-2
\Y3=2X^2-2X+3
\Y4=abs(1-X)
\Y5=X*2-1/X^2
```

19. عيّن، في $\mathbb{R}$ ، أكبر مجموعة تعريف ممكنة لكلّ من الدوال التالية:

1) $x \mapsto f(x) = x^2 - 1$

2) $x \mapsto g(x) = \dfrac{2x-1}{-x+3}$

3) $x \mapsto h(x) = \sqrt{2 - 3x}$

20. نفس السوال.

1) $x \mapsto f(x) = 2x - \dfrac{1}{x+1}$

2) $x \mapsto g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3) $x \mapsto h(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}$

21. نفس السوال.

1) $x \mapsto f(x) = \dfrac{3-x}{|x|+2}$

2) $x \mapsto g(x) = \dfrac{3-x}{|x|-2}$

الصورة – السابقة

22. لتكن f الدالة المعرفة من أجل كلّ عدد حقيقي x بالشكل:
$$f(x) = 5x^2 - 8x + 3$$
1) احسب صور 3، 1، 0، -4 بالدالة f.

2) احسب $f(4)$، $f(-1)$، $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$، $f(\sqrt{3})$

23. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[-5\,;4]$ بالشكل:
$$f(x) = \frac{2x+3}{x-5}$$
1) احسب صور $-5{,}5$ ، -4 ، $-1{,}5$

2) احسب $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$، $f\left(\dfrac{4}{3}\right)$

24. لتكن: $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

1) ما هي صور -3، 5، 0، $\sqrt{2}$ ؟

2) ما هي السوابق الممكنة للعدد -3 ؟

25. لتكن f الدالة المعرفة من أجل كلّ عدد حقيقي x بالشكل: $f(x) = -7x + 5$

1) احسب السوابق الممكنة بالدالة f للأعداد 3، 0، -4، 5

2) حلّ المعادلتين: $f(x) = -2$ ، $f(x) = \dfrac{4}{3}$

26. لتكن f الدالة المعرفة من أجل كلّ عدد حقيقي x بالشكل:
$$f(x) = x^2 + 6x - 16$$
1) بيّن أنّ: $f(x) = (x+3)^2 - 25$

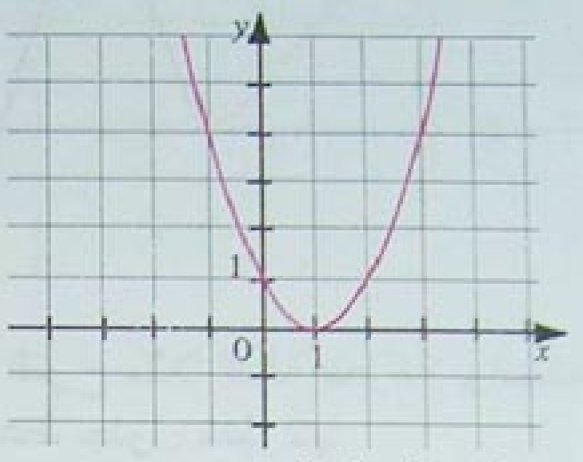
2) حلّ المعادلة $f(x) = 11$

27. لتكن f الدالة المعرفة على R بالشكل:
$$f(x) = -2x + 3$$
1) ما هي صورة $-\dfrac{1}{3}$ ؟ 0,25 ؟

2) ما هي السوابق الممكنة للأعداد: 0، $-\dfrac{4}{3}$، 3 ؟

3) هل لكلّ عدد حقيقي سابقة بالدالة f ؟

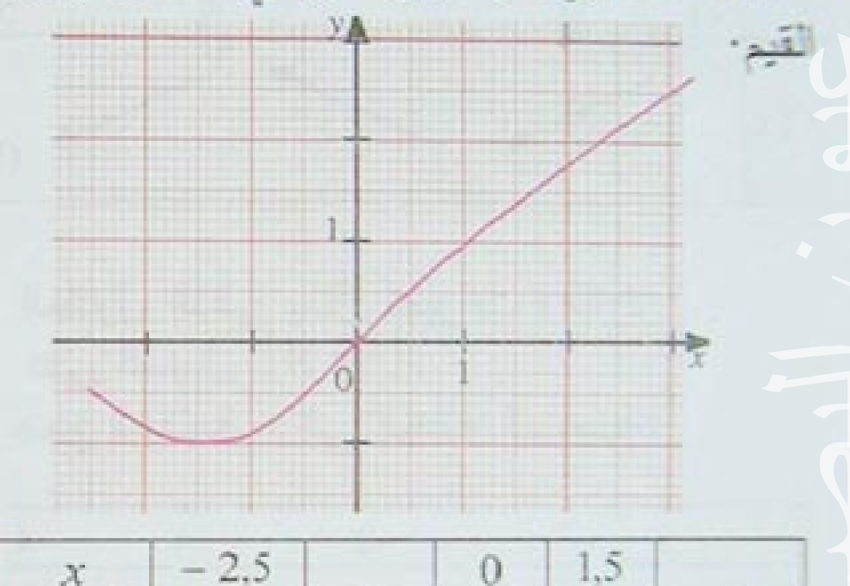
28. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ والممثلة كما يلي:



1) ما هي صور -1، 0، 1، 3 ؟

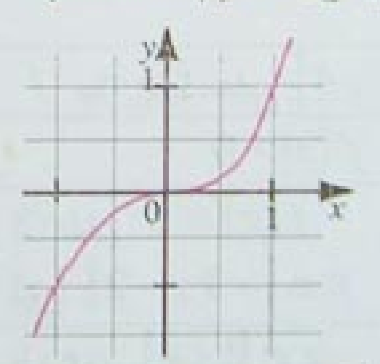
2) ما هي السوابق الممكنة للأعداد 1، 0، -1؟

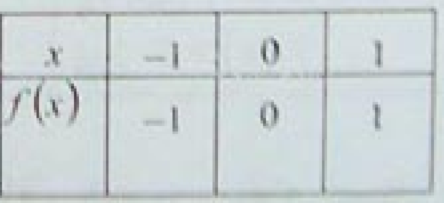
29. الدالة f معرفة بتمثيلها البياني، أكمل جدول القيم.



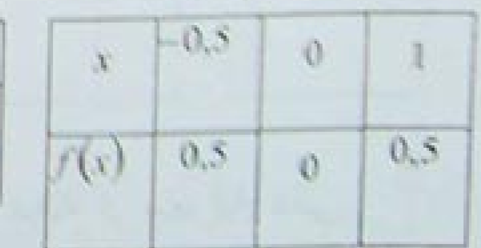
x	$-2,5$		0	$1,5$	
$f(x)$		-1			$2,5$

30. أرفق التمثيل البياني بجدول القيم المناسب.





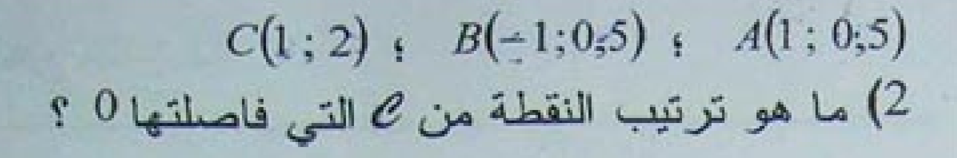
x	-1	0	1
$f(x)$	-1	0	1



x	$-0,5$	0	1
$f(x)$	$0,5$	0	$0,5$

31. ليكن $\mathscr{C}$ المنحني الممثل للدالة f المعرفة على R بالشكل: $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

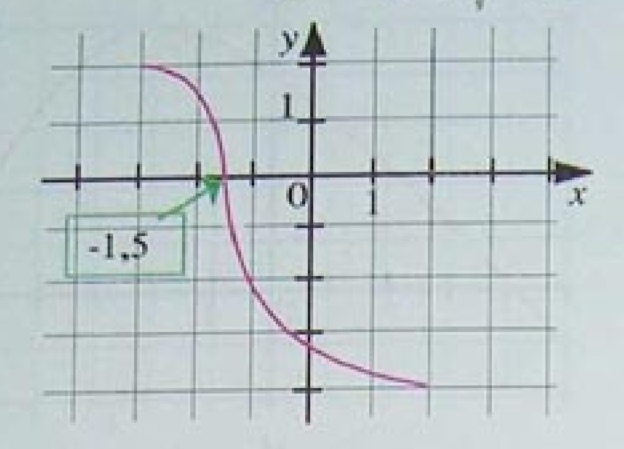
1) من بين النقاط التالية، أذكر التي تنتمي إلى $(\mathscr{C})$:



$C(1\,;2)$ ؛ $B(-1;0,5)$ ؛ $A(1\,;0,5)$

2) ما هو ترتيب النقطة من $\mathscr{C}$ التي فاصلتها 0 ؟

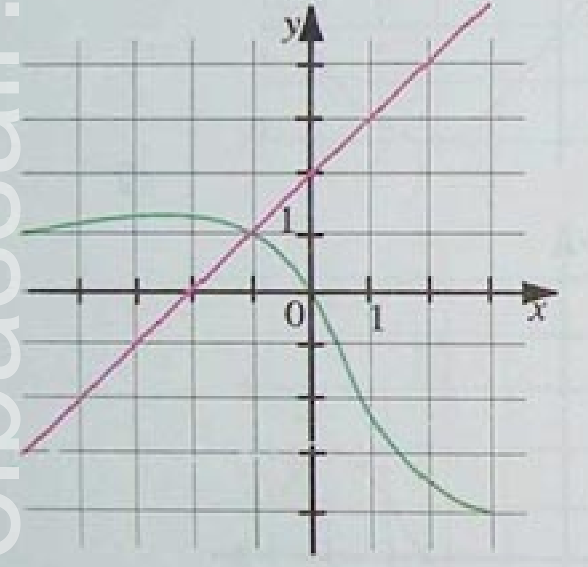
32. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-3;2]$ بتمثيلها البياني التالي:



باستعمال القراءة البيانية، عيّن عناصر $[-3;2]$:

- التي صورها هي نفسها.
- الأصغر من صورها.
- الأكبر من صورها.

33. f و g دالتان معرفتان على المجال $[-5;3]$ بتمثيليهما البيانيين.



حلّ بيانيا:

- $f(x)=g(x)$
- $f(x)\geq g(x)$

34. نعتبر الدالة f المعرفة بالشكل:

$$f(x)=\frac{x^2-3x}{x-1}$$

1) أ) عيّن مجموعة تعريف f.

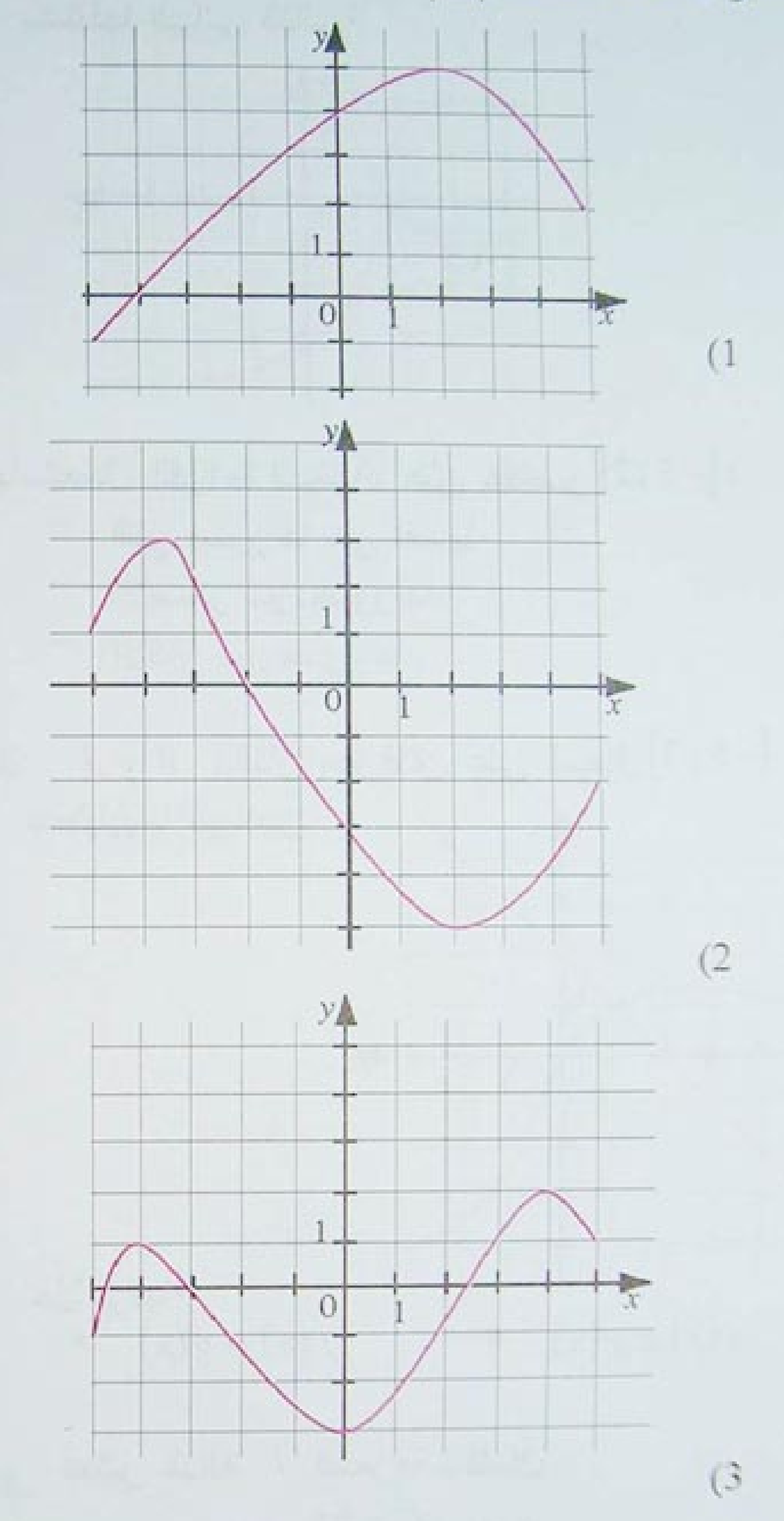
ب) احسب $f(2)$، $f(\sqrt{3})$ (تعطى النتائج مدوّرة إلى 10^{-2}).

ج) احسب السوابق الممكنة للعدد 0 بالدالة f.

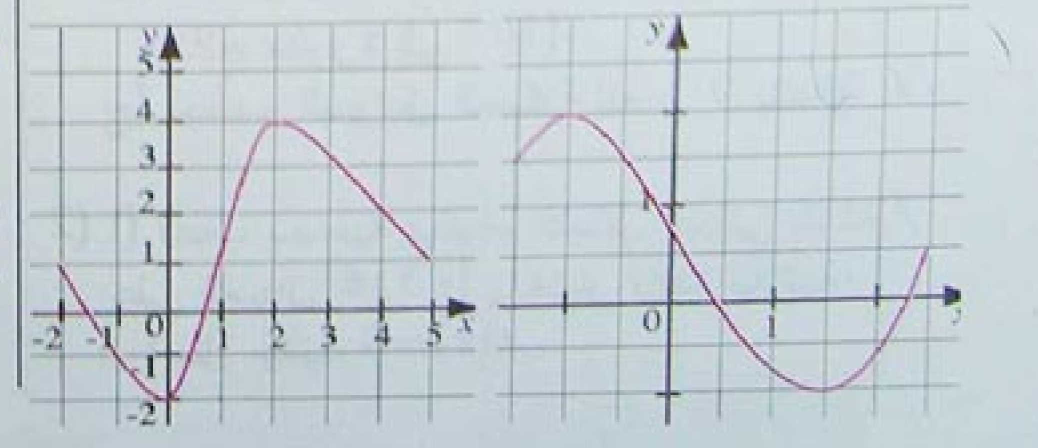
2) أ) اعط، بحاسبة بيانية، التمثيل البياني للدالة f على المجال $[-3\,;6]$ باختيار نافذة ملائمة.

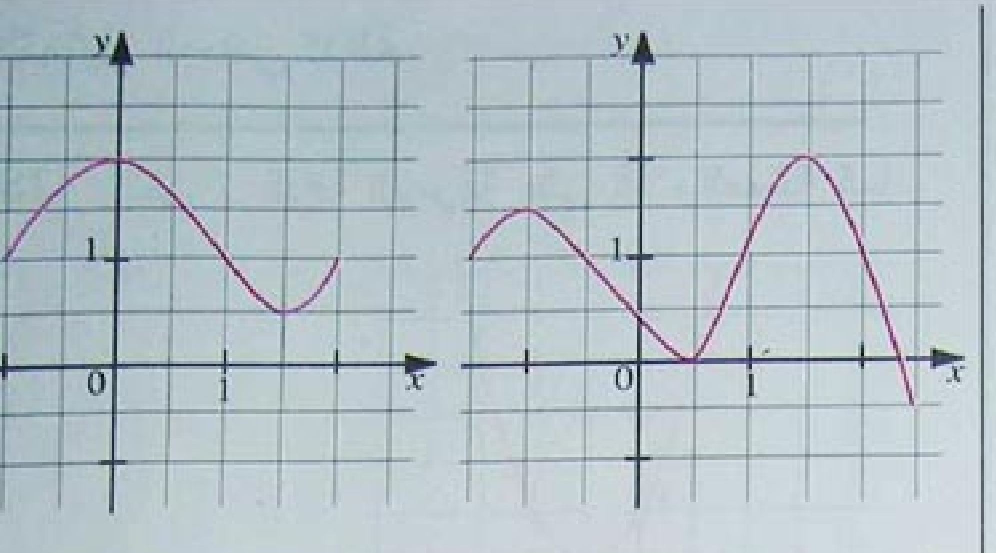
ب) حلّ بيانيا $f(x)=0$.

35. صف، باستعمال عبارات مناسبة تغيرات الدوال الممثلة كما يلي:



36. 1) أعط جدول تغيرات كلّ دالة من الدّوال المعرّفة بالتمثيلات البيانية أدناه.





2) اقترح مثلا لدالة معرّفة بواسطة تمثيلها البياني و أعط جدول تغيّراتها

37. ارسم تمثيلا بيانيا لدالة f تقبل جدول التغيرات التالي:

x	-1	0	2	4	5
$f(x)$	-2 ↘	0 ↘	-1 ↗	3 ↘	0

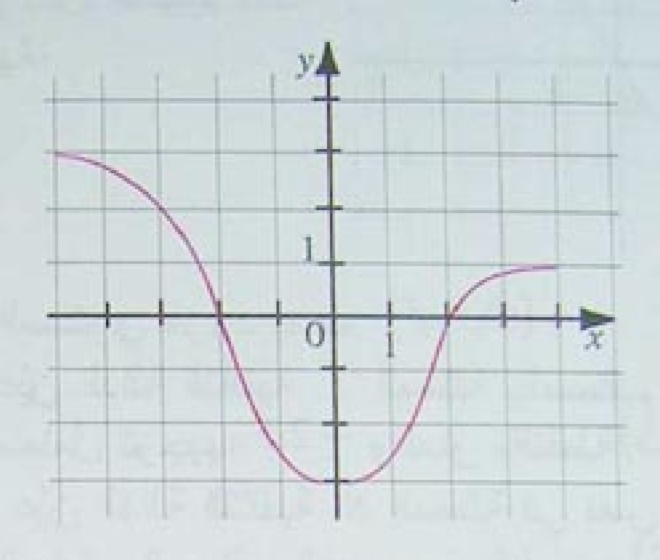
38. الجدول التالي يمثل تغيّرات دالة f على المجال $[-3;4]$.
ضع العلامة × في الخانة المناسبة:

x	-3	-2	1	4
$f(x)$	5 ↘	0 ↗	2 ↘	-1

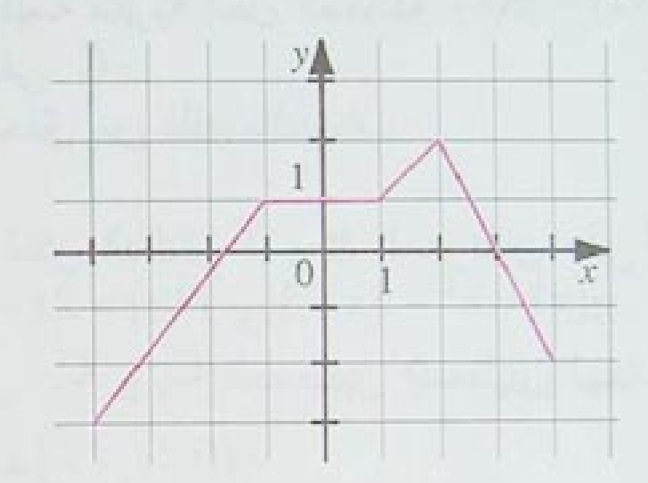
		ص	خ	لا نعلم
1	f متزايدة على $[1;4]$			
2	$f(3)>0$			
3	إذا كان $f(x)=3$ فإنّ $x\in[-3;-2]$			
4	إذا كان $x\in[1;4]$ فإنّ $f(x)>0$			

39. المنحني الآتي يمثل دالة f معرفة على $[-5;4]$.
صف تغيرات الدالة f بإتمام العبارات الآتية:
"f متناقصة على المجال ...".
"f متزايدة على المجال ...".

" f تقبل قيمة حدية عظمى على المجال $[-5\,;4]$ عند ....، تساوي....".
" f تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $[-5\,;4]$ عند ....، تساوي....".



40. المنحني الآتي يمثل دالة f على المجال $[-4\,;4]$.



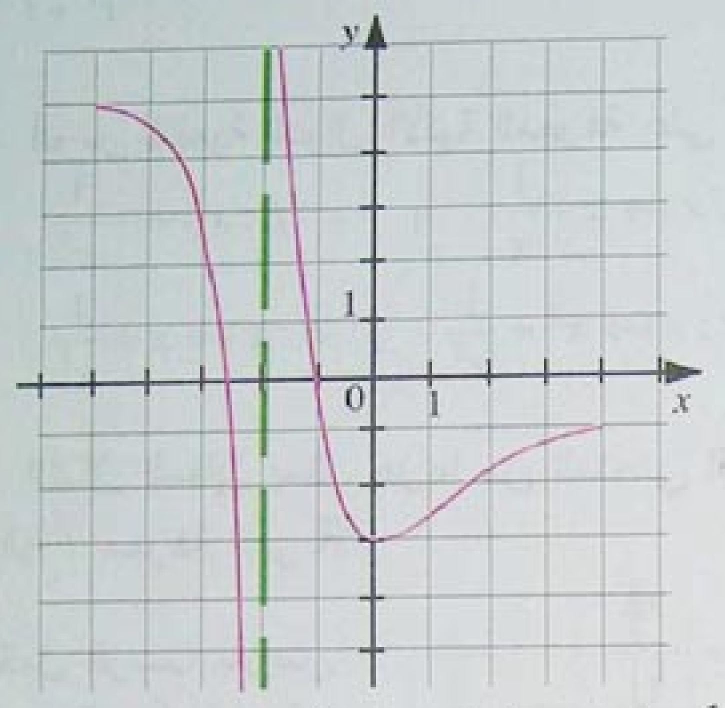
اختر العبارات المناسبة لوصف تغيرات الدالة f :
1. الدالة متزايدة تماما على المجال $[-4\,;2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[2\,;4]$.
2. الدالة متزايدة على المجال $[-4\,;2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[2\,;4]$.

41. أرسم منحنى يمكن أن يمثل الدالة f، علما أنّ:
- f معرفة على المجال $[0\,;6]$.
- f متزايدة وسالبة على هذا المجال.

42. أرسم منحنى يمكن أن يمثل الدالة f، علما أنّ:
- f معرفة على المجال $[-3\,;4]$.
- f تقبل قيمة حدية صغرى عند -1 وقيمة حدية عظمى عند 2.
- $f(-3)=2$ و $f(4)=1$.
- المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين مختلفين.

43. أرسم منحنى يمكن أن يمثل الدالة f، علما أنّ:
- f معرفة على المجال $[-3\,;3]$
- f متناقصة على $[-3\,;-1]$
- f متزايدة على $[-1\,;3]$
- من أجل كلّ $x\in[-3\,;3]$، $-1\le f(x)\le 4$

44. الدالة f معطاة بتمثيلها البياني الآتي:



1. عيّن جدول تغيرات f.
2. عيّن جدول إشارات f.
3. حلّ بيانيا المتراجحة $f(x)\ge 0$

45. أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على $[1\,;+\infty[$ بالشكل: $f(x)=(x-1)^2-1$

46. استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل:
$$f(x)=2x^2-2x+1$$
ما هي القيم الحدية الممكنة للدالة f وقيم المتغير x التي تبلغ عندها هذه القيم الحدية؟
تحقق من ذلك.

47. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل:
$$f(x)=x^3+3x^2-2$$
بيّن أنّ الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0\,;+\infty[$ عند 0.

شفعية دالة

48. هل يمكن أن تكون دالة زوجية وفردية في آن واحد ؟

49. أدرس شفعية الدوال الآتية المعرفة على $\mathbb{R}$:

$f : x \mapsto x^2 - 1$ ؛ $g : x \mapsto x^2 + 3x$

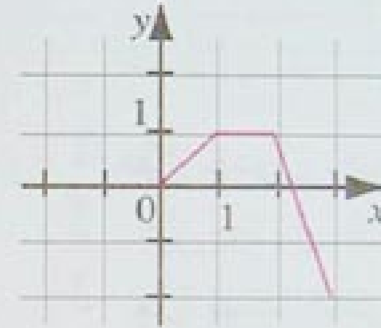
$h : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ ؛ $t : x \mapsto -x^3 + x$

50. أدرس شفعية الدوال الآتية المعرفة على $\mathbb{R}^*$:

$f : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ ؛ $g : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$

$h : x \mapsto x + \dfrac{1}{x^2}$ ؛ $t : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

51. الشكل المقابل يمثل جزءا من المنحني الممثل لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.



أكمل الرسم، بفرض:

- f فردية
- f زوجية

52. لتكن f دالة معرفة على مجال $[-a\,;\,a]$.
على هذا المجال، نعرّف الدالتين g و h حيث:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

و

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

1. عيّن الدالتين g و h تبعا لشفعية الدالة f.
2. ادرس شفعية كلّ من الدالتين g و h.

الدوال التآلفية

53. باختيار معلم للمستوي، مثل بيانيا الدوال التآلفية الآتية والمعرفة على R :

$f : x \mapsto -2x + 3$ ؛ $g : x \mapsto 3x - 5$ ؛

$h : x \mapsto -2x$

$t : x \mapsto \dfrac{2}{3}x + 1$ ؛ $u : x \mapsto 3$

1. عبّر عن $f(x)$ بدلالة x.

54. في المعلم المقابل، نعتبر المستقيمات d_1 ، d_2 ، d_3.
أرفق بكل مستقيم دالته التآلفية.

55. المستوي مزود بمعلم (O, I, J).

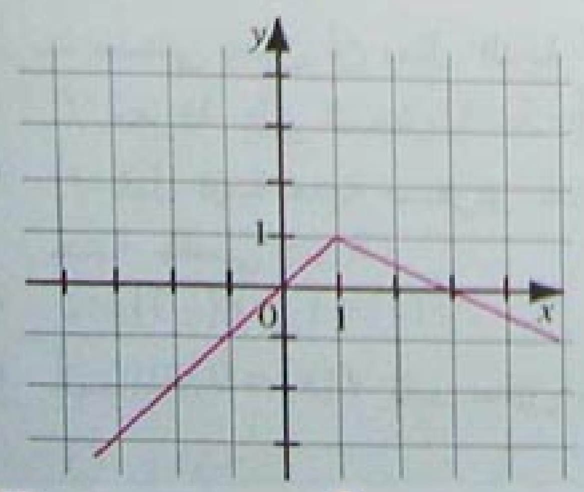
1) عيّن الدالة التآلفية f الممثلة بالمستقيم الذي معامل توجيهه $-2{,}5$ والمار بالنقطة $M(-1;3)$.
2) عيّن الدالة التآلفية g الممثلة في نفس المعلم السابق بالمستقيم الذي يمرّ بالنقطتين $A(1\,;\,2)$ و $B(4\,;\,4)$.
3) أعط، باستعمال التمثيل البياني السابق، قيمة مقربة لحلّ المعادلة $f(x) = g(x)$ في R.
تحقق من ذلك بالحساب.

56. لتكن الدالتان f و g المعرفتان على R بالشكل:
$f(x) = 2x - 3$ و $g(x) = x^2 + 5x - 3$

نسمي C_f و C_g المنحنيين الممثلين لهما في معلم متعامد $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j})$.

1) ما هي طبيعة C_f ؟
2) عيّن، باستعمال حاسبة بيانية، نقاط تقاطع المنحنيين.
3) عيّن، باستعمال حاسبة بيانية، المجالات حيث:
   - $f < g$
   - $f > g$
4) قارن جبريا f و g بحساب عبارة الدالة $f - g$. استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g).

57. f هي الدالة الممثلة كما في الشكل الآتي:

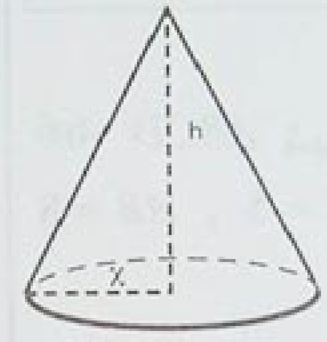


2. أدرس تغيرات f.
حلّ المعادلة $f(x) = -1$.

58. A ، B نقطتان من المحور (O,I) فاصلتاهما -2 ، 3 على الترتيب و M نقطة كيفية من المحور فاصلتها x.
f هي الدالة التي ترفق بكلّ عدد حقيقي x المجموع $AM + BM$.
1. تحقق من أنّ $f(x) = |x+2| + |x-3|$
2. أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
3. مثّل الدالة f.

مسائل

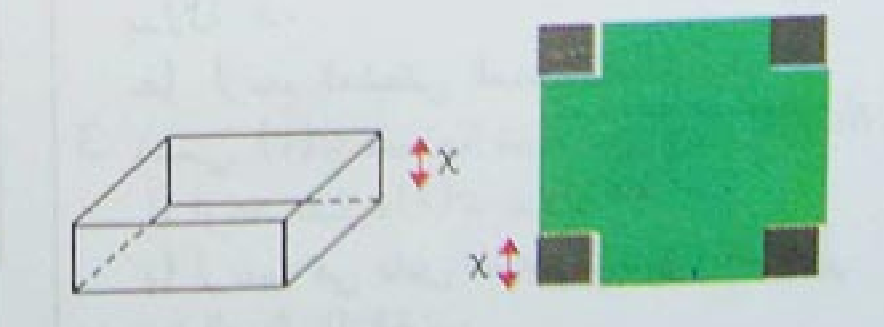
58. حجم مخروط الدوران ارتفاعه h ومساحة قاعدته b هو: $V = \frac{1}{3}bh$



نفرض أنّ h مثبت
ونصف قطر القاعدة x متغيّر
عبّر بدلالة x عن الحجم.

60. ABC مثلث متقايس الأضلاع، ضلعه x و $MNPQ$ مستطيل أحد أضلاعه y.
نسمي f الدالة التي ترفق بالعدد x مساحة المثلث ABC والدالة g التي ترفق بالعدد y مساحة المستطيل $MNPQ$.
1- ما هو مجال تعريف f؟ حسب $f(x)$ بدلالة x.
2- ما هو مجال تعريف g؟ احسب $g(x)$ بدلالة y

61. نريد صنع علبة بطيّ ورقة مقواة مربعة ضلعها $18\ cm$. لذلك نقطع من كلّ ركن للورقة مربعا ضلعه x.



1. أ) احسب حجم العلبة في حالة $x = 2$.
ب) عبّر عن الحجم V بدلالة x. نضع $V = f(x)$.
حـ) ما هي القيم الممكنة للعدد x ؟
استنتج مجموعة تعريف f.
د) ما هو الشرط على x يكون الحجم معدوما ؟
2. أنقل ثمّ أكمل الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$										

باستعمال ورق ميليمتري، علّم في معلم مناسب النقاط ذات الإحداثيات $(x ; f(x))$ التي يتضمنها الجدول السابق، ثمّ ارسم المنحني الناتج.
3. باستعمال المنحني السابق، عيّن أكبر قيمة يبلغها الحجم. ما هي قيمة x المرتبطة بذلك؟

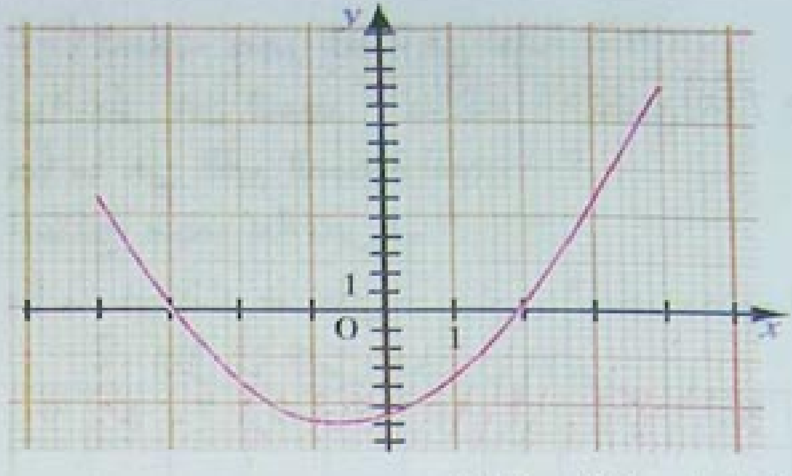
62. M نقطة متحركة على قطعة المستقيم $[AB]$ $(AB = 10\ cm)$. نسمي x الطول AM.
$AMEF$ و $MBCD$ مربعان.

نسمي A مجموع مساحتي المربعين.
1. أنقل ثمّ أكمل الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MB											
A(x)											

2. ما هو التخمين الذي تضعه حول تغيرات A وقيمها الحدية بملاحظة الجدول ؟
3. عين عبارة $A(x)$.
4. تحقق من أنّ: $A(x) = 2(x-5)^2 + 50$
5. عيّن جدول تغيرات الدالة A. استنتج قيمة x التي يكون من أجلها مجموع مساحتي المربعين أصغر ما يمكن.

63. نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $[-4;4]$ بالشكل: $f(x) = x^2 + x - 6$
التمثيل البياني (C_f) لهذه الدّالة معطى كالآتي:



1. بقراءة بيانية، عيّن:

أ) صورة كلّ من 0 و 2.

ب) السوابق الممكنة لكلّ من -7 و -4.

2. حلّ المعادلة $f(x)=10$

3. في هذا السؤال، المطلوب تبرير النتائج بالحساب:

أ) الدالة تبلغ قيمة حدية صغرى عند $-\frac{1}{2}$.

ما هي قيمتها ؟

ب) احسب السوابق الممكنة للعدد -6.

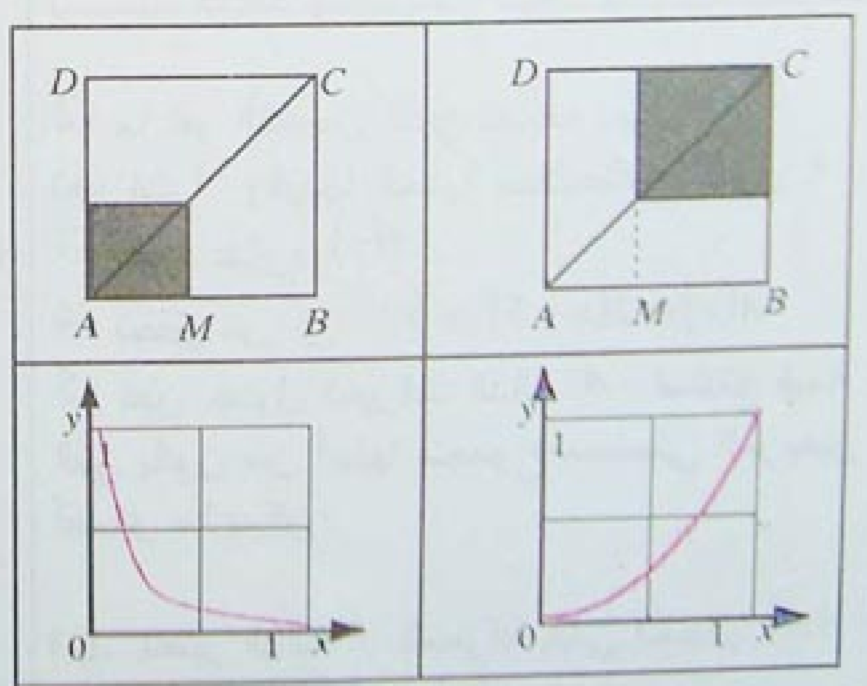
حـ) بيّن أنّ $f(x)=(x-2)(x+3)$

4. حلّ المتراجحة $f(x)\leq 0$. هل النتيجة منسجمة مع المنحني؟

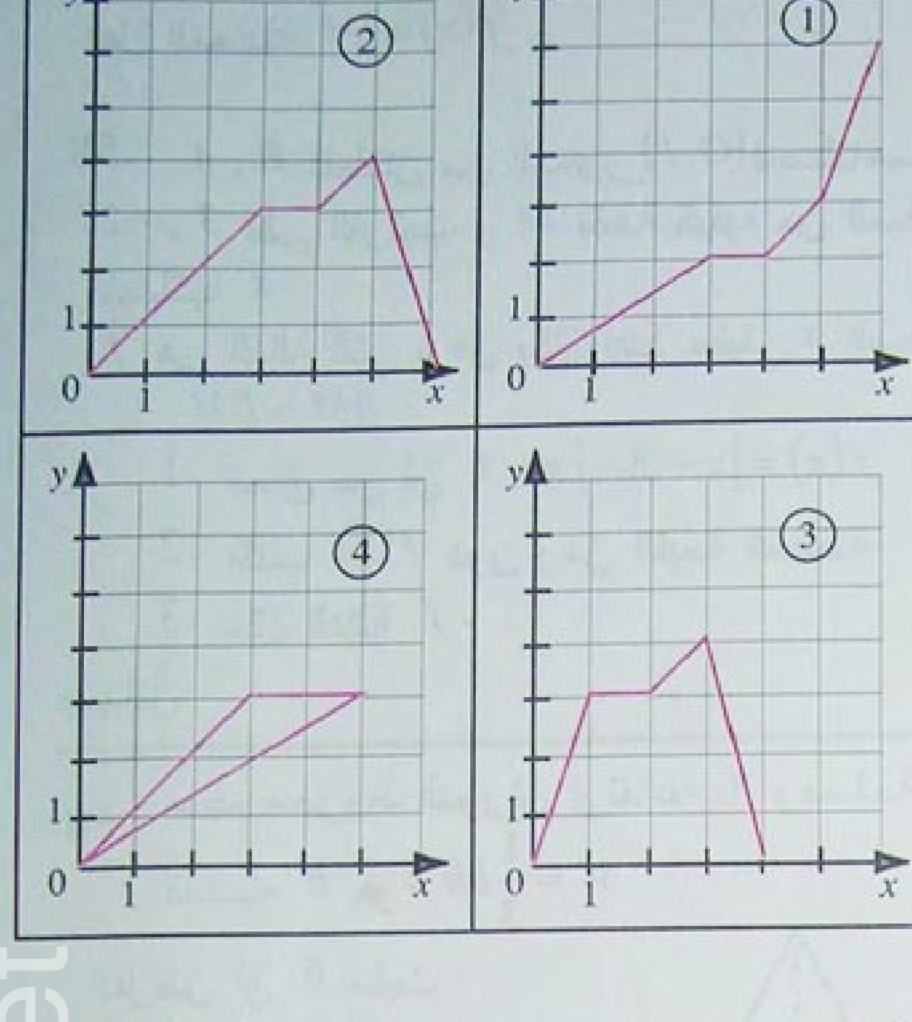
64. في كلّ من الشكلين الآتيين، $ABCD$ مربع ضلعه 1، M نقطة من $[AB]$. نضع $AM=x$.

1. ما هي قيم x الممكنة ؟

2. يمثّل كلّ تمثيل بياني تغيرات المساحة الملونة بدلالة x، أرفق كلّ منها بالشكل الموافق.

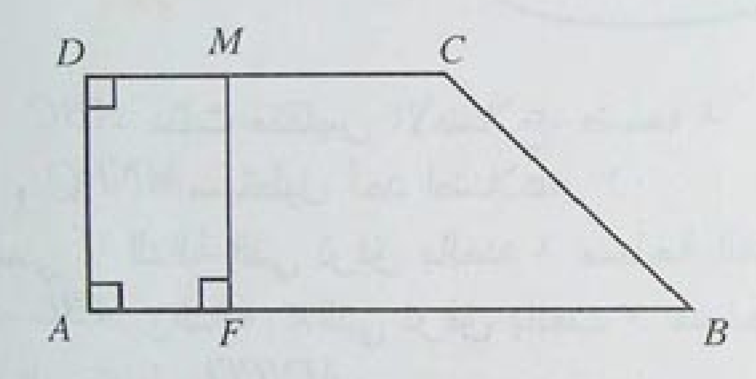


65. من بين التمثيلات البيانية الآتية، بيّن الذي يترجم مسار متجول " انطلق من مسكنه ومشى مدة ثلاث ساعات وتوقف مدة ساعة للاستراحة وواصل السير خلال ساعة أخرى، ليرجع إلى نقطة الانطلاق في الحافلة".



66. $ABCD$ شبه منحرف قائم حيث $(AB)//(CD)$

$AB=8$ ، $DC=5$ ، $AD=4$ ، $B\hat{A}D=90°$



1. احسب مساحة شبه المنحرف $ABCD$.

2. لتكن M نقطة من $[DC]$ ، نضع $DM=x$.

F نقطة تقاطع العمود النازل من M و (AB).

أ) ما هي القيم الممكنة للعدد x ؟

ب) نسمي $f(x)$ مساحة المستطيل $ADMF$. احسب $f(x)$ بدلالة x.

حـ) أرسم المنحني الممثل للدالة f.

3. نسمي $g(x)$ مساحة شبه المنحرف $BCMF$.

أ) أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x.

ب) أرسم، في نفس المعلم السابق، المنحني الممثل للدالة g.

4. حلّ بيانيا المعادلة $f(x)=g(x)$.

67. إناء أسطواني الشكل، ارتفاعه $10\ cm$ ونصف قطر قاعدته $3,5\ cm$.
نملأ الإناء بسائل إلى ارتفاع x. نعرّف هكذا دالة، هي سعة الإناء V بدلالة x.
1. عيّن عبارة $V(x)$.



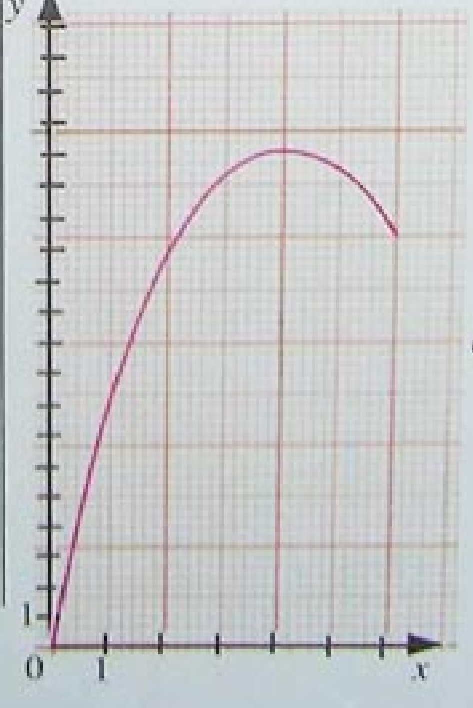
2. أنقل ثم أكمل الجدول الآتي:

x	0	2	4	6	8	10	12
$V(x)$							

3. أنشئ، في معلم مناسب، المنحني الممثل للدالة.

68. $ABCD$ شبه منحرف قائم، قاعدتاه $AD = 8\ cm$ ، $CB = 3\ cm$ وارتفاعه $AB = 5\ cm$.
H نقطة تقاطع العمود النازل من C و (AD).
M نقطة متغيرة من $[AB]$، نضع $AM = x$.
الموازي للمستقيم (AD) المار من M يقطع $[CD]$ في النقطة N و الموازي للمستقيم (AB) المار من N يقطع $[AD]$ في النقطة P.
1. أ) برهن أنّ المثلث CHD قائم ومتقايس الضلعين.
ب) برهن أنّ $AMNP$ مستطيل وأنّ المثلث NPD قائم ومتقايس الضلعين.
2. نسمي $f(x)$ مساحة المستطيل $AMNP$ عندما يتغيّر x في المجال $[0\ ;\ 6]$.
أ) عيّن عبارة $f(x)$ وتحقق أنّ:
$$f(x) = 16 - (x-4)^2$$
ب) أنقل ثمّ أكمل الجدول الآتي:

x	0	2	2,5	3	3,5	4	4,5	6
$f(x)$								



3. المنحني المقابل يمثل الدالة f على المجال $[0\ ;\ 6]$.
أ) ما هي مساحة $AMNP$ عندما $AM = 5$ ؟
ب) ما هو موضع M حيث تكون المساحة أكبر ما يمكن؟
جـ) تحقق من وجود موضعين للنقطة M حيث تكون مساحة المستطيل مساوية $\frac{55}{4}cm^2$.
4. باختيار العبارة المناسبة لـ $f(x)$:
أ) برهن أنّ $f(x) \le 16$.
ب) برهن أن مساحة المستطيل $AMNP$ تساوي $\frac{55}{4}cm^2$ عندما يكون:
$x = \frac{5}{2}$ أو $x = \frac{11}{2}$

69. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل:
$$g(x) = x^2 - x - 1$$
1. احسب، باستعمال حاسبة بيانية، $f(x)$ من أجل كلّ قيم المجال $[-5\ ;5]$ بالخطوة $0,5$.
2. باستعمال المعطيات السابقة، أرسم التمثيل البياني للدالة f على المجال $[-5\ ;5]$.
(الوحدة: $2\ cm$ على محور الفواصل، $2\ cm$ على محور التراتيب).
3. بالاستعانة بالمنحني السابق، عيّن عدد حلول المعادلات:
$f(x) = 5$ ؛ $f(x) = 0$ ؛ $f(x) = -2$ ؛ $f(x) = -1,25$
4. ما هي القيم الحدية الصغرى والعظمى للدالة f على المجال $[-5\ ;5]$ ؟
5. بملاحظة المنحني، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا α في المجال $[1\ ;\ 2]$. احسب $f(1,6)$ و $f(1,7)$.
ماذا تستنتج ؟
6. احسب $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. أعط قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
7. احسب φ^2، $\varphi + 1$، φ^3، $1 + \frac{1}{\varphi}$.
ماذا تستنتج ؟

4

الدوال المرجعية

الكفاءات المستهدفة

- تحديد اتجاه التغير والتمثيل البياني لكل من الدوال : $x \mapsto \sqrt{x}$ ، $x \mapsto \frac{1}{x}$ ، $x \mapsto x^2$.
- استعمال الدوال المرجعية لمقارنة أعداد أو لحصرها.
- توظيف الدوال المرجعية لدراسة بعض الدوال الأخرى.
- استعمال الدوال المرجعية في حل المشكلات.
- معرفة تحويل الدرجة إلى الرديان و الرديان إلى الدرجة .
- تعليم نقطة على الدائرة المثلثية.
- معرفة العددين $\cos x$ و $\sin x$.
- تحديد اتجاه تغير الدالة "جيب تمام" و الدالة "جيب" على مجال معطى.
- تمثيل الدالة "جيب تمام" و الدالة "جيب" على مجال معطى.

نحتاج في الرياضيات إلى وضع أدوات واصطلاحات تساعدنا على بناء مفاهيم رياضية والتعبير عنها وتبليغها. فالبحث عن مربع عدد أو مقلوبه وتعميم ذلك إلى عدة أعداد يؤول إلى إيجاد علاقة بين العدد ومربّعه أو بين العدد ومقلوبه ويمكن التعبير عن كلّ من هاتين العلاقتين بالدالة «مربّع» ودالة المقلوب ومن ثمّ تمثيل ذلك بيانيا، والتعمق أكثر في البحث مثلا عن مقلوب مربعات الأعداد الطبيعية غير المعدومة يؤدي بنا إلى الربط بين هاتين الدالتين مما يعطي دالة جديدة مركبة منهما وهو ما يوحي بأهمية دراسة الدوال المرجعية كدوال أولية تتركب منها بقية الدوال. ويمدنا تاريخ الرياضيات بشواهد كثيرة على أهمية هذه الدوال، منها استخدامها من طرف بعض الرياضيين في حل بعض المعادلات كما هو شأن أبي الفتح عمر بن إبراهيم الخيام النيسابوري المعروف باسم عمر الخيام نسبة إلى حرفة صنع الخيام التي امتهنها في صغره (1048م – 1131م) عندما حلّ المعادلة $x^3 = 2$ ، بطريقتين مختلفتين وظّف في كلّ منهما دوالا مرجعية. ففي الطريقة الأولى اعتمد على الدالة المرجعية $y = x^2$ و الدالة $y = \frac{2}{x}$ التي يمكن اعتبارها دالة المقلوب مضروبة في اثنين، إذ بيّن - بالتعبير الرياضي الحديث - أنّ حل هذه المعادلة هو فاصلة نقطة تقاطع منحنيي هاتين الدالتين. أما في الطريقة الثانية، افترض وجود قطعين مكافئين معادلتاهما: $y = x^2$ و $y^2 = 2x$ ويرجع أصل تسمية «القطع المكافئ» الذي يطلق على منحنى الدالة «مربّع» وتسمية «القطع الزائد» الذي يطلق على منحنى دالة "المقلوب" إلى أبولونيوس (262 ق.م ـ 180 ق.م) الذي أعطى تسمية قطع مكافئ وقطع زائد إلى بعض المقاطع المستوية لمخروط.

نشاط1: الدالة "مربع"

اقترحت سلطات منطقة سياحية بيع أراضي لا تفوق مساحاتها $3600m^2$ وسعر كل متر مربع هو1 وحدة (الوحدة هي مليون سنتيم).

قال حميد لشريكه عثمان :" سعر القطعة الأرضية يزداد كلما يزداد طول ضلعها ! " وأضاف عثمان "...و كذلك ينقص كلما ينقص الضلع ".

يرمز x لطول القطعة الأرضية المربعة (الوحدة هي المتر) و $f(x)$ لسعرها (الوحدة هي مليون سنتيم).

1) عين مجموعة تعريف الدالة f باعتبار شروط النص ثم عبر عن $f(x)$ بدلالة x .

2) لخص أقوال حميد و عثمان باستعمال الدالة f .

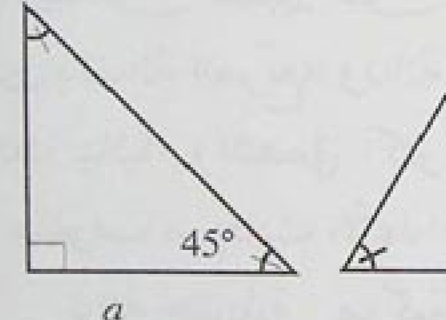
3) اتمم الجدول الآتي:

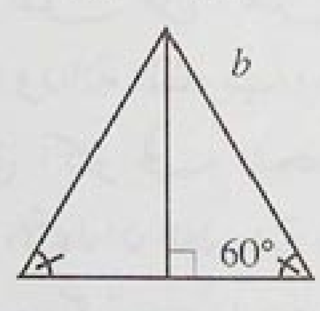
x	0	10	20	30	40	50
$f(x)$						

4) استعمل معلم متعامد$(O;I,J)$ واختر $1cm$ من أجل $10m$ و $2cm$ من أجل 10^9 مليون سنتيم لتمثل بيانيا الدالة f .

نشاط2: جيب تمام وجيب زاوية في مثلث قائم

عيّن جيب تمام و جيب كل من $30°$ و $45°$ و$60°$ باستعمال الشكلين الآتيين :





نشاط3: جيب تمام وجيب زاوية في ربع دائرة

ABC مثلث قائم في A ومتقايس الساقين حيث $AB=AC=1$. (C) هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها AB .

M هي نقطة من القوس الصغيرة $\overset{\frown}{BC}$ حيث $\widehat{MAB}=\alpha$.

1) عين إحداثيي النقطة M في المعلم $(A;B,C)$.

2)نفرض أن M تتحرك من B نحو C .

- كيف يتغير α ؟
- كيف تتغير فاصلة M ؟
- كيف تتغير ترتيبة M ؟



نشاط 4: زوايا و أقواس على الدائرة المثلثية

نعتبر في معلم متعامد و متجانس $(O ;I, J)$ الدائرة (C) التي مركزها O و نصف قطرها 1 .

M نقطة متحركة على (C) كالآتي:

- إما في الاتجاه المباشر أو الموجب (أيعكس اتجاه دوران عقارب الساعة).
- إما في الاتجاه غير المباشر أو السالب (أي اتجاه دوران عقارب الساعة).

تسمى هذه الدائرة : دائرة مثلثية.

نعتبر النقط $I(1 ;0)$ و $J(0 ; 1)$ و $I'(-1 ;0)$ و $J'(0 ;-1)$.

1) ما هو طول الدائرة (C) ؟(يطلب القيمة المضبوطة).

2) ما هو طول القوس الصغيرة $\widehat{IJ}$ ؟ ما هو طول القوس الكبيرة $\widehat{IJ}$ ؟

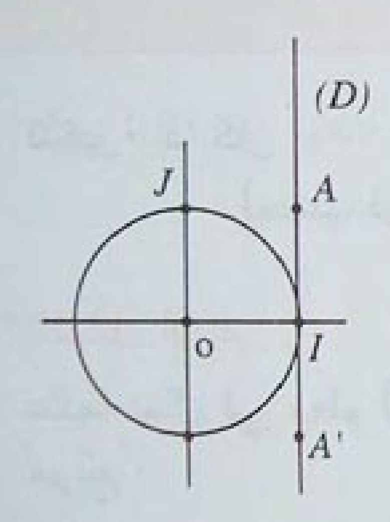
ما هو طول القوس $\widehat{II'}$ ؟

3) S نقطة تقع في ثلث القوس الصغيرة $\widehat{IJ}$. ما هو طول القوس الصغيرة $\widehat{IS}$ ؟

4) N هي النقطة من القوس الصغيرة $\widehat{IJ}$ حيث $\widehat{ION} = 60°$ احسب طول القوس الصغيرة $\widehat{IN}$.

5) نتوجه الآن من I نحو N في الاتجاه غير المباشر. ما هو طول القوس $\widehat{IN}$ ؟ما هو قيس الزاوية $\widehat{ION}$.

نشاط 5: إرفاق كل نقطة من الدائرة المثلثية بعدد حقيقي



نعتبر في المعلم المتعامد و المتجانس $(O ;I, J)$ الدائرة المثلثية (C) و النقطتين $I(1 ;0)$ و $J(0 ; 1)$. (D) هو المماس للدائرة (C) في I .

A هي النقطة من (D) حيث $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{OJ}$.

ندرّج (D) وفق المعلم $(I ; A)$. نسمي A' نظيرة A بالنسبة للنقطة I.

نقوم بلفّ نصف المستقيم $[IA)$ على (C) في الاتجاه المباشر وبلفّ نصف المستقيم $[IA')$ في الاتجاه غير المباشر .

كل نقطة M_i من (D) تنطبق على نقطة m_i من (C) .

1) انشئ النقط m_1 ، m_2 ، m_3 ، m_4 ، m_5 من (C) التي تنطبق عليهاالنقط M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 ، M_5 من (D) التي فواصلها هي ،على الترتيب ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{-\pi}{4}$ ، $\frac{15\pi}{2}$ ، $\frac{7\pi}{3}$ ، $\frac{-13\pi}{6}$.

2) M نقطة من (D) فاصلتها α ، تنطبق على نقطة m من (C).

عين بدلالة α، فواصل نقط أخرى من (D) تنطبق على m .

3) M نقطة من (D) فاصلتها x ، تنطبق على نقطة m من (C).

فاصلة m في المعلم $(O ;I, J)$ تسمى جيب تمام العدد x و نرمز لها $cosx$.

ترتيب m في المعلم $(O ;I, J)$ تسمى جيب العدد x و نرمز لها $sinx$.

أ) عين $\sin 0$ ، $\cos 0$ ، $\sin\frac{\pi}{2}$ ، $\cos\frac{\pi}{2}$ ، $\sin\frac{3\pi}{2}$ ، $\cos\frac{3\pi}{2}$ ، $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ، $\cos(-2\pi)$ ، $\sin 4\pi$ ، $\cos 4\pi$.

ب) عين في كل حالة من الحالات الآتية ثلاث قيم للعدد x :

$\cos x = 0$ ، $\cos x = 1$ ، $\cos x = -1$ ، $\sin x = 0$ ، $\sin x = 1$ ، $\sin x = -1$.

1. الدّالة "مربّع"

تعريف

الدّالة "مربّع" هي الدّالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x مربّعه x^2 .

إذا رمزنا إلى الدّالة مربع بالرّمز f ، نكتب $f(x)=x^2$ أو $x \xrightarrow{f} x^2$.

في الحاسبة اللمسة x^2 تتعلق بالدّالة "مربع"

مثال:

3 و -3 لهما نفس الصّورة بالدّالة مربع: $3^2=(-3)^2=9$

- اتجاه التغيّر

مبرهنة 1

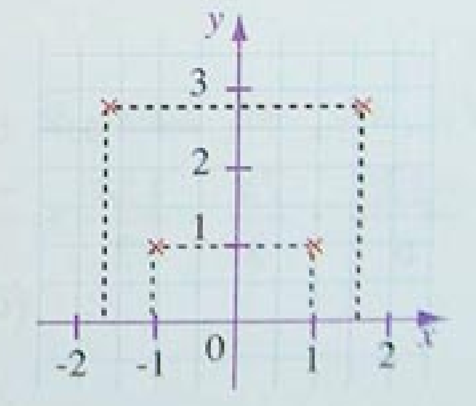
الدّالة مربع متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ ، ومتناقصة تماما على $]-\infty;0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

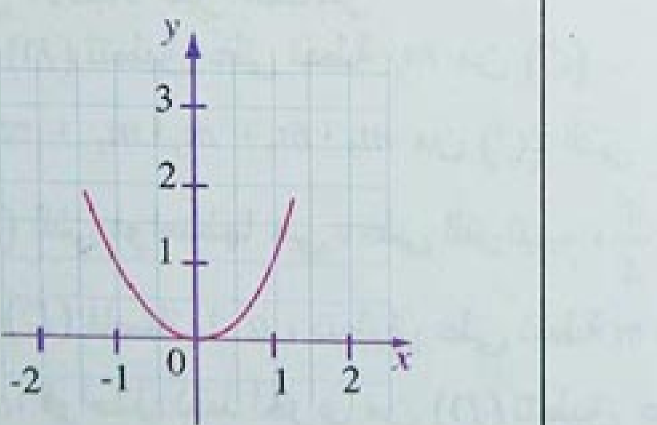
تذكير: إذا كان $0\le x_1<x_2$ فإن $x_1^2<x_2^2$ و إذا كان $x_1<x_2\le 0$ فإن $x_1^2>x_2^2$.
(حسب قواعد ترتيب الأعداد)

- التمثيل البياني

عندما نمثّل في معلم $(O;I,J)$ النقط ذات الإحداثيات $(x;x^2)$ نحصل على المنحنى الممثل للدّالة "مربّع".



تمثيل بعض النّقط من منحنى الدّالة مربع .



(C) هو منحنى الدّالة مربّع
معادلة (C) هي : $y=x^2$
يسمّى (C) قطعا مكافئا ذروته O.

خاصية:

من أجل كلّ عدد حقيقي x، لدينا $(-x)$ عدد حقيقي و $(-x)^2=x^2$ أي $f(-x)=f(x)$.
نستنتج أنّ الدّالة مربّع زوجية.

ملاحظة

في معلم متعامد يكون بيان الدّالة مربّعا متناظرا بالنّسبة إلى محور التّراتيب.

2- الدّالة "مقلوب"

تعريف

الدّالة "مقلوب" هي الدّالة المعرفة على المجموعة $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ، والتي ترفق بكلّ عدد حقيقي x غير معدوم مقلوبه $\frac{1}{x}$.

في الحاسبة اللمسة x^{-1} تتعلق بالدّالة "مقلوب"

إذا رمزنا إلى الدّالة مقلوب بالرّمز f ، نكتب $\frac{1}{x}$ أو $x \overset{f}{\longmapsto}$.

مثال: $f(2)=\frac{1}{2}$ و $f\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{5}{2}$

• إتجاه التغيّر

مبرهنة 2

الدّالة "مقلوب" متناقصة تماما على كلّ من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

الخط المضاعف في الجدول يعني أنّ الدّالة "مقلوب" غير معرّفة عند 0

تذكير : إذا كان $0<x_1<x_2$ فإن $0<\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$

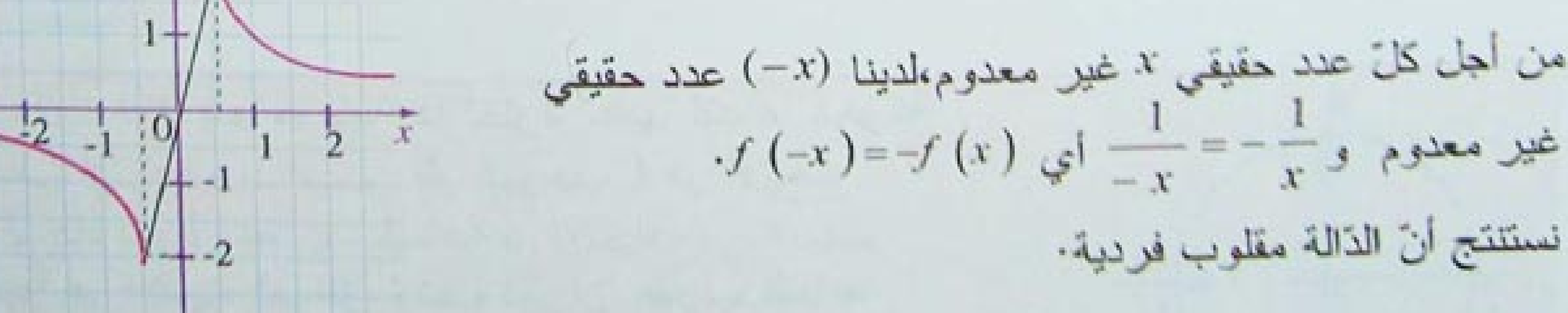
وإذا كان $x_1<x_2<0$ فإن $\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$ (حسب قواعد ترتيب الأعداد)

• التمثيل البياني

بما أنّ 0 ليس له صورة بالدّالة مقلوب ، فإنّ منحنيها لا يقطع محور التّراتيب .
يسمّى المنحنى الممثل للدّالة "مقلوب" قطعا زائدا.



خاصية:



من أجل كلّ عدد حقيقي x غير معدوم،لدينا $(-x)$ عدد حقيقي غير معدوم و $\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$ أي $f(-x)=-f(x)$.

نستنتج أنّ الدّالة مقلوب فردية.

ملاحظة

في كلّ معلم يكون منحنى الدّالة مقلوب متناظرا بالنّسبة إلى مبدأ هذا المعلم.

3. الدّالة "الجذر التربيعي"

تعريف

الدّالة "الجذر التّربيعي" هي الدّالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ والتي ترفق بكلّ عدد حقيقي x جذره التربيعي $\sqrt{x}$.

إذا رمزنا إلى الدالة "الجذر التّربيعي" بالرّمز f ، نكتب $f(x)=\sqrt{x}$ أو $x \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{x}$.

مثال: $f(0,49)=\sqrt{0,49}=0,7$ و $f\left(\frac{7}{9}\right)=\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

في الحاسبة، اللمسة $\sqrt{\ }$ تتعلق بالدالة "الجذر التربيعي"

• إتجاه التغيّر

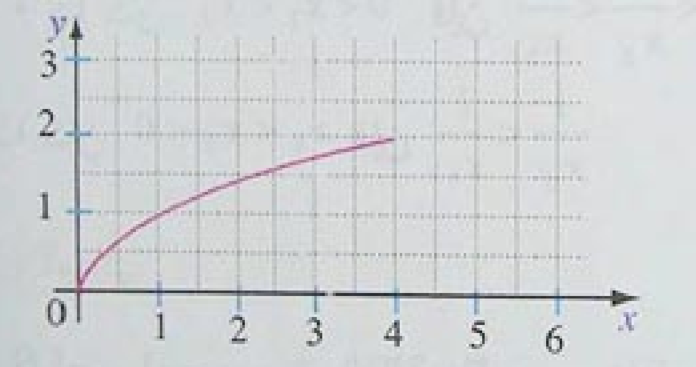
الدّالة "الجذر التّربيعي" متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	↗

برهان x_1 ، x_2 عددان حقيقيان كيفيان من المجال $[0,+\infty[$ حيث $0 \le x_1 < x_2$.

لدينا $\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}=\frac{\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$.

بما أنّ $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>0$ و $x_1-x_2<0$ (لأنّ $x_1<x_2$) فإنّ $\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}<0$ أي $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$، إذن الدالة "الجذر التّربيعي" متزايدة على $[0,+\infty[$.

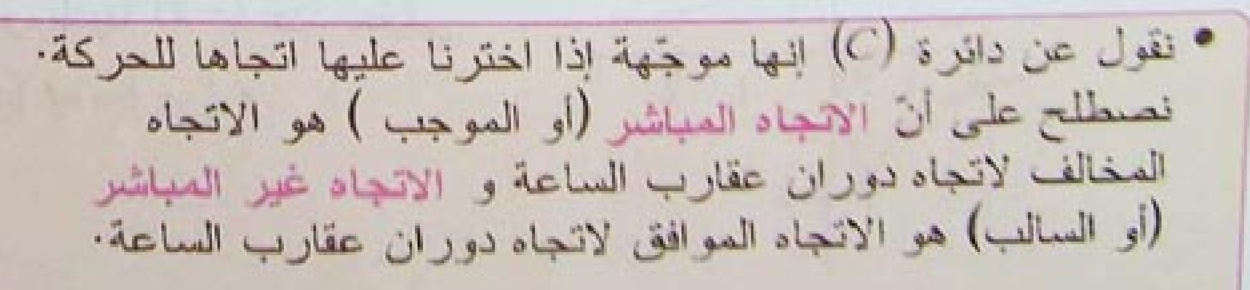


• التمثيل البياني

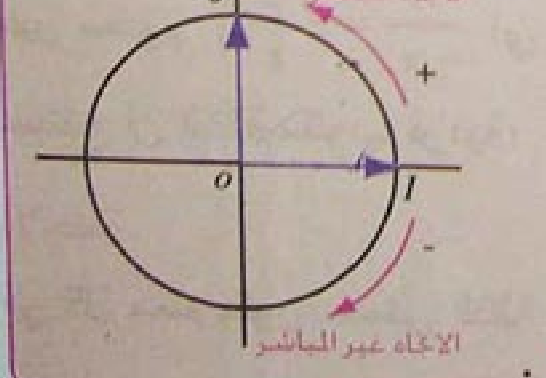
بما أنّ الدالة "الجذر التّربيعي" معرّفة فقط على المجال $[0;+\infty[$ فإنّ منحنيها يقع في الربع الأول من المعلم كما هو موضّح في الشّكل المقابل

4. الدّالة "جيب" ، الدّالة "جيب التّمام"

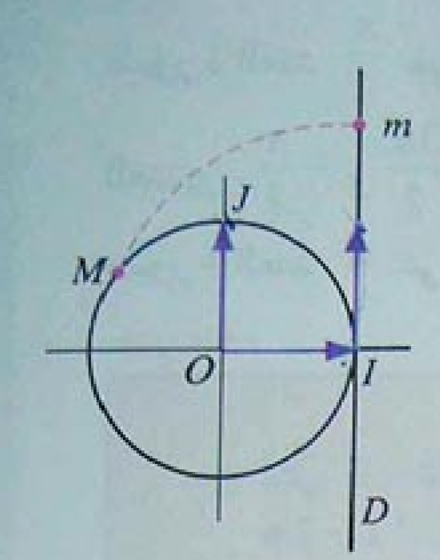
• الدائرة المثلثية



• نقول عن دائرة (C) إنها موجّهة إذا اخترنا عليها اتجاها للحركة.
نصطلح على أنّ **الاتجاه المباشر** (أو الموجب) هو الاتجاه المخالف لاتجاه دوران عقارب الساعة و **الاتجاه غير المباشر** (أو السالب) هو الاتجاه الموافق لاتجاه دوران عقارب الساعة.



• $(O;I,J)$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي.
الدائرة الموجّهة التي مركزها O و نصف قطرها 1 تسمى **دائرة مثلثية** .



لتكن الدّائرة المثلثية (C) في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;I,J)$.

(D) هو المماس للدائرة (C) في I . K هي النقطة من (D) حيث $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{OJ}$

- نرفق بكل عدد حقيقي x النقطة m من (D) التي فاصلتها x في المعلم الخطي $(I;K)$ و "بلف" (D) على (C)، تنطبق النقطة m على نقطة M من (C)
- نعلم أن فاصلة K في المعلم $(I;K)$ هي 1. فعندما "تلف" (D) على (C)، تنطبق K على N من (C).

نعرف 1 راديان بأنه قيس للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{ON})$

- كلّ عدد حقيقي x تقابله نقطة وحيدة M على (C)

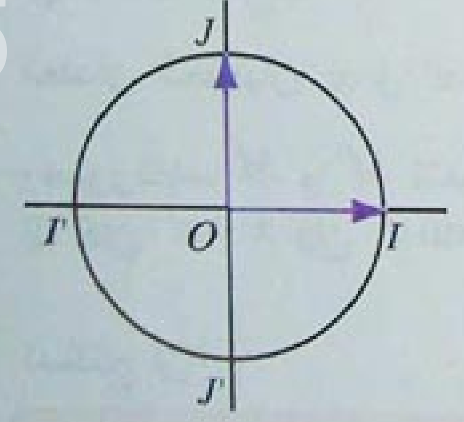
نقول إن M هي صورة x، ونقول كذلك إن x هو قيس للزّاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$.

العدد الحقيقي x يسمى قيسا بالرّاديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$ و نكتب: $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})=x\ \ rad$

ملاحظات:

- ○ طول القوس $\widehat{IM}$ هو طول القطعة $[\mathrm{Im}]$ و هو $|x|$.
- ○ عندما تتحرك m على (D) انطلاقا من I في اتجاه الشعاع $\overrightarrow{IK}$: M تتحرك على (C) في الاتجاه المباشر (هنا x عدد موجب) .
- ○ ندما تتحرك m على (D) انطلاقا من I في الاتجاه المعاكس لاتجاه الشعاع $\overrightarrow{IK}$: M تتحرك على (C) في الاتجاه غير المباشر (هنا x عدد سالب) .
- ○ عبّر عن قيس القوس $\widehat{IM}$ و قيس الزّاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$ بنفس العدد الحقيقي x .
- ○ لّ موضع للنقطة M من الدّائرة المثلثية (C) يقابله لانهاية من الأعداد الحقيقية x من الشكل $x=\alpha+\ k(2\pi)$ مع k صحيح نسبي ، حيث: $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})=\alpha\ \ rad$.

مثال



(C) دائرة مثلثية ،إذن نصف قطرها r هو 1 ومحيطها $2\pi r$ أي 2π.

- صورّ النقط J ، I' ، J' هي على الترتيب $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$.
- للعددين $\frac{-\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ نفس الصورة التي هي J' .
- للأعداد 0 ، 2π ، -2π نفس الصورة التي هي I .
- $\frac{\pi}{2}$ هو قيس للزاوية $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$: $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})=\frac{\pi}{2}rad$.

تعريف

x عدد حقيقي. M النقطة المرفقة بالعدد x من الدائرة المثلثية .

في المعلم $(O;I,J)$:

- نسمّي جيب تمام العدد الحقيقي x، فاصلة النقطة M ونرمز إليه بالرّمز $\cos x$.
  الدالة $\cos$ هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد $\cos x$.
- نسمّي جيب العدد الحقيقي x، ترتيب النقطة M ونرمز إليه بالرّمز $\sin x$.
  الدالة $\sin$ هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد $\sin x$.

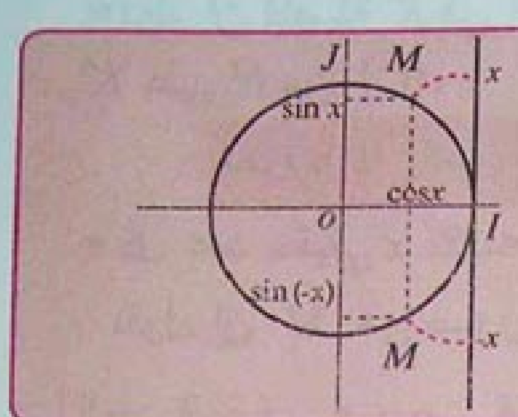
أمثلة

صورة العدد $\frac{\pi}{2}$ هي النقطة $J(0,1)$ إذن $\cos\frac{\pi}{2}=0$ و $\sin\frac{\pi}{2}=1$.

للعددين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ نفس الصورة $J'(0,-1)$ إذن $\cos\frac{3\pi}{2}=\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)=0$ و $\sin\frac{3\pi}{2}=\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)=-1$

صورة العدد π هي النقطة $I'(-1,0)$ إذن $\cos\pi=-1$ و $\sin\pi=0$.

مبرهنة



من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

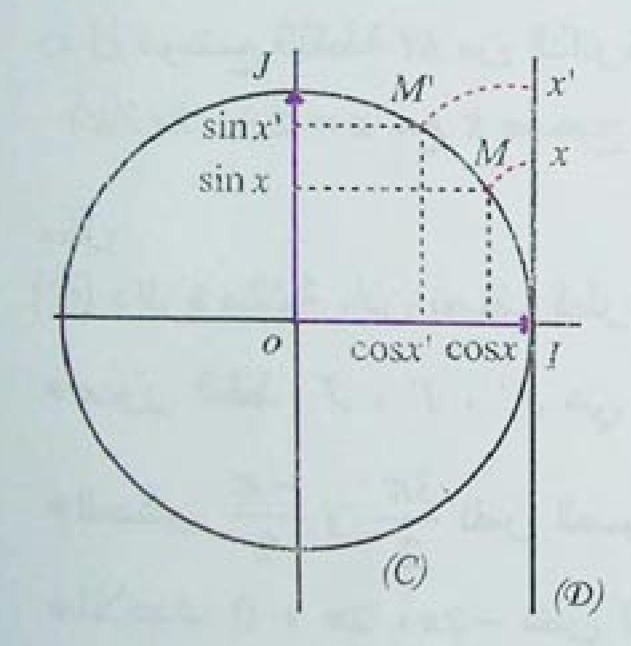
- $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ و $-1\leq \sin x\leq 1$ و $-1\leq \cos x\leq 1$
- $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

أي أنّ الدّالة جيب تمام زوجية و الدالة جيب فردية.

برهان

x عدد حقيقي كيفي. $\cos x$ و $\sin x$ هما إحداثيا نقطة M من الدائرة المثلثية (مركزها O ونصف قطرها 1).

- لدينا $OM^2=1$ إذن $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.
بما أن $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ فإن $\cos^2 x\leq 1$ لأن $\sin^2 x\geq 0$ و بالتالي $-1\leq \cos x\leq 1$.
بنفس الكيفية نبرهن على أنّ $-1\leq \sin x\leq 1$.
- الصّورتان M و M' للعددين x و $-x$، على الترتيب متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل، إذن النقطتين M و M' نفس الفاصلة وترتيبان متعاكسان.



- اتجاه تغيّر الدّالتين "جيب تمام" و "جيب" على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

خاصية 1

في الشكل المقابل :

العددان الحقيقيان x و x' ينتميان إلى المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

وصورتاهما M و M' تتغيران على ربع الدائرة من I إلى J

إذا كان $x<x'$ فإن $\sin x<\sin x'$ و $\cos x>\cos x'$.

نستنتج أنّ:

- الدالة cos متناقصة تماما على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ • الدالة sin متزايدة تماما على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

خاصية 2

في الشكل المقابل :

العددان الحقيقيان x و x' ينتميان إلى المجال $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ و صورتاهما M و M' تتغيران على ربع الدّائرة من J إلى I' .



إذا كان $x < x'$ فإن $\sin x > \sin x'$ و $\cos x > \cos x'$

نستنتج :

• الدالة cos متناقصة تمام على المجال $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ • الدالة sin متناقصة تماما على المجال]

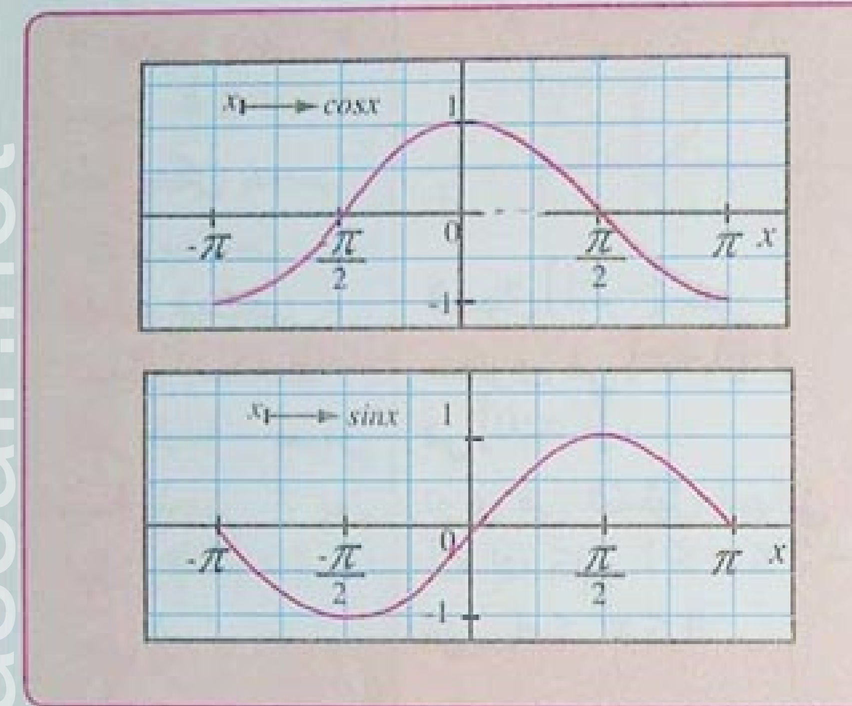
• جدول تغيّرات الدّالتين "جيب تمام" و "جيب" على المجال $[0\ ;\ \pi]$

نستنتج من الخاصية1 و من الخاصية2 :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1 ↘	0	↘ -1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0 ↗	1	↘ 0

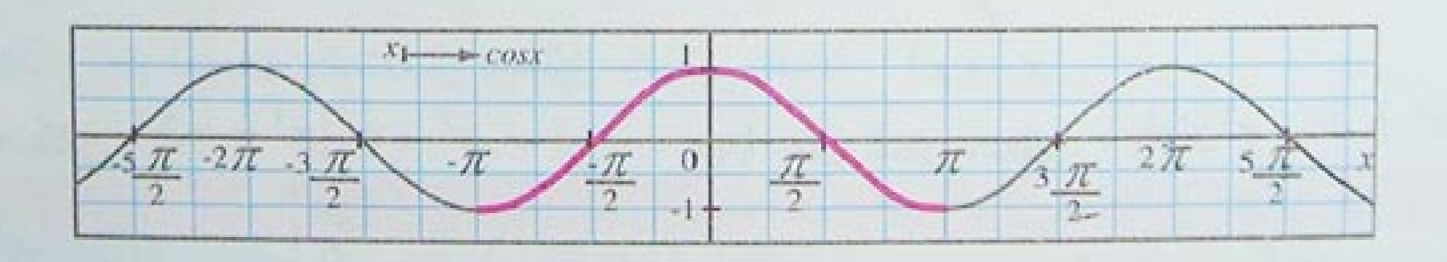
• التمثيل البياني

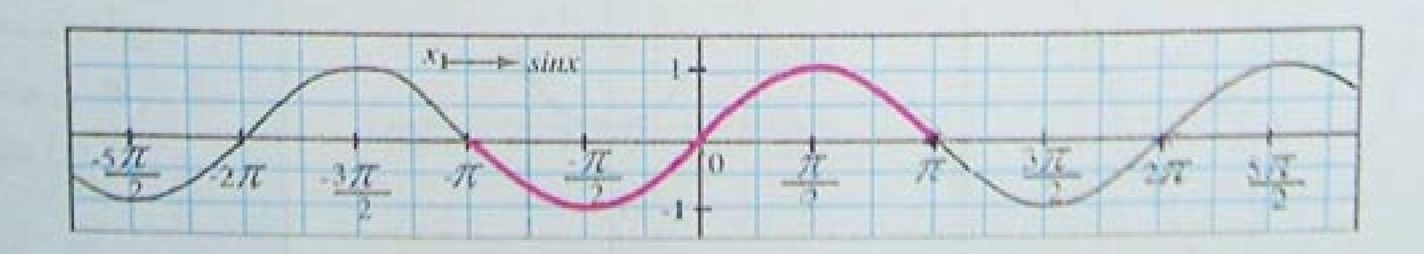


• ننشئ التمثيل البياني للدالة cos على المجال $[0;\pi]$ انطلاقا من جدول تغيراتها.
نتمم هذا الرسم على $[-\pi;0]$ بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأن الدالة cos زوجية .

• ننشئ التمثيل البياني للدالة sin على المجال $[0;\pi]$ انطلاقا من جدول تغيراتها.
نتمم هذا الرسم على $[-\pi;0]$ بالتناظر بالنسبة للمبدأ لأن الدالة sin فردية .

ملاحظة: بيان الدالة "جيب تمام" و بيان الدالة "جيب" على $\mathbb{R}$ هما





لاحظ انه يمكن استنتاج أي جزء من بيان الدالة "جيب تمام" (أو الدالة "جيب") من الج
بالأحمر وذلك بانجاز "دوريا" مثيلات له لأن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $\cos x = (2\pi$
و $(\sin(x+2\pi)=\sin x)$ نقول إنّ الدالة "جيب تمام" (الدالة "جيب" أيضا) دورية ودورها 9π

طرائق وتمارين محلولة

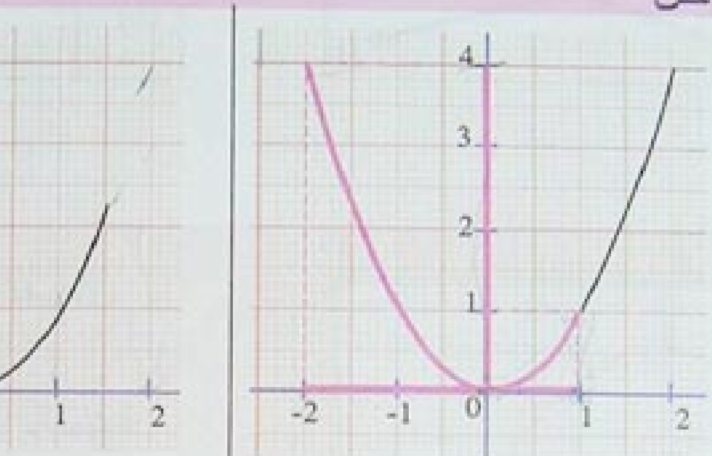
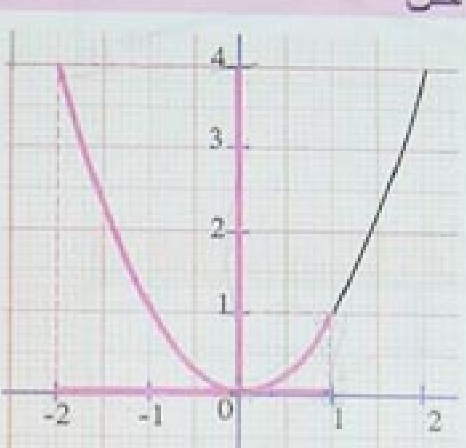
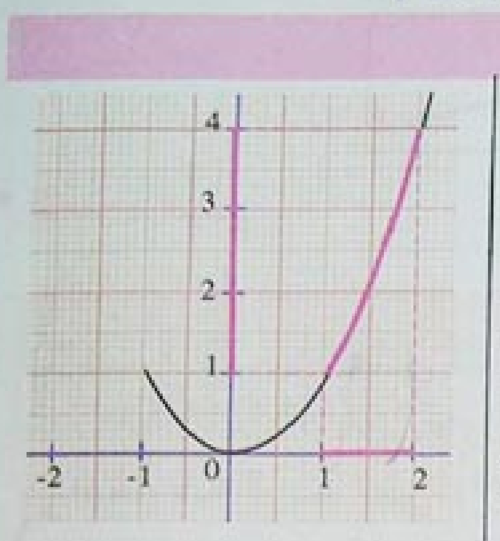
1. الدّالة "مربّع"

• **إيجاد حصر للعدد x^2 انطلاقا من حصر العدد x**

جد حصرا للعدد x^2 في كل حالة من الحالات الآتية:

أ) $-2 \leq x \leq 1$ ؛ ب) $-2 \leq x \leq -1$ ؛ جـ) $1 \leq x \leq 2$



تعاليق	حلّ		
• لاحظ أنّ $(-x)^2$ و $-x^2$ مختلفان. • عندما يعطى x بحيث $a \leq x \leq b$ فإنه يمكن حصر x^2 باستعمال القطع المكافئ الممثل بملاحظة أكبر قيمة وأصغر قيمة للعدد x^2 من أجل $x \in [a,b]$.	  المجال $[-2;1]$ غير محتوى في $[0,+\infty[$ أو في $]-\infty;0]$. نرى في التمثيل البياني أنه إذا كان $-2 \leq x \leq 1$ فإن $0 \leq x^2 \leq 4$	دالة المربع متناقصة على $]-\infty;0]$. المجال $[-2;-1]$ محتوى في $]-\infty,0]$ ومنه: إذا كان $-2 \leq x \leq -1$ فإن $(-1)^2 \leq x^2 \leq (-2)^2$ أي $1 \leq x^2 \leq 4$.	 دالة المربع متزايدة على $[0;+\infty[$. المجال $[1;2]$ محتوى في $[0;+\infty[$ و منه : إذا كان $1 \leq x \leq 2$ فإن $1^2 \leq x^2 \leq 2^2$ أي $1 \leq x^2 \leq 4$.

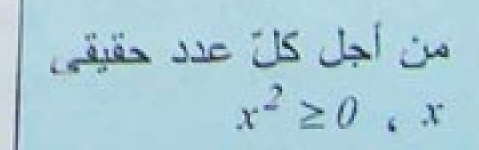
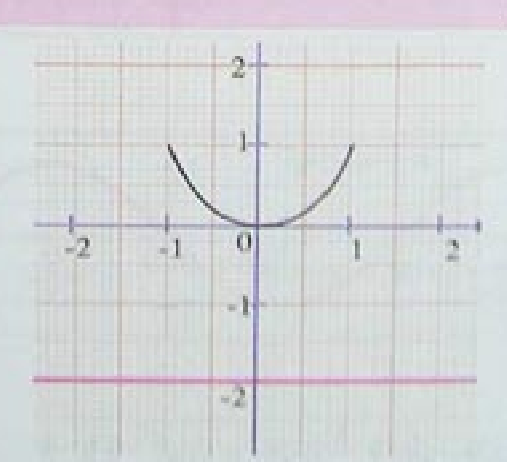
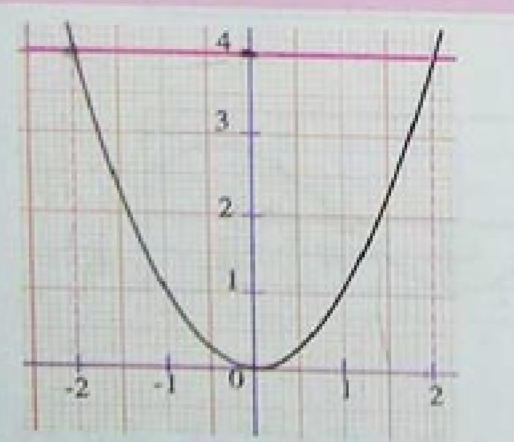
طريقة

يمكن حصر مربع عدد حقيقي معطى باستعمال اتجاه تغير الدالة مربع أوباستغلال تمثيلها البياني.

• **حل معادلات و متراجحات باستعمال التمثيل البياني للدالة** $f: x \mapsto x^2$

أ) حل المعادلتين : $x^2 = -2$ ، $x^2 = 4$.   ب) حل المتراجحتين : $x^2 \leq 4$ ، $x^2 \geq 4$.

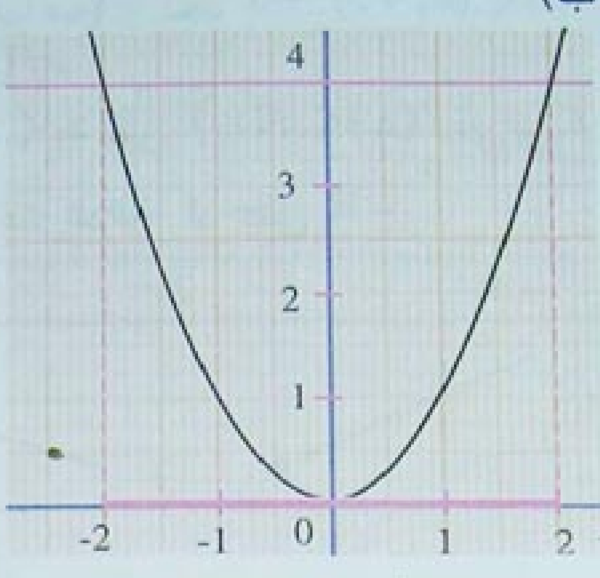


تعاليق	حلّ	
عندما نحلّ معادلة بيانيا، نتحصل في أغلب الأحيان على قيم مقربة للحلول.  من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $x^2 \geq 0$	أ)  لا يوجد أي عدد حقيقي x حيث $x^2 = -2$. مجموعة حلول المعادلة هي $\varnothing$ (أي المجموعة الخالية).	 يوجد عددان يحققان $x^2 = 4$ و هما 2 و -2. مجموعة حلول المعادلة $x^2 = 4$ هي $\{-2,2\}$

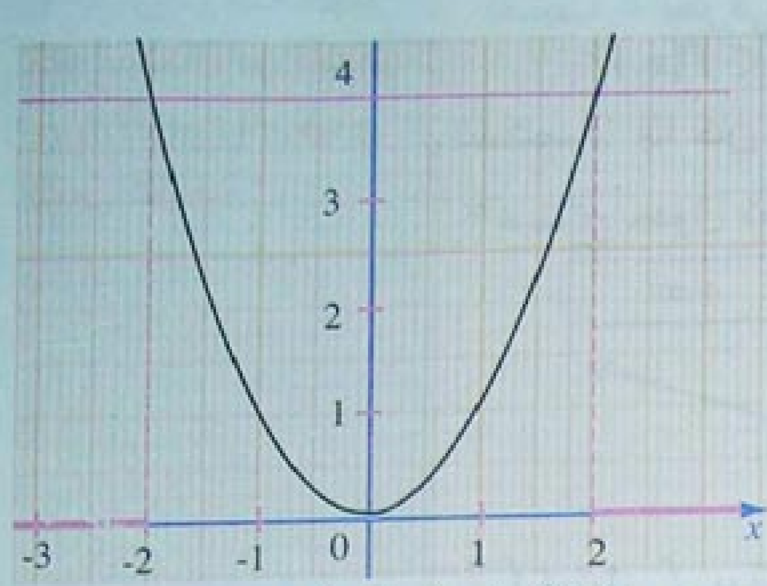


ب)

نستغل الوضع النسبي للمنحنى الممثل للدالة "مربع" والمستقيم الذي معادلته $y = 4$



مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $x^2 \le 4$ هي $[-2;2]$ أي مجموعة حلول المتراجحة $x^2 \le 4$ هي $[-2;2]$.



مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $x^2 \ge 4$ هي $]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$ أي: مجموعة حلول المتراجحة $x^2 \ge 4$ هي $]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$.

طريقة

لحلّ المعادلة $x^2 = m$ بيانيا:

ننشئ التمثيل البياني (C) للدالة f حيث $f(x) = x^2$ ، والمستقيم (D) الذي معادلته $y = m$.حلول المعادلة في حالة وجودها،هي فواصل نقط تقاطع (C) و (D).

- **توظيف الدّالة مربّع لدراسة اتجاه تغيّر الدّالة $x \overset{f}{\mapsto} (x+a)^2 + b$: وتمثيلها بيانيا**

ادرس اتجاه تغيّر الدالة $x \overset{f}{\mapsto} (x+2)^2 + 3$: ثم مثّلها بيانيا.

حلّ	تعاليق

1) دراسة اتجاه تغيّر f

- الدالة التآلفية $x \mapsto x+2$ متزايدة و سالبة في المجال $]-\infty;-2]$ و متزايدة و موجبة في المجال $[-2;+\infty[$.

- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f في الجال $]-\infty;-2]$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث $x_1 < x_2 < -2$ ...(أ) .

نضيف 2 لأطراف (أ) و نجد $x_1 + 2 < x_2 + 2 < 0$

إذن $(x_1+2)^2 > (x_2+2)^2$ ...(ا ا) لأن الدّالة مربع متناقصة على $]-\infty;0]$ و $]-\infty;-2] \subset]-\infty;0]$.

نضيف 3 لطرفي (ا ا) و نجد $(x_1+2)^2 + 3 > (x_2+2)^2 + 3$ أي $f(x_1) > f(x_2)$.

الخلاصة : إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) > f(x_2)$ أي f متناقصة على $]-\infty,-2]$.

- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f في الجال $[-2;+\infty[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث $-2 < x_1 < x_2$ ...(ب)

نضيف 2 لأطراف (ب) و نجد $0 < x_1 + 2 < x_2 + 2$

إذن $(x_1+2)^2 < (x_2+2)^2$ ...(ب ب) لأن الدّالة مربع متزايدة على $[0;+\infty[$.

تعاليق:

- لاحظ أنّ القيمة -2 التي تعدم المقدار $x+2$ هي القيمة التي تقسم $\mathbb{R}$ إلى المجالين المعتمدين في هذه الدراسة.

- لاحظ أيضا أنّ إضافة العدد 3 لا يغيّر من اتجاه المتباينات المستعملة.

• يمكن دراسة اتجاه تغيّر الدوال من الشكل $x \to m(x+a)^2+b$ بنفس الكيفية.

نضيف 3 لطرفي (ب ب) و نجد $(x_1+2)^2+3<(x_2+2)^2+3$ أي $f(x_1)<f(x_2)$.

الخلاصة: إذا كان $x_1<x_2$ فإن $f(x_1)<f(x_2)$ أي أن f متزايدة على $[-2;+\infty[$.

• نستنتج جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$:

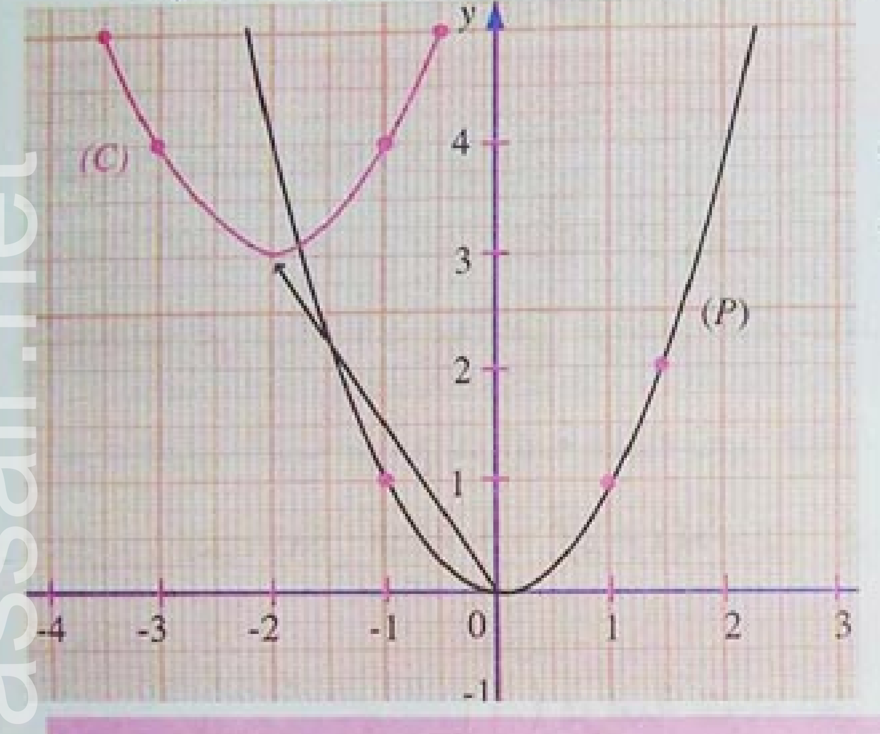
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f	↘	3	↗

2) تمثيل f بيانيا

نسمي (C) التمثيل البياني للدالة f و (P) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto x^2$:

النقطة $M(x,y)$ تنتمي إلى (C) إذا و فقط إذا كان $y=(x+2)^2+3$ أي $y-3=(x+2)^2$.

النقطة $N(x+2,y-3)$ تنتمي إلى القطع المكافئ (P) إذن نمر من (P) إلى (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{V}(-2,3)$.



• يمكن استنتاج جدول تغيرات الدالة f انطلاقا من تمثيلها البياني (C).

طريقة

لدراسة تغيرات الدالة $x \overset{f}{\mapsto} (x+a)^2+b$.

• نحدّد اتجاه تغيّر الدالة التآلفية $x \mapsto x+a$ و إشارتها على المجالين $]-\infty;-a]$ و $[-a;+\infty[$.

• نحدّد اتجاه تغيّر الدالة $x \mapsto (x+a)^2$ على المجالين $]-\infty;-a]$ و $[-a;+\infty[$ ثم نستنتج جدول تغيّرات الدالة f.

يمكن تمثيل f بيانيا كالآتي:

(C) هو التمثيل البيانى للدالة f و (P) هو القطع المكافئ الذي يمثل الدّالة مربع.

• نبين ان نقطة $M(x,y)$ تنتمى إلى (C) إذا و فقط إذا كانت النقطة $N(x+a,y-b)$ تنتمى إلى (P).

• نعين شعاع الانسحاب الذي يسمح بالمرور من (P) إلى (C) و هكذا نستنتج إنشاء (C).

إعادة استثمار

أ) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $x \mapsto -2(x-3)^2+1$ ، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $x \mapsto 2(x-3)^2+1$.

ب) خمّن نتيجة تعطى فيها اتجاه تغيّر الدّالة $x \mapsto m(x-3)^2+1$ ؟ ثمّ تحقق من صحتها.

جـ) بصفة عامّة خمّن اتجاه تغيّر الدّالة $x \mapsto a(x+b)^2+c$ حيث a,b,c أعداد حقيقية و غير معدومة.
برهن صحة المخمّنة التى وضعتها.

2 الدّالة "مقلوب"

• حصر $\frac{1}{x}$.

ماذا يمكن أن نستنتج فيما يخص حصر $\frac{1}{x}$ في كل من الحالتين : أ) $x \le -\frac{1}{2}$ ، ب) $0 < x \le 2$ ؟



تعاليق

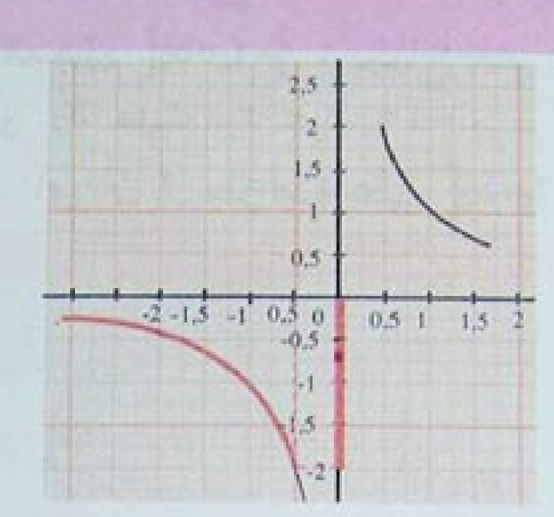
• إذاكان: $a \ge b > 0$

فإن : $0 < \frac{1}{a} \le \frac{1}{b}$

• إذاكان: $0 > a \ge b$

فإن : $\frac{1}{a} \le \frac{1}{b} < 0$

حل



المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ محتواة في $]-\infty;0[$

و الدّالة مقلوب متناقصة على $]-\infty;0[$

إذا كان $x \le -\frac{1}{2}$ فإن $\frac{1}{x} \ge -2$ أي $-2 \le \frac{1}{x} < 0$.

المجال $]0;2]$ محتواة في $]0;+\infty[$

و الدّالة مقلوب متناقصة على $]0;+\infty[$.

إذا كان $x \le 2$ فإن $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{2}$.

طريقة

لمقارنة مقلوبات أعداد حقيقية لها نفس الإشارة، يمكن استعمال تناقص الدّالة مقلوب على $]-\infty,0[$ أو على $]0;+\infty[$.

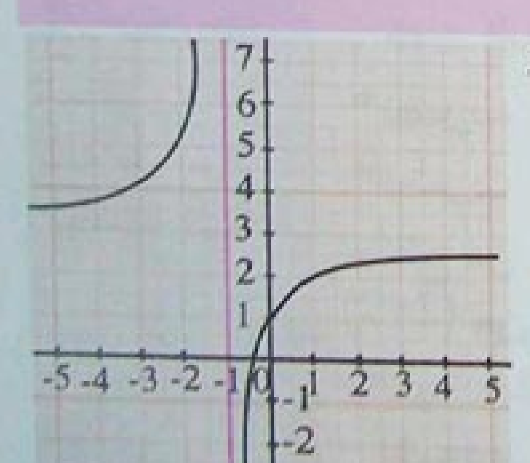
• دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $f : x \mapsto a + \frac{b}{x+c}$

ادرس تغيرات الدالة $f : x \mapsto 3 - \frac{2}{x+1}$.

تعاليق

لتخمين تغيرات f يمكن استخدام الحاسبة البيانية أو البرمجية المناسبة

حلّ



1) الدالة f تكون معرفة من أجل $x \ne -1$ إذن مجموعة تعريفها هي $\mathbb{R}$ ماعدا -1 أي $]-\infty;-1[\cup]-1,+\infty[$.

2) تخمين تغيرات الدالة f :

يظهر ان f متزايدة على $]-\infty;-1[$ و متزايدة على $]-1;+\infty[$.

3) لنبرهن المخمّنة في المجال $]-\infty;-1[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان ينتميان إلى $]-\infty;-1[$ و حيث $x_1 < x_2 < -1$ ... (i)

• نضيف 1 لطرفي (i) و نجد $x_1 + 1 < x_2 + 1 < 0$.

العددان $x_1 + 1$ و $x_2 + 1$ سالبان تماما إذن $\frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1}$ ... (ii) لأن الدّالة مقلوب متناقصة على $]-\infty;0[$.

• نضرب طرفي (ii) في -2 و نجد $\frac{-2}{x_2+1}<\frac{-2}{x_1+1}$ ... (iii) .

• نضيف 3 لطرفي (iii) ونجد $3-\frac{2}{x_2+1}<3-\frac{2}{x_1+1}$ أي $f(x_2)<f(x_1)$

• الخلاصة: إذا كان $x_2<x_1$ فإن $f(x_2)<f(x_1)$ إذن f متزايدة على $]-\infty,-1[$.

4) نبرهن المخمنة في المجال $]-1,+\infty[$: بإتباع نفس الخطوات ونجد ان من أجل كل x_1 و x_2 حيث $-1<x_1<x_2$.
لدينا $f(x_1)<f(x_2)$ أي أن f متزايدة على $]-1,+\infty[$.

طريقة

لدراسة تغيرات الدالة $x\overset{f}{\mapsto}a+\frac{b}{x+c}$:

• نعين مجموعة تعريف الدالة f : نجد $]-\infty,-c[\cup]-c,+\infty[$.
• نخمّن النتيجة .
• نبرهن المخمّنة باستعمال خواص المتباينات واتجاه تغيّر الدّالة مقلوب .

• مقارنة x و x^2 و x^3 و $\sqrt{x}$ من أجل $x\geq 0$

قارن بين الأعداد x و x^2 و x^3 و $\sqrt{x}$ من أجل $x\geq 0$.

حلّ

الدوال $x\overset{f}{\mapsto}x$ ؛ و $x\overset{g}{\mapsto}x^2$ ؛ و $x\overset{h}{\mapsto}x^3$ ؛ معرفة على $\mathbb{R}$ و الدالة $x\overset{k}{\mapsto}\sqrt{x}$ ؛ معرفة على $[0,+\infty[$.

1) تخمين النتيجة: نلاحظ في الرسم أنّ:
▪ $x^3\leq x^2\leq x\leq\sqrt{x}$ من أجل $x\in[0,1]$.
▪ $\sqrt{x}\leq x\leq x^2\leq x^3$ من أجل $x\in[1,+\infty[$.

2) برهان المخمنة :
(2-1) من أجل $0\leq x\leq 1$ ...(I) :

• لدينا $\sqrt{x}\leq 1$ لأن دالة الجذر التربيعي متزايدة ،نضرب طرفي هذه المتباينة في العدد الموجب $\sqrt{x}$ و نجد $(\sqrt{x})^2\leq\sqrt{x}$ أي $x\leq\sqrt{x}$ ...(II) .
• نضرب أطراف (I) في العدد الموجب x ونجد $0\leq x^2\leq x$ ...(III) .
• نضرب أطراف (III) في العدد الموجب x ونجد $0\leq x^3\leq x^2$ ...(IIII) .
نستنتج من (II) و(III) و(IIII) ان $0\leq x^3\leq x^2\leq x\leq\sqrt{x}$.

(2-2) من أجل $x\geq 1$ ... (i):
• لدينا $\sqrt{x}\geq 1$ لأن دالة الجذر التربيعي متزايدة ، نضرب طرفي هذه المتباينة في العدد الموجب $\sqrt{x}$ و نجد $x\geq\sqrt{x}$ ...(ii).
• نضرب طرفي (i) في العدد الموجب x ونجد $x^2\geq x$ ...(iii) .
• نضرب طرفي (iii) في العدد الموجب x ونجد $x^3\geq x^2$ ...(iiii)
نستنتج من (ii) و(iii) و(iiii) ان $x^3\geq x^2\geq x\geq\sqrt{x}$ أي $\sqrt{x}\leq x\leq x^2\leq x^3$.

تعاليق

لتخمين نتيجة لمقارنة الأعداد x و x^2 و x^3 و $\sqrt{x}$: يمكن استغلال منحنيات الدوال f ، g ، h و k و نتحصل على هذه المنحنيات مستفيدين في ذلك مما توفره الحاسبة البيانية

طريقة

لمقارنة الأعداد x و x^2 و x^3 و $\sqrt{x}$:
– نخمن النتيجة بواسطة الحاسبة البيانية أو بواسطة برمجية.
– نستعمل قواعد الترتيب أو تغيرات دوال مرجعية.

3. الدالتان "جيب التمام" و"جيب"

• تحويل الرديان إلى الدرجة و الدرجة إلى الرديان

$\frac{3\pi}{4}rad$ و $36°$ قيسان لزاويتين. عين قيسا للزاوية الأولى بالدرجة وعين قيسا للزاوية الثانية بالرّاديان.

راديان	π	x	$\frac{3\pi}{4}$
درجة	180	36	y

حلّ

نعلم أنّ $\pi rad = 180°$. لإنجاز هذه التحويلات،يمكن استعمال جدول التناسبية. $x = \frac{\pi}{180}\times 36 = \frac{\pi}{5}$ و $y = \frac{180}{\pi}\times\frac{3\pi}{4} = 135$

راديان	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
درجة	36	135	180

تعاليق

• لاحظ في جدول التناسبية :

$$\frac{\frac{\pi}{5}}{36} = \frac{\frac{3\pi}{4}}{135} = \frac{\pi}{180}$$

طريقة

التحويل من وإلى الدرجة والرّديان تتم باستعمال التناسبية و $\pi rad = 180°$.

• وضع نقط على الدائرة المثلثية

أ) ضع على الدائرة المثلثية النقط A و B و C التي صورها $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$ على الترتيب.

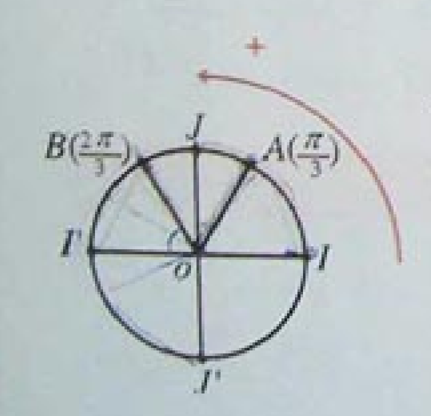
ب) جد عددا يختلف عن $\frac{\pi}{3}$ و صورته A .

جـ) ضع على الدائرة المثلثية النقطة E التي صورتها $\frac{197\pi}{4}$ ثم النقطة F التي صورتها $-\frac{35\pi}{4}$.

حلّ

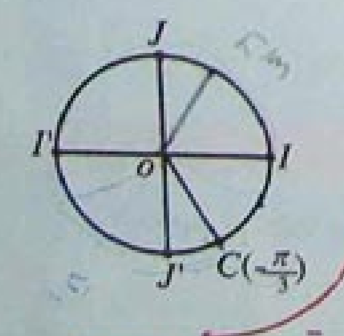
نتصور أنّ نقطة M تتحرك على الدائرة المثلثية منطلقة من النقطة $I(1,0)$.
النقط A و B و C هي وضعيات مختلفة للنقطة M .

أ) $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ عددان موجبان إذن M تتحرك في الاتجاه المباشر.
لتحديد الوضعية A :
ننشئ المثلث المتقايس الأضلاع IOA بالمدور.



لتحديد الوضعية B : ننقل القوس $\widehat{IA}$ مرتين.

$-\frac{\pi}{3}$ عدد سالب إذن M تتحرك في الاتجاه غير المباشر.
لتحديد الوضعية C : ننشئ المثلث المتقايس الأضلاع IOC بالمدور.



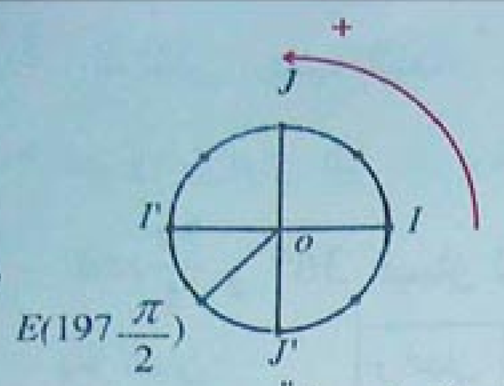
ب)لإيجاد عدد آخر يكون صورة للنقطة A نضيف 2π للعدد $\frac{\pi}{3}$.

A هي صورة $\frac{\pi}{3}$ و كذلك صورة $\frac{\pi}{3}+2\pi$ أي $\frac{7\pi}{3}$.

تعاليق

A هي صورة العدد الحقيقي x . إذا تحركت A في الاتجاه المباشر و انجزت k دورة فإنها ترتجع إلى وضعياتها الأولى و بالتالي النقطة A هي صورة كل عدد حقيقي من الشكل $x + k\times 2\pi$ (طول دورة هو 2π).

جـ) • $\frac{197\pi}{4}$ عدد موجب إذن M تتحرك في الاتجاه المباشر و تقطع قوسا $\widehat{IE}$ طوله $\frac{197\pi}{4}rad$ بعد عدة دورات.

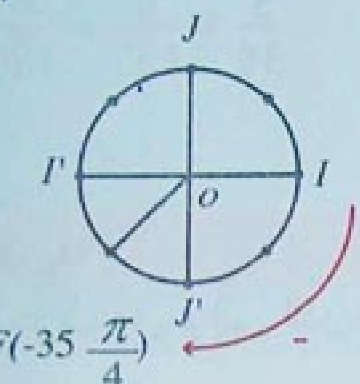


نقسم 197 على 4 و نجد $197 = 49\times4+1$ و منه $\frac{197\pi}{4} = 49\pi + \frac{\pi}{4}$. العدد 49π يعبر عن " 24 دورة و نصف دورة ".

بعد 24 دورة ونصف دورة ، M تنطبق على I' و يبقى لها قطع القوس $\widehat{I'E}$ الذي طوله $\frac{\pi}{4}$ (E هي منتصف القوس $\widehat{I'J'}$).

• $\frac{-35\pi}{4}$ عدد سالب إذن M تتحرك في الاتجاه غير المباشر و تقطع قوسا طوله $\frac{35\pi}{4}$.

$\frac{35\pi}{4} = 8\pi + \frac{3\pi}{4}$ و بالتالي M تنطلق من I و تقطع 4 دورات و قوس طوله $\frac{3\pi}{4}$، و منه F تنطبق على E .



طريقة

نعين الصورة M لعدد حقيقي x على الدائرة المثلثية كالآتي:

• إذا كان $x \geq 0$: M تقطع قوسا طولها x في الاتجاه المباشر و في الحالة $x \geq 2\pi$ ،نكتب x على الشكل $x = k\times2\pi+\alpha$ باستعمال القسمة (k هو عدد دورات M و α عدد حقيقي ينتمي إلى $[0;2\pi[$).

• إذا كان $x \leq 0$: M تقطع قوسا طولها $|x|$ في الاتجاه غير المباشر و في الحالة $|x| \geq 2\pi$ ،نكتب $|x|$ على الشكل $|x| = k\times2\pi+\alpha$ باستعمال القسمة (k هو عدد دورات M و α عدد حقيقي ينتمي إلى $[0;2\pi[$).

• جيب تمام و جيب قيم شهيرة

1) احسب جيب تمام و جيب القيم الشهيرة 0 و $\frac{\pi}{2}$ و π

حلّ	تعاليق
0 و $\frac{\pi}{2}$ و π هي ،على الترتيب، صور النقط $I(1,0)$ و $J(0,1)$ و $I'(-1,0)$ ، في الدائرة المثلثية. نستنتج أن $\begin{cases}\cos 0 = 1\\ \sin 0 = 0\end{cases}$ و $\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2} = 0\\ \sin\frac{\pi}{2} = 1\end{cases}$ و $\begin{cases}\cos\pi = -1\\ \sin\pi = 0\end{cases}$	$\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{3\pi}{2}$ لهما نفس الصورة إذن $\begin{cases}\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0\\ \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1\end{cases}$

طريقة

لحساب $\cos x$ و $\sin x$ نقرأ إحداثيي الصورة M للعدد x .

2) احسب جيب تمام و جيب القيم الشهيرة: $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{6}$.

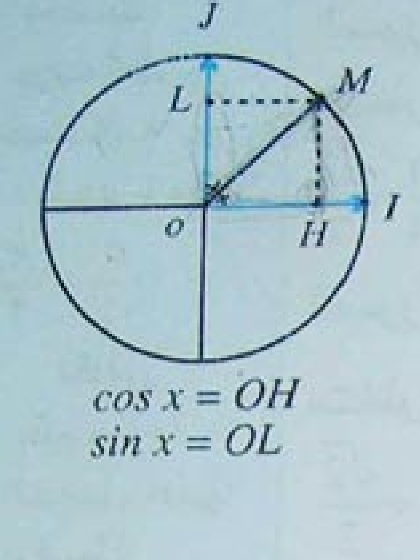
تعاليق	حل

تعاليق

• في مثلث ABC قائم في A و متقايس الساقين لدينا : $BC = AB\sqrt{2}$

• في مثلث متقايس الأضلاع ضلعه c و ارتفاعه h لدينا: $h = c\frac{\sqrt{3}}{2}$

حل

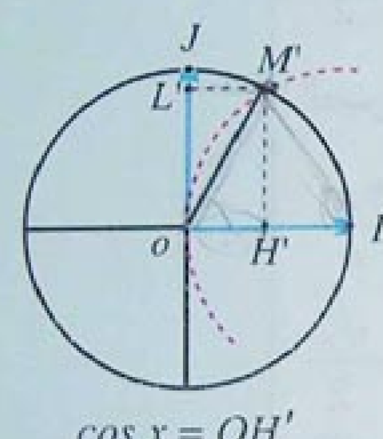


$\cos x = OH$
$\sin x = OL$

M هي صورة العدد $\frac{\pi}{4}$ (M هي منتصف القوس $\widehat{IJ}$).

بما أن $\widehat{MOI} = 45°$ فإن المثلث MOH القائم في H يكون متقايس الساقين. باستعمال مبرهنة فيتاغورس

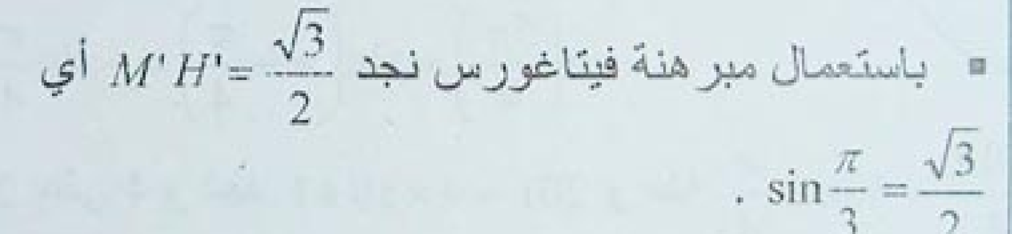
نجد: $OH = OL = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أي $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$\cos x = OH'$
$\sin x = OL'$

M' هي صورة العدد $\frac{\pi}{3}$ (M هي تقاطع القوس $\widehat{IJ}$ مع الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها 1).

لدينا $OI = OM'$ و $\widehat{M'OI} = 60°$ إذن المثلث $M'OI$ متقايس الأضلاع.

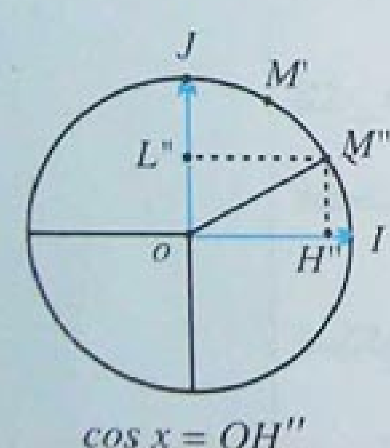


▪ H' هي منتصف $[OI]$ إذن $OH' = \frac{OI}{2} = \frac{1}{2}$ أي

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

▪ باستعمال مبرهنة فيتاغورس نجد $M'H' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أي

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



$\cos x = OH''$
$\sin x = OL''$

M'' هي صورة العدد $\frac{\pi}{6}$ (M'' هي منتصف القوس $\widehat{IM'}$).

لدينا $\widehat{JOM''} = 60°$ و $OJ = OM'' = 1$ إذن المثلث JOM'' متقايس الأضلاع و منه L'' هي منتصف $[OJ]$

نستنتج $OL'' = \frac{OJ}{2} = \frac{1}{2}$ و $OH'' = L''M'' = \frac{\sqrt{3}}{2}$

أي $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ و $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

طريقة

نحسب جيب تمام و جيب القيم $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{6}$ باستعمال المكتسبات في الهندسة .

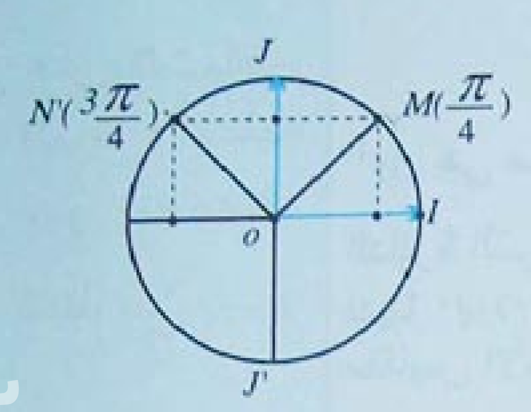
• حساب جيب تمام و جيب لقيم مستنتجة من قيم شهيرة.

احسب جيب تمام و جيب القيم $-\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{201\pi}{4}$.

حلّ

الصورة M للعدد $\frac{\pi}{4}$ و الصورة N للعدد $-\frac{\pi}{4}$ متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل و بالتالي

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

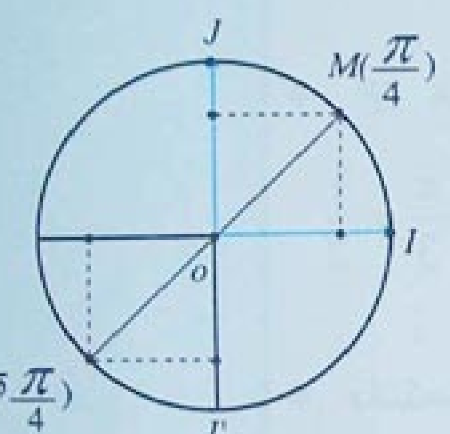


الصورة M للعدد $\frac{\pi}{4}$ و الصورة N' للعدد $\frac{3\pi}{4}$

متناظرتان بالنسبة لمحور التراتيب و بالتالي

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$



الصورة M للعدد $\frac{\pi}{4}$ و الصورة N'' للعدد

$\frac{5\pi}{4}$ متناظرتان بالنسبة لمبدأ المعلم و بالتالي

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

نقسم 201 على 4 و نجد $201=4\times 50+1$ و منه $\frac{201\pi}{4}=50\pi+\frac{\pi}{4}$.

لتكن P صورة العدد $\frac{201\pi}{4}$. P تحركت انطلاقا من النقطة $I(1,0)$ و قطعت25 دورة و قوس طوله $\frac{\pi}{4}$ و بالتالي P تنطبق على النقطة M صورة $\frac{\pi}{4}$.

نستنتج أن : $\cos\frac{201\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\frac{201\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

تعاليق

لحساب جيب تمام و جيب قيمة غير شهيرة مثل $\frac{\pi}{7}$ ، $\frac{\pi}{11}$ نكتفي بقيم مقربة نتحصل عليها بواسطة الحاسبة.

طريقة

• حساب جيب تمام وجيب قيمة x يؤول إلى حساب جيب تمام و جيب عدد حقيقي محصور بين 0 و $\frac{\pi}{2}$

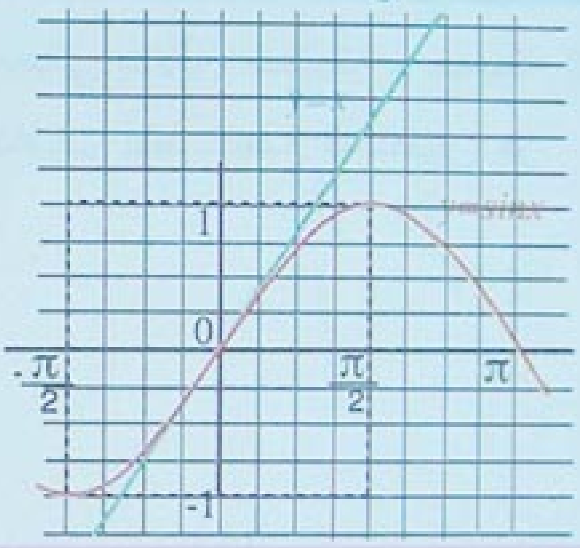
• يمكن استعمال : $\left\{\begin{array}{l}\cos(-x)=\cos x\\ \sin(-x)=-\sin x\end{array}\right.$ ، $\left\{\begin{array}{l}\cos(\pi-x)=-\cos x\\ \sin(\pi-x)=\sin x\end{array}\right.$ ، $\left\{\begin{array}{l}\cos(\pi+x)=-\cos x\\ \sin(\pi+x)=-\sin x\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l}\cos(x+k\times 2\pi)=\cos x\\ \sin(x+k\times 2\pi)=\sin x\end{array}\right.$ (العدد الطبيعي k هو عدد الدورات).

قارن بين العددين x و sinx إنطلاقا من قراءة بيانية

تعاليق

- نقارن بين x و sinx من أجل $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ لأن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- حذار! يجب أن يكون x بالراديان .
- يمكن مقارنة x و sinx بدراسة الوضع النسبي لمنحنيي الدالتين $x \mapsto x$ و $x \mapsto \sin x$.



حل

- عندما $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

نقرأ على الشكل المقابل:

$MH \leq MI \leq \overset{\frown}{MI}$

و بماأن :

$\overset{\frown}{MI} = x$ و $MH = \sin x$

فإن :

$\sin x \leq x$

- عندما $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$: يكون $0 \leq -x \leq \frac{\pi}{2}$

إذن $\sin(-x) \leq -x$ (حسب النتيجة السابقة).

الدالة sin فردية و منه $\sin(-x) = -\sin x$ ،

نستنتج $-\sin x \leq -x$ أي $\sin x \geq x$.

الخلاصة: إذا كان $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ فإن $\sin x \leq x$

إذا كان $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ فإن $\sin x \geq x$

طريقة

نستعمل الدائرة المثلثية أو التمثيل البياني للدالة $x \mapsto x$ و التمثيل البياني للدالة sin

الهدف : حل مسألة وجود بيانيا

هل يوجد مستطيل مساحته $153m^2$ و محيطه $52m$ ؟

- **المرحلة الأولى:** ترجمة المعطيات

في حالة وجود مستطيلا من هذا النوع، نحاول البحث عن بعديه x و y .

نترجم المعطيات بالجملة $\begin{cases} 2(x+y)=52 \\ xy=153 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x+y=26 \\ xy=153 \end{cases}$ .... (ا)

مرفقة بالشرطين $x>0; y>0$.

- **المرحلة الثانية:** إيجاد فكرة لتوظيف الجملة أعلاه

يمكن الاستفادة من الدالة التآلفية والدّالة مقلوب لأننا نستطيع أن ننظر إلى المعادلة $x+y=26$ على أنها معادلة مستقيم وبالنسبة للمعادلة $xy=153$ نستفيد من الدّالة مقلوب، باعتبار أنه يمكن أن تكتب على الشكل $y=\frac{a}{x}$. فتتحول مسألة البحث عن وجود مستطيل معطى بدلالة مساحته و محيطه إلى مسألة بيانية تستغل فيها المنحنيات و يصبح عندئذ البحث عن إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين هو المرحلة الموالية للحلّ.

- **المرحلة الثالثة :** تنفيذ الفكرة توصلنا إليها أعلاه

نكتب الجملة (ا) على الشكل $\begin{cases} y=26-x \\ y=\frac{153}{x} \end{cases}$ و $x>0$

يوجد مستطيل يحقق الشروط المعطاة يعني يوجد عدد حقيقي x يحقق $26-x=\frac{153}{x}$ (ب)

نسمي (C_f) بيان الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بالشكل $f(x)=\frac{153}{x}$

و (C_g) بيان الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بالشكل $g(x)=26-x$

نرسم (C_f) و (C_g) في نفس المعلم باختيار الوحدات المناسبة باستعمال حاسبة بيانية أو كمبيوتر.

بالنسبة للحاسبة نستعمل للمسة WINDOW و نضبط النافذة كالآتي: Xmin=0 و Xmax=26 ، Ymin=0 و Ymax=26

ثم بواسطة اللمسة Y= نحجز الدّالتين f و g نتحصل على

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=153/X
\Y2=26-X

وبعد ذلك نطلب الرسم بواسطة

اللمسة GRAPH نلاحظ أن (C_f) و (C_g) متقاطعان في نقطتين

Intersection
X=17 Y=9

باستعمال TRACE ← نقرأ قيم مقربة لقيمتي x .

و باستعمال 2nd ← CALC TRACE ← 5:intersect

نجد قيمتي x : $x=9$ ، $x=17$ و أخيرا نتأكد من أنّ 17 و 9 يحققان المعادلة (ب)

الهدف: استعمال حاسبة بيانية لتخمين نتيجة

ABC مثلث متقايس الساقين حيث $AB=AC$.
H هي منتصف $[CB]$ ويعطى $BC=2AH=6$.
M هي نقطة متغيرة على $[AH]$ و (Δ) هو المستقيم الذي يشمل M و يوازي (CB).

(Δ) يقطع $[AB]$ في I و $[AC]$ في J .

K و L نقطتان من (CB) بحيث يكون $IJKL$ مستطيلا .

1) نضع $AM = x$. ما هو المجال الذي يمسحه x ؟

2) ما هي وضعية M التي تكون من أجلها مساحة $IJKL$ أكبر ما يمكن ؟

• حل

1) **دراسة النصّ و تحليله :**

• لنعبر عن مساحة $IJKL$ بدلالة x.

لدينا $(BC)//(IJ)$ إذن $\frac{IJ}{BC}=\frac{AM}{AH}$ (خاصية طاليس) أي $\frac{IJ}{6}=\frac{x}{3}$

أي $IJ = 2x$.

مساحة $IJKL$ هي $IJ \times MH$ أي $2x(AH-AM)$ أي $2x(3-x)$

أي $-2x^2+6x$.

نسمي $f(x)$ مساحة $IJKL$ إذن $f(x)=-2x^2+6x$.

• **المواضع الممكنة للنقطة M على القطعة $[AH]$:**

نعلم أنّ M هي نقطة من $[AH]$.

إذا كان $M = H$ أي $x = 3$ تكون مساحة $IJKL$ معدومة $(f(3)=0)$.

إذا كان $M = A$ فإن $x = 0$ و $M = A = I = J$ ومنه تكون مساحة $IJKL$ معدومة $(f(0)=0)$.
إذن M تتغير على $[AH]$ ولا تنطبق على H ولا على A .
أي $x \in]0;3[$.

2) **وضع مخمّنة :**

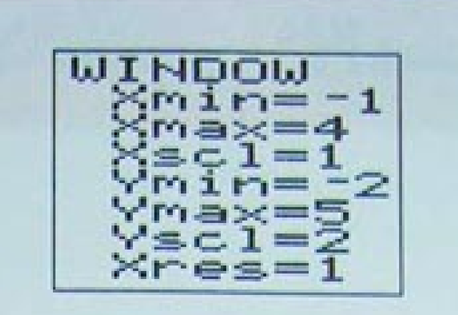
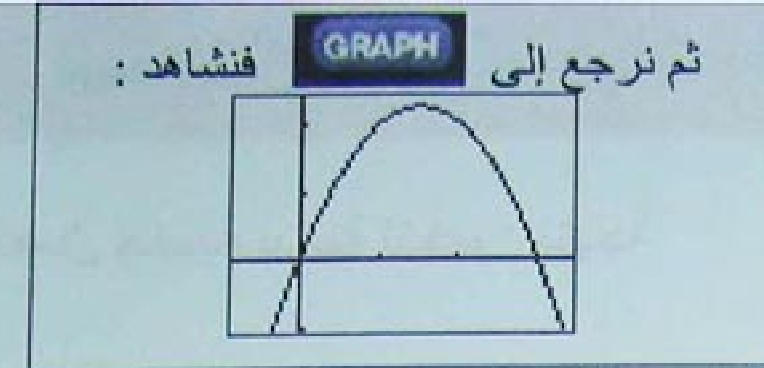
نستعمل على سبيل المثال الحاسبة $TI\text{-}83\ Plus$.

• **أولا : تمثيل f بيانيا**

نكتب `\Y1 = -2X²+6X` ← WINDOW ← GRAPH

• **ثانيا : ضبط الرسم**

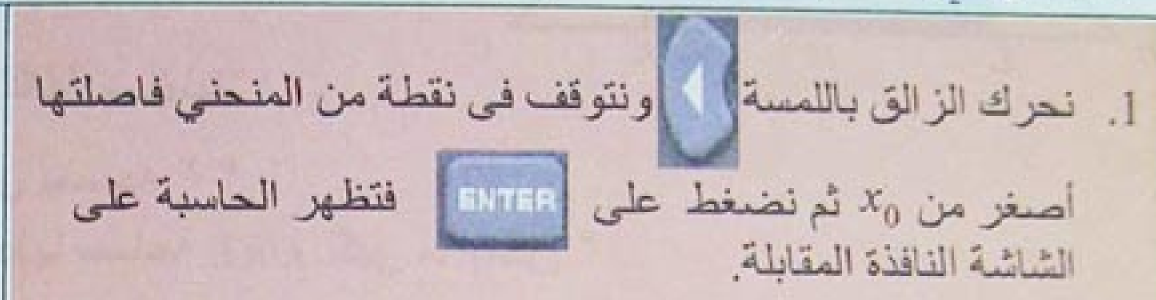


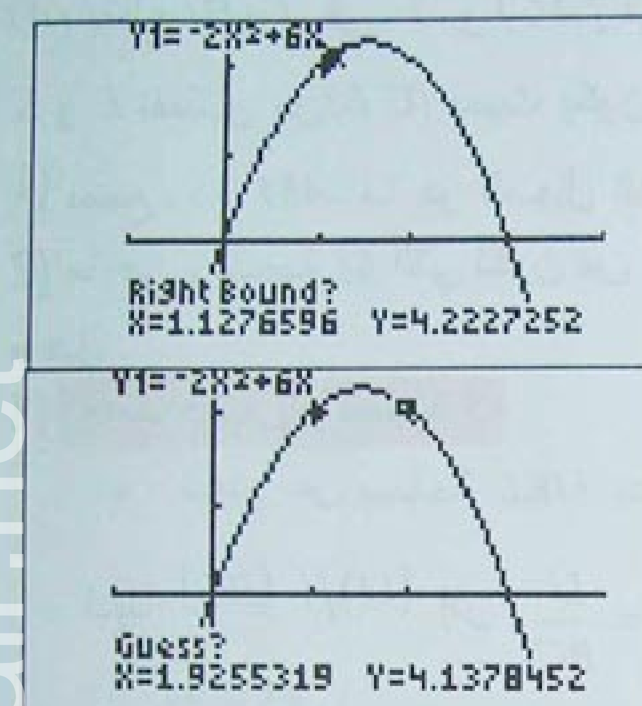
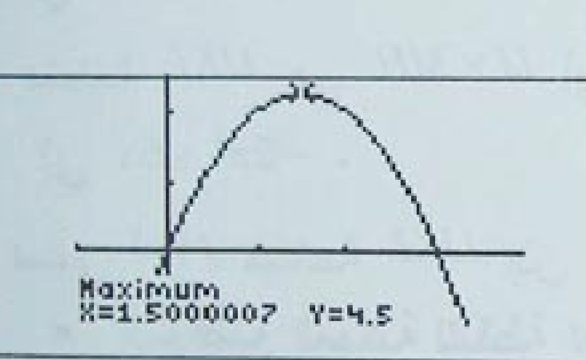
نضغط على  و نختار مثلا :		ثم نرجع إلى GRAPH فنشاهد : 

- **ثالثا : تعين قيمة مقربة لأكبر قيمة y_0 للدالة f:**

2nd ← TRACE ← نختار maximum باللمسة ▼ ثمّ ننقر على اللمسة ENTER .

نحدّد نقطتين على المنحني إحداهما تقع على يسار ذروته فاصلتها x_1 و الأخرى تقع على يمين ذروته فاصلتها x_2 حسب التعليمات الآتية:



1. نحرك الزالق باللمسة ◄ ونتوقف في نقطة من المنحني فاصلتها أصغر من x_0 ثم نضغط على ENTER فتظهر الحاسبة على الشاشة النافذة المقابلة.	
2. نحرك الزالق باللمسة ► و نتوقف في نقطة من المنحني فاصلتها أكبر من x_0 ثم ننقر على ENTER فتظهر الحاسبة على الشاشة النافذة المقابلة. هاتان التعليمتان تسمحان لنا باختيار المجال $[x_1;x_2]$ الذي نبحث فيه عن القيمة x_0 التي تمثل سابقة y_0 .	
و أخير نضغط على ENTER لنقرأ قيمة مقربة للعدد x_0 و قيمة مقربة للعدد y_0.	

3) **برهان المخمّنة :**

$$f(x)=-2(x^2-3x)=-2\left[x^2-2\times\left(\frac{3}{2}\right)x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]$$

إذن $f(x)=-2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]$ أي $f(x)=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$

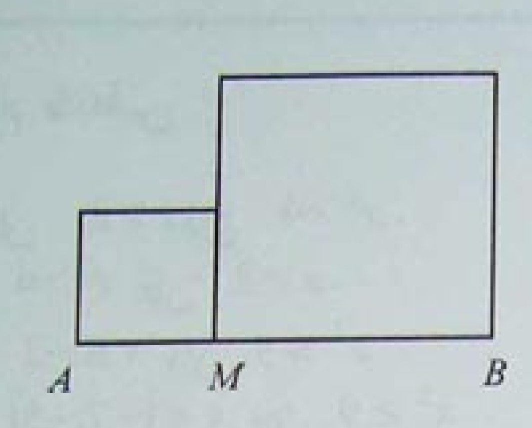
وبالتالي $f(x)=\frac{9}{2}-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$. العدد الموجب $f(x)$ يكون أكبر ما يمكن إذا كان $x=\frac{3}{2}$.

تكون مساحة IJKL أكبر ما يمكن من أجل $AM=1{,}5$

خلاصة:
- نترجم معطيات المسألة بدالة f للمتغير x.
- نمثل f بيانيا باستعمال حاسبة بيانية و نخمّن وجود قيمة قصوى للدالة f.
- نبرهن وجود قيمة قصوى للدالة f .

تمرين:

$[AB]$ قطعة مستقيم حيث $AB = 7cm$ ، M نقطة من $[AB]$.



نرسم مربعين ضلعاهما AM و BM كما في الشكل المقابل.

نضع $AM = x$ ، $A_1(x)$ ، $A_2(x)$ مساحتي المربعين.

1. أ) ما هي القيم الممكنة لـ x؟

ب) احسب بدلالة x كلا من $A_1(x)$ ، $A_2(x)$.

حـ) تحقق من أنّ $A_1(x)+A_2(x) = 2x^2 - 14x + 49$.

2. لنبحث عن قيمة x بحيث يكون مجموع المساحتين $37\ cm^2$.

أ) بيّن أنّ ذلك يؤول إلى حلّ المعادلة $x^2 = 7x - 6$ مع $0 < x < 7$ (م).

ب) باستعمال ورقة ميليمترية وفي نفس المعلم المتعامد $(O;I,J)$ حيث الوحدة $0,5cm$ على محور الفواصل، $0,1cm$ على محور التراتيب، أرسم المنحنيين الممثلين للدالتين f ، g المعرفتين بـ :

$$g(x) = 7x - 6 \quad ، \quad f(x) = x^2$$

حـ) هل يتقاطع المنحنيان ؟ في حالة الإيجاب، ما هو عدد نقط التقاطع ؟

د) اشرح لماذا تكون فواصل النقط المشتركة حلولا للمعادلة (م) ؟

بقراءة بيانية، عيّن هذه الحلول ثمّ استخلص.

تذكر أنّ :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

1. أ) النقطة M تتغيّر على القطعة $[AB]$ وبالتالي $0 < x < 7$.

ب) لدينا $AM = x$ ، $MB = 7 - x$

ومنه $A_1(x) = x^2$ ، $A_2(x) = (7-x)^2$

حـ) ننشر عبارة $A_2(x)$ ، نجد: $A_2(x) = 49 - 14x + x^2$ وبالتالي

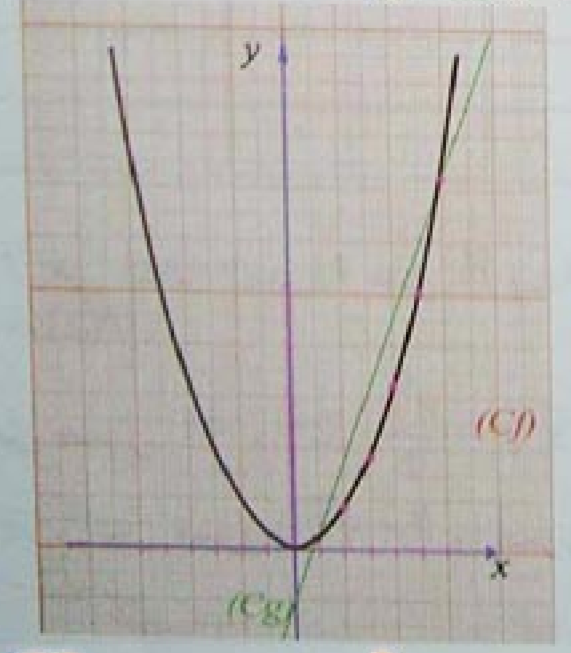
بالجمع، نجد:

$$A_1(x) + A_2(x) = x^2 + 49 - 14x + x^2$$
$$= 2x^2 - 14x + 49$$

2. أ) مجموع المساحتين يساوي $37\ cm^2$ يعني $2x^2 - 14x + 49 = 37$ مع $0 < x < 7$

أي $2x^2 - 14x + 12 = 0$ وبالتالي $x^2 - 7x + 6 = 0$

وبالتالي البحث عن قيمة x بحيث يكون مجموع المساحتين $37\ cm^2$ يؤول إلى حلّ المعادلة $x^2 = 7x - 6$ مع $0 < x < 7$.



ب) الشكل المقابل يعطي التمثيلين البيانيين (C_f) ، (C_g) للدالتين f ، g.

حـ) نلاحظ أنّ المنحنيين يتقاطعان في نقطتين.

د) فاصلة كلّ نقطة مشتركة بين المنحنيين هي حل للمعادلة (م)، لأنّ إحداثيي كلّ نقطة مشتركة يحققان معادلة كلّ من المنحنيين.

بقراءة بيانية، نجد: $x_1 = 1$ ، $x = 6$

التحقيق: $1^2 - 7\times 1 + 6 = 0$ ، $6^2 - 7\times 6 + 6 = 0$



الدّالة "مربّع"

أصحيح أم خاطئ ؟

1. إذا كان $x>2$ فإن $x^2>4$.
إذا كان $x^2>4$ فإن $x>2$.
إذا كان $x\leq -2$ فإن $x^2\leq 4$.
إذا كان $x\in[-7;-5]$ فإن $x^2\geq 9$.
إذا كان $x^2\leq 9$ فإن $-3\leq x\leq 3$.
إذا كان $-5\leq x\leq -3$ فإن $9\leq x\leq 25$.
إذا كان $4\leq x^2\leq 36$ فإن $2\leq x\leq 6$.
إذا كان $x\in[-2;3]$ فإن $x\in[4;9]$

2. مربع كل عدد حقيقي x يكون أكبر من x .
أكبر قيمة لدالة مربع على $[a;b]$ هي a^2 أو b^2 .

3. أ) الدالة "مربّع" متناقصة على $]-3;-1[$.
ب) الدالة "مربّع" متزايدة على $\mathbb{R}$.

4. إذا كان $\alpha<0<\beta$ فإن $\alpha^2<\beta^2$.
إذا كان $\alpha<\beta$ فإن $\alpha^2<\beta^2$.
إذا كان $\alpha>\beta$ فإن $\alpha^2>\beta^2$.

صوَر و سوابق

5. اتمم الجدول الآتي:

x	3	-2	$2\sqrt{3}$	$-\frac{1}{5}$	2×10^{-2}	$0,3$
x^2						
$-x^2$						
$(-x)^2$						

6. f هي الدالة المعرفة على R بـ:
$f(x)=x^2$.

أ) عين صوَر -4 ، -2، $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ ، $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

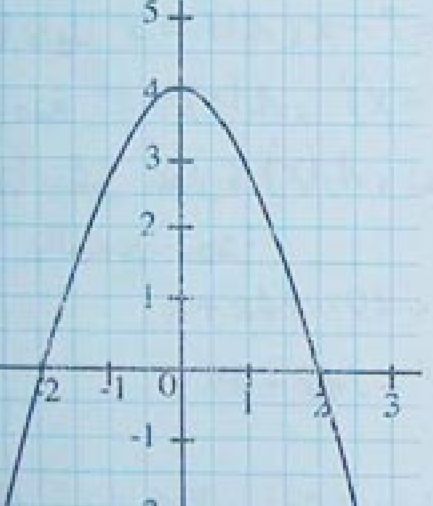
ب) قارن بين صورة $2-\sqrt{3}$ و صورة $\sqrt{3}-2$.

جـ) ماا هي مجموعة سوابق -2؟ ما هي مجموعة سوابق $5-2\sqrt{6}$ ؟

7. (C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $[-50;50]$ بالعبارة: $f(x)=x^2$.
أنشئ (C) في معلم متعامد (نمثل 10 بـ: $1cm$ في محور الفواصل و نمثل 500 بـ: $1cm$ في محور التراتيب) .

8. $(O;I,J)$ معلم متعامد حيث $OI=2cm$ و $OJ=1cm$.
أ) (C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $I=[-3;3]$ بـ: $f(x)=x^2$.
أنشئ (C) .
هل (C) يقبل مركز تناظر؟ محور تناظر؟
ب) نفس السؤال أ) من أجل $I=[-3;1]$.

9. إليك التمثيل البياني لدالة f من الشكل $x\mapsto ax^2+b$.



استعمل هذا الشكل :
أ) لتعين $f(0)$ ، $f(1)$، $f(-2)$.
ب) لتشكل جدول تغيرات f .
ت) لتعين إشارة و عدد حلول المعادلة $f(x)=1$
ث) لحل المعادلة $f(x)=5$

استعمال اتجاه التغير

10. قارن بين :
أ) $7,002^2$ و $7,003^2$ ؛
ب) $(-1,99)^2$ و $(-2,01)^2$ ؛
جـ) $(-7,463)^2$ و $(-7,4629)^2$ ؛
د) $-43,14^2$ و -47^2 .
(لاتنجز أي حساب باليد أو بالحاسبة)

11. قارن بين :

أ) $(x+2)^2$ و $(x-3)^2$ إذا علمت أن $x \geq 0$.

ب) $(1-x)^2$ و $(2-x)^2$ إذا علمت أن $x \geq 1$.

التمثيل البياني

12. جد حصرا للعدد الحقيقي x^2 في كل حالة من الحالات الآتية:

$x \in [-3;1[$ ؛ $x \in [-0{,}3;0{,}1[$ ؛

$x \in [-0{,}2;0{,}1]$ ؛ $x \in]-4;-2[$.

13. f هي الدالة المعرفة على $[-10;7]$ بـ :

$f(x) = x^2 - 10$ عين جدول تغيرات f ومثلها بيانيا

14. عين اتجاه تغير كل دالة من الدوال الآتية :

آ) الدالة f المعرفة على $[2;3]$ بالعبارة:

$f(x) = 4(x-3)^2 + 1$

ب) الدالة g المعرفة على $]-\infty;-1]$ بالعبارة:

$g(x) = -2(x+1)^2 + 7$

جـ) الدالة h المعرفة على $]-\infty;-1]$ بالعبارة:

$h(x) = 3(x+1)^2 - 7$

القيم الحدية

15. f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$f(x) = (x-4)^2 + 5$.

بين ان من اجل كل عدد حقيقي x :

$f(x) - f(4) \geq 0$ و استنتج أصغر قيمة ممكنة للدالة f.

16. f هي الدالة المعرفة على R بالعبارة:

$f(x) = 3x^2 - 12x - 3$.

حلل $f(x) + 15$. ما هي أصغر قيمة ممكنة للدالة f .

17. استعمل الحاسبة البيانية لتمثل بيانيا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

نريد تعيين أكبر قيمة ممكنة للدالة f .

ماذا تلاحظ على شاشة الحاسبة؟ برهن.

18. ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي: $f(x) = -\sqrt{2}(x-\sqrt{2})^2 - 2$

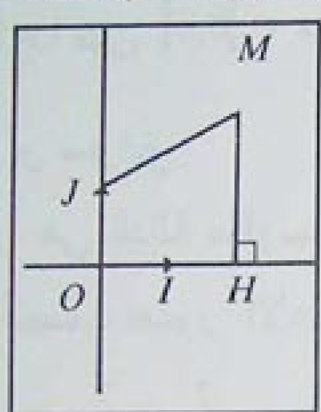
19. (C) هو التمثيل البياني لدالة المربع و (E) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x-2)^2 - 1$.

أ) انشئ (C) .

ب) اشرح كيف يمكن استنتاج (E) إنطلاقا من (C) . أنشئ (E).

20. J نقطة لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) و O هي مسقطها العمودي على (Δ) . I هي نقطة من (Δ) حيث $OI = OJ$.

نعتبر في المعلم المتعامد $(O;I,J)$ نقطة متغيرة $M(x,y)$.



عين مجموعة النقط M المتساوية البعدعن J و (Δ) .

الدّالة "مقلوب"

أصحيح أم خاطئ ؟

21. أ1) مقلوب كل عدد موجب هو عدد سالب

أ2) مقلوب عدد حقيقي غير معدوم و أصغر من 7 يكون أكبر من 7.

أ3) مقلوب $7-4\sqrt{3}$ أكبر من $7-4\sqrt{3}$.

أ4) إذا كان $x > 5$ فإن $\frac{1}{x} < \frac{1}{5}$.

أ5) a و b عددان غير معدومين. إذا كان $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ فإن $a < b$.

أ6) إذا كان $x < -5$ فإن $\frac{1}{x} > -\frac{1}{5}$ لأن الدّالة مقلوب متناقصة.

أ7) بما أن الدّالة مقلوب متناقصة و $-5 > -6$ فإن $-\frac{1}{5} < -\frac{1}{6}$.

8أ) بما أن الدالة مقلوب متناقصة و $6 > 5$

فإن $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$.

9أ) بما أن الدّالة مقلوب متناقصة و $-6 > 5$

فإن $-\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$.

10أ) $\frac{2}{11} \le \frac{1}{x}$ يكافئ $x \ge \frac{11}{2}$.

.22 أ) إذا كان $x \in \left[-\frac{3}{4};0\right[$ فإن $\frac{1}{x} \in \left]-\infty;-\frac{4}{3}\right]$

ب) إذا كان $x \in]0;8]$ فإن $\frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{8};+\infty\right[$

صور و سوابق

.23 f هي الدالة مقلوب.

أ) أحسب صور الأعداد: -1، $-\frac{1}{3}$ ، 10^{-2}، 10^{2}، $\frac{7}{5}$ ، $-\frac{7}{5}$، 3، -3.

ب) أحسب سوابق الأعداد: -3، 5، 10^{4} ، 10^{-4}، $\frac{5}{6}$، $-\frac{6}{5}$.

.24 هل يمكن أن يشكل جدول القيم الآتي الدّالة مقلوب؟

x	0,4	10^{-1}	$\sqrt{2}-1$	1	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
$f(x)$	2,5	0,1	$\sqrt{2}+1$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

التمثيل البياني

.25 مثّل بيانيا الدالة مقلوب على المجال $]0;50]$ في معلم متعامد حيث: 10تمثل $1cm$ على محور الفواصل و 1 يمثل $10cm$ على محور التراتيب.

.26 مثّل بيانيا الدّالة مقلوب علما أن x يتغير بين -1 و 1 ويختلف عن 0.

نأخذ $0{,}1cm$ لتمثيل 1 على محور الفواصل و $1cm$ لتمثيل 5 على محور التراتيب.

.27 $(O;I,J)$ معلم متعامد .

أ) نفرض $OI = OJ = 1cm$. أنشئ المنحني البياني (C) لدالة المقلوب من أجل $x \in \left[-3;-\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2};3\right]$.

هل (C) يقبل مركز تناظر؟ محور تناظر؟

ب) نفس الأسئلة عندما نفرض $OI = 1cm$ و $OJ = 4cm$.

.28 f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2}{x}$.

أ) ادرس تغيرات f و شكل جدول تغيراتها.

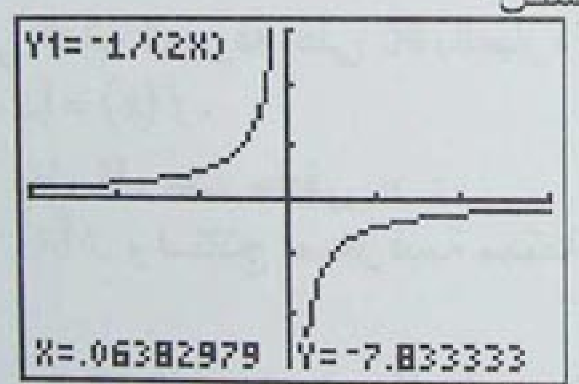
ب) مثّل بيانيا f على المجال $[-3;3]$ في معلم متعامد و متجانس.

.29 f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بالعبارة: $f(x) = \frac{-3}{x}$.

أ) ادرس تغيرات f و شكل جدول تغيراتها.

ب) مثّل بيانيا f على المجال $[-4;4]$ في معلم متعامد و متجانس.

.30 استعمل الحاسبة البيانية لإنجاز مثيل للشكل:



.31 f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{3}{x+2}$.

أ) أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

ب) مثّل بيانيا f في معلم متعامد.

32. f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\neq -1$ لدينا: $f(x)=2-\frac{1}{x+1}$.

ب) أدرس تغيرات f و شكل جدول تغيراتها.

33. (C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{3x+4}{x+1}$ و (H) هو القطع الزائد الذي يمثل دالة المقلوب.

أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\neq -1$ لدينا: $f(x)=3+\frac{1}{x+1}$.

ب) بين إنه يمكن استنتاج (C) انطلاقا (H) بانسحاب يطلب تعيين شعاعه.

دالة الجذر التربيعي

أصحيح أم خاطئ؟

34. أ) إذا كان x عددا حقيقيا حيث $x<4$ فإن $\sqrt{x}<2$.

ب) إذا كان $0\leq x\leq 1$ فإن $0\leq \sqrt{x}\leq 1$.

جـ) من أجل كل عدد حقيقي موجب x لدينا $x\geq \sqrt{x}$.

د) إذا كان $x^2\leq 25$ فإن $x\leq 5$.

هـ) إذا كان $x\in\left[\frac{1}{4};4\right]$ فإن $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$

35. أ) x عدد سالب. العبارة $\sqrt{-x}$ ليس لها معنى.

ب) من أجل كل عدد حقيقي لدينا $x\sqrt{3}=\sqrt{3x^2}$

صور و سوابق

36. اتمم الجدول الآتي:

x	1	$(-5)^2$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\left(1-\sqrt{2}\right)$
$\sqrt{x}$				

37. f هي دالة الجذر التربيعي.

أ) أحسب صور الأعداد: 10^{-6} ، $\left(\frac{1}{2}-\pi\right)^2$ ، 6000^2+8000^2 ، $(-a-b)^2$.

جـ) أحسب سوابق الأعداد: 7، 10^{-6} ، 10^3 ، $(-1)^2$ ، $7-\sqrt{37}$.

التمثيل البياني

38. مثل بيانيا دالة الجذر التربيعي على المجال $[0;50]$ في معلم متعامد حيث: 10 تمثل $2cm$ على محور الفواصل و 1 يمثل $1cm$ على محور التراتيب.

39. f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{2x}$.

أ) ادرس تغيرات f و شكل جدول تغيراتها.

ب) مثل بيانيا f على المجال $[0;8]$ في معلم متعامد و متجانس.

40. f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;0]$ بـ: $f(x)=\sqrt{-2x}$.

أ) ادرس تغيرات f و شكل جدول تغيراتها.

ب) مثل بيانيا f على المجال $[-8;0]$ في معلم متعامد و متجانس.

41. (C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $[-2;+\infty[$ بـ: $f(x)=1+\sqrt{x+2}$ و (H) هو التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي.

أ) أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها

ب) بين إنه يمكن استنتاج (C) انطلاقا من (H) بانسحاب يطلب تعيين شعاعه. أنشئ (C) .

42. أ) مثل بيانيا على المجال $[0;+\infty[$ الدالتين: $x\to x$ و $x\to\sqrt{x}$

ب) خمن ترتيب x و $\sqrt{x}$ باستعمال السؤال الأول ثم برهن النتائج المحصل عليها.

أصحيح أم خاطئ؟

43. لا يوجد أي عدد حقيقي x حيث $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

44. إذا كان $a < b$ فإن $\cos a < \cos b$ و $\sin a < \sin b$

45. $\cos\frac{\pi}{7} > \cos\frac{\pi}{5}$ و $\sin\frac{\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{5}$

46. a و b عنصران من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.

أ) إذا كان $a < b$ فإن $\cos\frac{1}{a} < \cos\frac{1}{b}$

ب) إذا كان $a < b$ فإن $\sin\frac{1}{a} > \sin\frac{1}{b}$

47. بما أن A و B نقطتان من دائرة مركزها O و نصف قطرها $1cm$ و $\widehat{AOB} = 10°$ فإن طول القوس $\widehat{AB}$ هو $10cm$

الزوايا و الأقواس

48. $\widehat{AB}$ قوس من دائرة مركزها O و نصف قطرها $5cm$. عين $\widehat{AOB}$ بالرديان ثم الدرجة إذا علمت أن طول القوس $\widehat{AB}$ هو $2,5cm$.

49. تعطى دائرة نصف قطرها $10cm$. احسب أطوال الأقواس التي تحصرها الزوايا المركزية التي أقياسها :

$\frac{\pi}{3}rad$ ، $\frac{\pi}{4}rad$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $90°$ ، $75°$ ، $120°$

50. أ) حوّل إلى الرديان : $10°$ ، $35°$ ، $150°$

ب) حوّل إلى الدرجة : $\frac{3\pi}{8}rad$ ، $\frac{\pi}{5}rad$

51. ضع على الدائرة المثلثية النقط التي صوّرها

$\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{7\pi}{6}$ ، $\frac{15\pi}{4}$ ، $\frac{11\pi}{3}$ ، $\frac{133\pi}{3}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ ، $\frac{-7\pi}{4}$ ، $\frac{-13\pi}{4}$ ، $\frac{-16\pi}{3}$ ، $-\frac{23687\pi}{6}$.

صور و سوابق

52. احسب القيم المضبوطة لجيب تمام و جيب الأعداد الآتية :

أ) $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{-\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{7\pi}{6}$ ، $\frac{-5\pi}{6}$ ، $\frac{-7\pi}{6}$ ، $\frac{4\pi}{3}$

ب) 120π ، 213π ، -128π ، -789π

جـ) $\frac{193\pi}{3}$ ، $-\frac{193\pi}{3}$ ، $\frac{115\pi}{4}$ ، $-\frac{115\pi}{4}$

53. عين في كل حالة من الحالات الآتية العدد x من المجال $[0;\pi]$:

$\cos x = 0$ ، $\sin x = \frac{1}{2}$ ، $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ،

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(لا تستعمل الحاسبة)

54. عين في كل حالة من الحالات الآتية العدد x من المجال $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$:

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos x = \frac{1}{2}$ ، $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(لا تستعمل الحاسبة)

55. أ) x عنصر من $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ حيث $\sin x = \frac{2}{3}$ احسب $\cos x$.

ب) x عنصر من $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ حيث $\cos x = -\frac{3}{5}$ احسب $\sin x$.

جـ) x عنصر من $[-\pi,0]$ حيث $\sin x = -\frac{1}{3}$ احسب $\cos x$.

56. أ) عين الأعداد الحقيقية x من المجال $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$ حيث $\cos \geq 0$

ب) عين الأعداد الحقيقية x من المجال $[-2\pi;3\pi]$ حيث $\sin x \leq \frac{1}{2}$

اتجاه التغيّر – التمثيل البياني

57. أ) ادرس تغيرات الدالة "جيب تمام" على المجال $[0;2\pi]$ ثم مثلها بيانيا لاستنتاج حلول كل معادلة من المعادلات الآتية : $\cos x = 0$ ، $\cos x = 1$ ، $\cos x = -1$.

استنتج كذلك عدد حلول المعادلة $\cos x = -\frac{5}{7}$.

ب) نفس الأسئلة بالنسبة للدالة $\sin$

58. ادرس تغيرات الدالة "جيب" على المجال $[-\pi;3\pi]$ و مثلها بيانيا.

59. انشئ البيان (C_s) للدالة "جيب" على المجال $[0;\pi]$. اشرح كيف نستنتج بيان هذه الدالة على المجال $[0;2\pi]$.

مسائل

60. أ) مثل بيانيا الدالتين $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ و $x \mapsto -x + 2$ باستعمال الحاسبة البيانية أو الكمبيوتر .

ب) إقرأ على الشكل المنجز مجموعة حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ و مجموعة حلول المتراجحة $f(x) < g(x)$ ثم تأكد بالحساب.

61. مثل بيانيا الدالتين $x \mapsto \sqrt{x+2}$ و $x \mapsto -x+3$ باستعمال الحاسبة البيانية أو الكمبيوتر ثم استنتج حصرا لحل المعادلة $\sqrt{x+2} = -x+3$.

62. أ) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + \frac{3}{x}$

ب) قارن بين العددين:

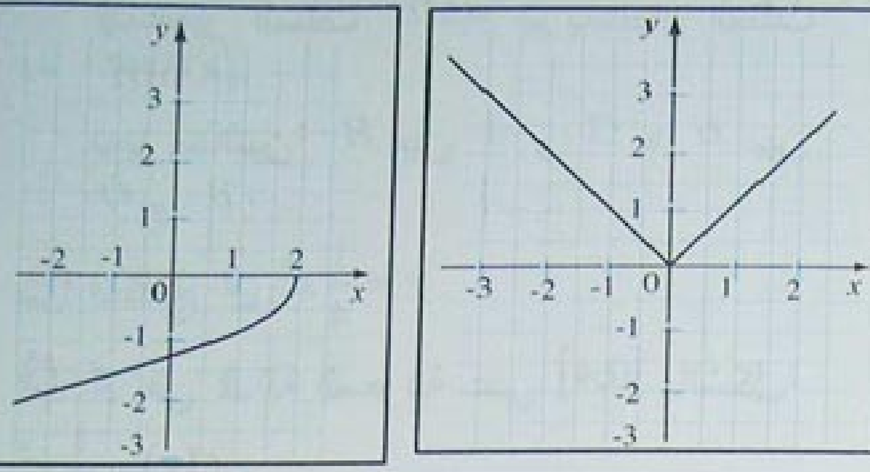
$x = \frac{3,991991991991991991991997}{0,991991991991991991991997}$ و

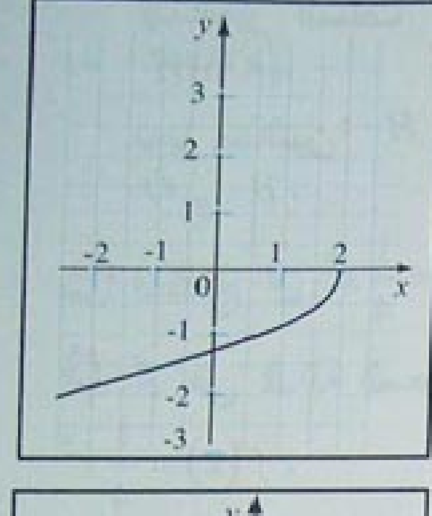
$y = \frac{3,991991991991991991991993}{0,991991991991991991991993}$

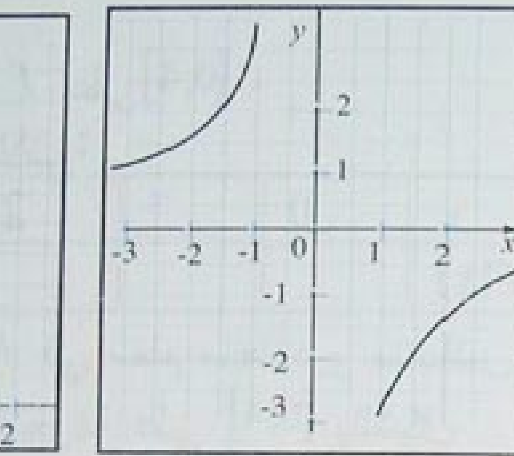
63. المطلوب في هذا التمرين هو ارفاق كل دالة من الدوال الآتية بتمثيلها البياني.

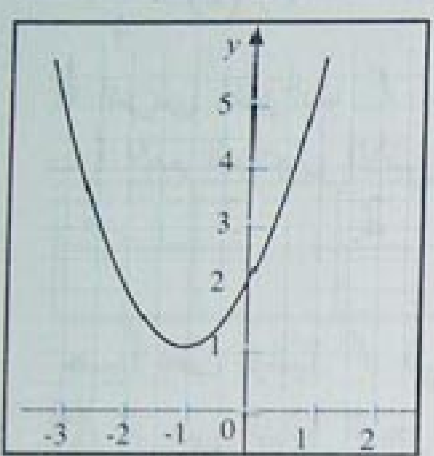
$f : x \mapsto x^2 + 2x + 2$ ، $g : x \mapsto \frac{-3}{x}$ ،

$h : x \mapsto -\sqrt{-x+2}$ ، $k : x \mapsto |x|$









64. f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي:

$f(x) = x^2$ إذا كان $x \leq 0$

$f(x) = \sqrt{x}$ إذا كان $0 < x \leq 1$

$f(x) = \frac{1}{x}$ إذا كان $x > 1$

أ) مثل بيانيا الدالة f .

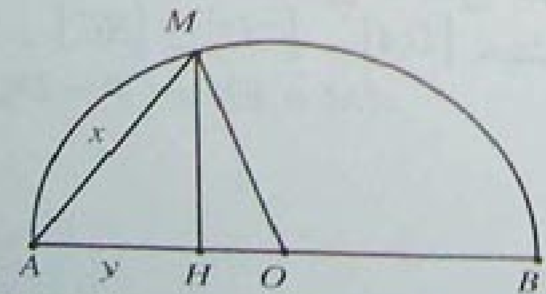
ب) حل بيانيا ثم جبريا المتراجحة $f(x) \leq \frac{1}{4}$

65. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x :

$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$

$(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \cos x)(1 + \sin x)$.

66. M نقطة متغيرة على نصف دائرة مركزها O وقطرها $[AB]$ حيث $AB = 4$. نسمي H المسقط العمودي للنقطة M على $[AB]$. نضع $AM = x$ و $AH = y$



1) بين أن x ينتمي إلى المجال $[0;4]$.

2) أ) احسب MH^2 بطريقتين مختلفتين (باعتبار المثلث AMH ثم باعتبار المثلث OMH).

نميز حالتين: H بين A و O ؛ H بين O و B.

ت) استنتج أن $y=\frac{1}{4}x^2$.

3) f هي الدالة المعرفة على $[0;4]$ بالشكل: $f(x)=\frac{1}{4}x^2$.

أ) ادرس تغيرات f على $[0;4]$.

ب) اتمم الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$					

جـ) مثّل بيانيا f في معلم متعامد و متجانس.

4) g هي الدالة المعرفة على $[0;4]$ بالشكل $g(x)=x$.

أ) مثّل بيانيا g في المعلم السابق.

ب) استنتج من البيان السابق انه من أجل كل عدد حقيقي من $[0;4]$ لدينا $g(x)\geq f(x)$

5) أ) استعمل السؤال4) كي تبين انه توجد قيمة x_0 للعدد x تجعل $AM-AH$ أكبر ما يمكن. جد قيمة مقربة للعدد x_0 .

ب) تأكد أن $AM-AH=x-\frac{1}{4}x^2$.

بين أن الدالة $h:x\to x-\frac{1}{4}x^2$ المعرفة على $[0;4]$ متزايدة تماما على $[0;2]$ و متناقصة على $[2;4]$.استنتج أن $AM-AH$ أكبر ما يمكن من أجل $x=2$.

حدد وضعية M .

.67 $ABCD$ مربع طول ضلعه $4cm$. النقط M ، N ، P ، Q تنتمي ، على الترتيب، إلى $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[CD]$ ، $[DA]$ حيث $AM=BN=CP=DQ=x$

1) إلى أي مجال ينتمي x؟

2) احسب مساحة المربع $MNPQ$ من أجل $x=1$.

3) بين أن مساحة المربع $MNPQ$ هي $f(x)=2x^2-8x+16$.

4) تأكد أن $f(x)=2\left[(x-2)^2+4\right]$. ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد $f(x)$.علل.

5) أ) استعمل حاسبة بيانية لإنشاء بيان الدالة f المعرفة على $[0;4]$ بـ :
$f(x)=2x^2-8x+16$

وعين قيمة مقربة للعدد x الذي من أجله تكون مساحة المربع $MNPQ$ $12cm^2$.

ت) شكل جدول تغيرات الدالة f .

.68 أ) بين أن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما لدينا $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

ب) أنشئ في نفس المعلم المتعامد و المتجانس بيان الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بالشكل $f(x)=\frac{1}{x}$ و بيان الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بالشكل $g(x)=x$ ثم استنتج إنشاء البيان (C_h)للدالة الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بالشكل $h(x)=f(x)+g(x)$.

(يتم إنشاء (C_h) نقطة بنقطة انطلاقا من البيانين السابقين) .

جـ) من بين المستطيلات التي مساحتها $1m^2$ ما هو الذي يقبل أصغر محيط.

المعادلات والمتراجحات

الكفاءات المستهدفة

- التعرف على مختلف الصيغ لنفس العبارة الجبرية (صيغة مختصرة، صيغة محللة، ...).
- تحويل كتابة عبارة (نشرها، تحليلها، اختصارها) و اختيار الصيغة المناسبة تبعا للهدف المنشود.
- كتابة العبارة ax^2+bx+c على الشكل النموذجي $(a\neq 0)$.
- تحليل العبارة ax^2+bx+c $(a\neq 0)$.
- استعمال المميّز لحلّ المعادلة: $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$
- توظيف المعادلات و المتراجحات من الدرجة الأولى و المعادلات من الدرجة الثانية لحلّ مشكلات.
- استعمال جدول الإشارات لحلّ متراجحة.
- حلّ،جبريا، معادلات ومتراجحات من الشكل:

$f(x)=g(x)$ ، $f(x)=k$ ، $f(x)<g(x)$ ، $f(x)<k$



محمد بن موسى الخوارزمي
بغداد 780م - 850م

قبل ظهور الحساب الحرفي، استعملت عدة إجراءات تجريبية وهندسية لحلّ مشاكل من الحياة اليومية تسدّ الاحتياجات العملية للناس. و تتعلق هذه المسائل بالميراث وتقسيم الممتلكات والتجارة ومسح الأراضي .فكان هذا الاستعمال يحتاج إلى التبسيط، وهو الأمر الذي دفع بأبي جعفر محمد بن موسى الخوارزمي (780م-850 م) إلى البحث في هذا الموضوع. ومن ثمّ تأليف كتاب يعالج فيه حلّ المعادلات في الجبر هو كتاب : «المختصر في الجبر والمقابلة». وجاء في مقدمته:. «...على أني ألفت من كتاب الجبر و المقابلة كتابا مختصرا، حاصرا للطيف الحساب وجليله، لما يلزم النّاس من الحاجة إليه في مواريثهم ووصاياهم وفي مقاسماتهم وأحكامهم وتجارتهم وفي جميع ما يتعاملون به من مساحة الأراضي وكرى الأنهار والهندسة ...» ترجم هذا الكتاب إلى اللاتينية تحت عدة عناوين. صنف الخوارزمي في كتابه هذا المعادلات إلى ستة أصناف هي بالترميز الحديث:

$ax^2=bx+c$ ؛ $ax^2+c=bx$ ؛ $ax^2+bx=c$ $ax=b$ ؛ $ax^2=b$ ؛ $ax^2=bx$

واستعمل أدوات ووسائل خاصة لحلّها، فسمى المجهول جذرا ومربعه مالا واعتبر في كل الحالات a ؛ b ؛ c أعدادا موجبة وعند الحلّ يرد الأموال إلى مال واحد. كما استعمل إجراءين اشتهر بهما هما **الجبر** (التقويم) و**المقابلة** (المقارنة) فكان بذلك أول من أدخل ما يسمى حديثا بالخوارزميات الحسابية أي طرق وقواعد حسابية تتم عبر مراحل متدرجة وفق نظام معلوم تتكرر عدة مرات إلى أن يتحقق الهدف المطلوب.وقد أكد البحث في تاريخ الرياضيات، خصوصا حول الفكر الجبري إلى **أنه من المتفق عليه لدى جميع المؤرخين في الرياضيات أنّ الميلاد الرّسمي للجبر كفرع في الرّياضيات هو نشر كتاب محمد ابن موسى الخوارزمي المعنون« المختصر في الجبر والمقابلة».**

نشاط 1: الأشكال المختلفة لعبارة جبرية

1. أ) أنقل ثمّ أكمل الجدول كما في السطر الأوّل.

النصّ	العبارة الجبرية
مجموع جداءين	$ab+cd$
جداء مجموع وفرق	
	$\frac{ab}{c+d}$
حاصل قسمة مجموع على فرق	
	$\frac{1}{a+b}$
فرق مربعين	
فرق حاصلي قسمة	
	$(a+b)^2$

ب) ما هي الشروط التي يجب أن تحققها الأعداد الحقيقية a، b، c، d حتى يكون للعبارات الواردة في العمود الثاني من الجدول أعلاه معنى ؟

2. عيّن، من بين العبارات الآتية، المجاميع والجداءات وحواصل القسمة.

أ) $2-x(x+1)$ د) $\frac{2x^2-x+3}{x-1}$

ب) $3(2x-1)^2$ هـ) $\frac{5x-2}{3}-\frac{1}{2}$

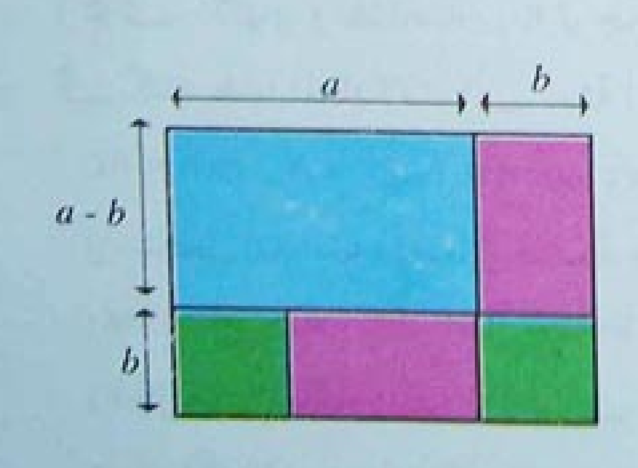
جـ) $\frac{1}{x-3}(x+1)-2$ و) $(1-x)\sqrt{x}$

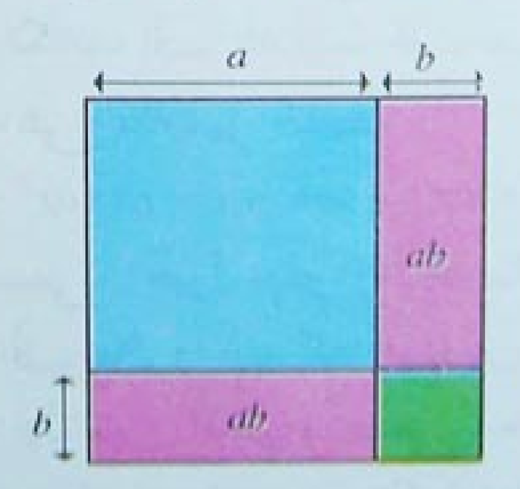
3. أكتب عبارة مجموع الحدود $-5x^2$، $2x$، -1 في جداء العاملين x، $2x-3$

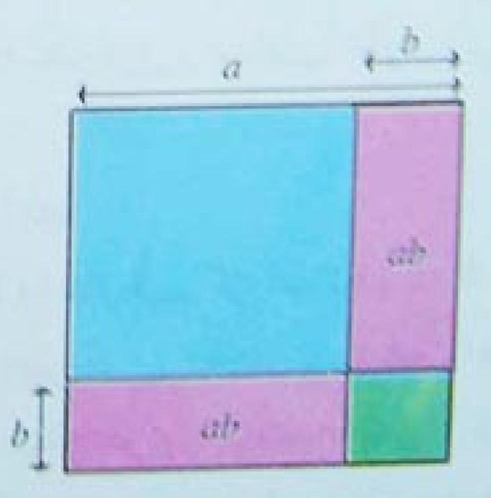
نشاط 2: المتطابقات الشهيرة

1. تحقق باستعمال الأشكال الهندسية الآتية من صحة المتطابقات الشهيرة:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ، $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ، $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$







2. أ) ما هي قيمة العدد $85\,987\,586\,750^2-85\,987\,586\,749\times85\,987\,586\,751$ ؟

ب) احسب، دون استعمال حاسبة، المربعين 399^2 ، 401^2.

نشاط 3: المعادلات عند الخوارزمي

من المشكلات التي طرحها الخوارزمي في "كتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة"، نذكر:

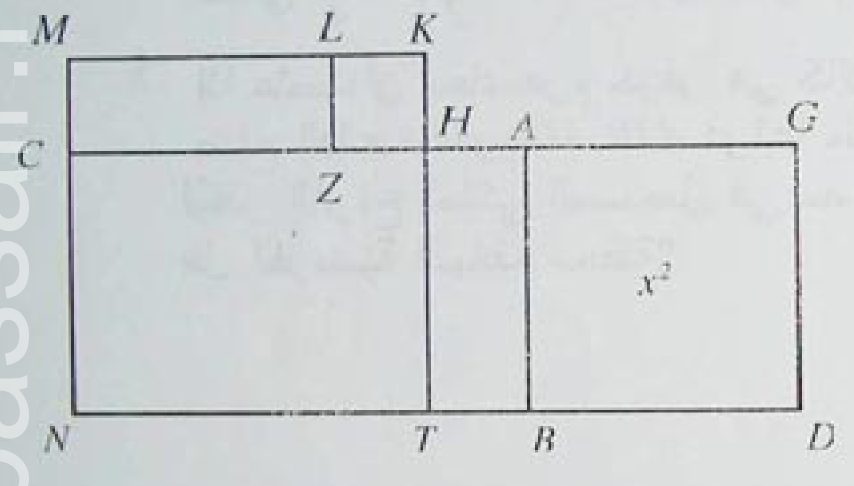
> فأما الأموال والعدد التي تعدل الجذور، فمثل قولك مال وواحد وعشرون من العدد يعدل عشرة. فبابه أن تنصّف الأجذار فتكون خمسة، فتضربها في مثلها تكون خمسة وعشرين، فتنقص منها الواحد والعشرين التي ذكرناها مع المال، فيبقى أربعة، فخذ جذرها وهو اثنان، فأنقصها من نصف الأجذار وهو خمسة، فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذي تريده والمال تسعة. وإن شئت فزدْ الجذر على نصف الأجذار فيكون سبعة وهو جذر المال الذي تريده والمال تسعة وأربعون.

وهو ما يمكن ترجمته بالشكل: " المربع و واحد وعشرون يساوي عشرة جذوره "، بمعنى:
أوجد x بحيث $x^2+21=10x$.

في النصّ المقتبس، يُعنى بالمال x^2 وبجذر المال x ويذكر في نصوص أخرى الدراهم ويعني بها الأعداد.

المعادلة السابقة من الشكل: $ax^2+c=bx$ ويوافق الصنف الخامس لتصنيف الخوارزمي.

ولحلّها استعمل إجراء يرتكز على سند هندسي ويصفه كالآتي:
" نرسم قطعة مستقيم $[AG]$ طولها x ونكمل المربع $ABDG$ وتكون مساحته x^2. نمدّد $[AG]$ إلى النقطة C حيث $GC=10$، ونرسم مستطيلا عرضه x وطوله GC نسميّه $GCND$، تكون مساحته $10x$ (ونحصل بذلك على الطرف الثاني للمعادلة).



- تحقق من أنّ مساحة المستطيل $ACNB$ هي 21.

نضع H منتصف $[GC]$ ($HC=GH=5$)،
نرسم قطعة مستقيم $[HT]$ مثل $[GD]$
($(HT)//(GD)$ و $GD=HT$). إذن $HT=x$
بعد ذلك نعيّن على (TH) النقطة K حيث $TK=GH$
إذن $TK=\frac{10}{2}=5$.
نكمل المربع $TKMN$، وتكون مساحته $5\times5=25$ ، ونعيّن على $[KM]$ النقطة L حيث $KL=HK$
($KL=5-x$). ينتج $ML=HT$ و $LK=KH=5-x$.
نكمل المربع $KLZH$.

- قارن بين مساحتي المستطيلين $MLZC$ و $TBAH$.

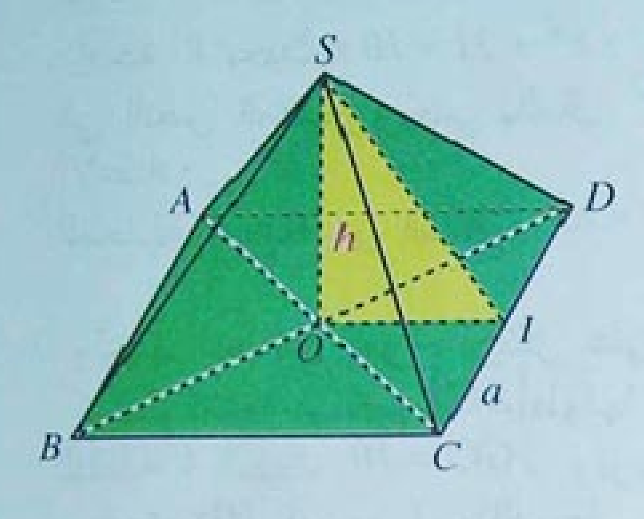
نجد مما سبق أنّ مساحة $KLZH$ تساوي 4 ($25-21=4$). إذن $KL=AH$ و $AH=\sqrt{4}=2$.
ونعلم أنّ $GH=5=x+2$، إذن $x=3$.
وإذا زدنا 2 على GH وهو نصف الأجذار بلغ سبعة ($5+2=7$).

1. ترجم النصّ الآتي بالتعبير الرياضي المتداول:
" مال وعشرة أجذاره يعدل تسعة وثلاثين درهما".
2. حلّ، باستعمال طريقة الخوارزمي المعروضة أعلاه، المعادلة: $x^2+40=14x$

نشاط 4: هرم خوفو

يعَد هرم خوفو من العجائب السبعة. بُني هذا الهرم المنتظم الذي قاعدته مربع في حوالي 2600 ق.م.
يقول المؤرخ الإغريقي هيرودوت واصفا هذا الهرم ما يلي :
" يتميّز الهرم الكبير بالبعدين المختارين لضلع قاعدته وارتفاعه بحيث تعادل مساحة المربع الذي طول ضلعه يساوي ارتفاع الهرم مساحة كلّ وجه من الأوجه المثلثية الجانبية".

ويعني ذلك، في الشكل أدناه، أنّ مساحة المثلث المتقايس الضلعين SCD تساوي مساحة المربع الذي ضلعه $[OS]$.

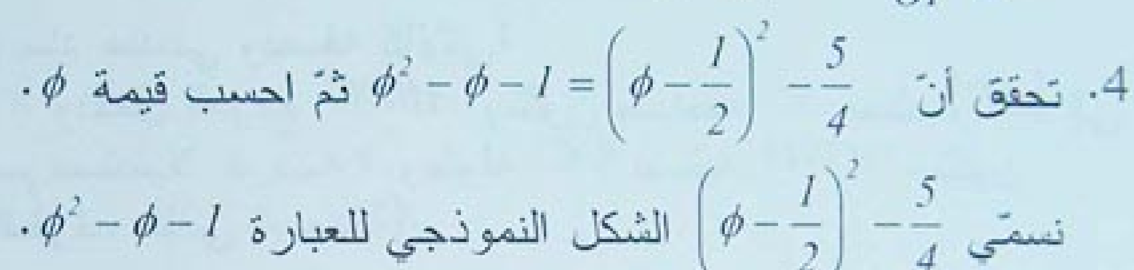


نضع I منتصف $[CD]$، $CI = a$، $OS = h$

1. احسب OI، SI ثمّ مساحة المثلث SCD.



2. بفرض صحة فرضية هيرودوت، أوجد العلاقة بين a و h.
3. نضع $\phi = \frac{SI}{OI}$. بيّن أنّ $\phi^2 - \phi - 1 = 0$.



4. تحقق أنّ $\phi^2 - \phi - 1 = \left(\phi - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ ثمّ احسب قيمة ϕ.

نسمّي $\left(\phi - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ الشكل النموذجي للعبارة $\phi^2 - \phi - 1$.

5. إذا علمت أنّ أبعاد هرم خوفو هي كالآتي:
ضلع القاعدة المربعة: 440 ذراعا ملكيا، الارتفاع: 280 ذراعا ملكيا.
(يُقدّر الذراع الملكي المستعمل في مصر القديمة بحوالي $0,52\ m$).
هل الفرضية السابقة محققة؟

الــدّرس

1. العبارات الجبرية

- المعاني المختلفة للحرف في عبارة جبرية

دور الحرف x	أمثلة
x متغير	سعر التنقل بسيارة بدلالة المسافة المقطوعة $x \mapsto f(x)$
x مجهول	أوجد x في $\mathbb{R}$ حيث $x^2 = 4$
x مقدار غير معيّن	$E(x)$ عبارة معرفة بالشكل $E(x) = 2x^2 - 3x + 5$

- الأشكال المختلفة لعبارة جبرية

A، B، C عبارات جبرية.

التسمية	الشكل	مثال	ملاحظات
مجموع	$A + B$	$2x^2+3x-1$ مجموع حدوده هي : $2x^2$، $3x$، -1.	العبارة تتضمن عمليات جمع أو عمليات طرح. يتشكل المجموع من عدّة حدود.
جداء	$A \times B$	$x(x-2)$ جداء عاملاه x، $(x-2)$.	العبارة لا تتضمن عمليات جمع أو عمليات طرح. يتشكل الجداء من عدّة عوامل .
حاصل قسمة	$\frac{A}{B}$	$\frac{x+2}{2x-1}$ حاصل قسمة بسطه $(x+2)$ ومقامه $(2x-1)$.	يتشكل حاصل قسمة من بسط و مقام .

- القيمة العددية لعبارة جبرية

تعريف

القيمة العددية لعبارة جبرية هي العدد الذي نتحصّل عليه، في حالة وجوده، عندما نعوّض الحروف بأعداد

أمثلة

- القيمة العددية للعبارة $E=x^2+3x-1$ من أجل $x=-1$ هي $(-1)^2+3(-1)-1$ أي -3.
- القيمة العددية للعبارة $A=2x-y$ من أجل $x=0$ و $y=1$ هي $2(0)-1$ أي -1 .

ملاحظة

يمكن ألا تكون لعبارة جبرية قيم عددية، من أجل بعض قيم الحروف.

مثال: العبارة $B = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$ لا يكون لها معنى إلا من أجل $x \geq 0$ و $x \neq 2$، لأنّ ليست لها قيم عددية من أجل كلّ القيم الممنوعة للحرف x.



2. قواعد الحساب الجبري

- معاني الأقواس

الأقواس ليس لها نفس الدور.

طبيعة الأقواس			دور الأقواس
أقواس غير مرتبطة بالحساب	①	أقواس دالة	$A(x)$ يعني أنّ A يتعلق بالمتغير x، لا يمكن حذف مثل هذه الأقواس.
أقواس مرتبطة بالحساب	②	أقواس متعلقة بجداء	$2x(x-3)$ يعني جداء $(x-3)$ في $2x$. للتخلص من القوسين، نوزّع $2x$ على حدي المجموع.
			$-2x(3\times 2x)$ يعني جداء $(-2x)$ في 3 في $2x$.
	③	أقواس متعلقة بمجموع	تعني تجميع حدود مجموع. يكون الاستغناء حسب القاعدة الآتية: A، B، C، D عبارات جبرية، $A+(B+C-D)=A+B+C-D$ $A-(B+C-D)=A-B-C+D$

مثال :

$$E(x)=-3x(-1\times 4x)-(x-2)+2(x-1)$$

① ② ③ ②



- المتطابقات الشهيرة

مبرهنة 1

A ، B عبارتان جبريتان.

- $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
- $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$
- $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

أمثلة :

$$(2x+1)^2=(2x)^2+2(2x)(1)+1^2=4x^2+4x+1$$

$$(x-3)^2=x^2-2x(-3)+3^2=x^2+6x+9$$

$$\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2-1=3-1=2$$

3. تحويل عبارة جبرية

يمكن تحويل عبارة جبرية مكتوبة بصيغة معينة إلى صيغة أخرى باعتماد النشر والتبسيط أو التحليل.

• النشر	• تبسيط عبارة	• التحليل
نشر جداء يعني كتابته على شكل مجموع.	تبسيط عبارة يعني كتابتها بأقلّ عدد ممكن من الحدود.	تحليل عبارة يعني كتابتها على شكل جداء.
مثال: $A=(x-1)(-2x+1)-(2x-1)^2$ النشر: $A=-2x^2+x+2x-1-(4x^2-4x+1)$ $A=-2x^2+x-2x-1-4x^2+4x-1$ نسمي الصيغة الأخيرة للعبارة منشور العبارة A.	مثال: $A=(x-1)(-2x+1)-(2x-1)^2$ النشر: $A=-2x^2+x+2x-1-4x^2+4x-1$ التبسيط: $A=-2x^2-4x^2+x+2x+4x-1-1$ $A=(-2-4)x^2+(1+2+4)x-1-1$ $A= -6x^2 + 7x -2$ نسمي الصيغة الأخيرة للعبارة الشكل المبسّط والمرتّب للعبارة A	مثال: $A=(x-1)(-2x+1)-(2x-1)^2$ نكتب: $A=-(x-1)(2x-1)-(2x-1)^2$ $A=(2x-1)[-(x-1)-(2x-1)]$ $A=(2x-1)(-x+1-2x+1)$ $A=(2x-1)(-3x+2)$ نسمي الصيغة الأخيرة للعبارة الصيغة المحللة للعبارة A.

ملاحظة

في المتطابقات الشّهيرة، يظهر كلّ من النّشر والتّحليل كما في المخطّط.

النشر →

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

← التحليل

الدوال والعبارات الجبرية (ترابط الدّوال المؤدّية من x إلى $f(x)$)

• مثال:

الدّالة $f:x \longmapsto (2x-1)^2$

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=(2x-1)^2$.

للحصول على $f(x)$، نضرب x في 2 ونطرح 1 ثمّ نربع النتيجة.

f

$x \overset{u}{\longmapsto} 2x-1 \overset{v}{\longmapsto} (2x-1)^2$

$x \overset{v}{\longmapsto} x^2$

لدينا $u(x)=2x-1$، $v(2x-1)=(2x-1)^2$

منه $f(x)=v(u(x))=(2x-1)^2$

ننتقل من x إلى $f(x)$ بتطبيق دالتين مرجعيتين على التّوالي: الدالة التآلفية u ثمّ الدالة مربع v.

5. المساويات والمعادلات

- المساويات

أمثلة	خواص
المتطابقات الشهيرة هي مساويات: $(2+3)^2=2^2+2\times2\times3+3^2=25$ $(2-3)^2=2^2-2\times2\times3+3^2=1$ $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2})^2-1^2=2-1=1$	▪ تكون المساواة صحيحة دائما من أجل كلّ القيم المعطاة للحروف.
▪ a، b عددان حقيقيان، $(a+b)^2-3ab=a^2-ab+b^2$ ▪ من أجل الدالة f التي ترفق بكلّ عدد حقيقي x مربعه، نكتب: $x \longmapsto f(x)=x^2$ E عبارة جبرية بحيث: $E(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$	▪ نكتب مساواة عند: − إجراء حساب جبري. − تعريف دالة أو عبارة.
إذا كان $A=B$، فيمكن استبدال العبارة A بالعبارة B.	▪ تسمح المساواة باستعمال مبدأ التعويض في برهان.

- المعادلات

أمثلة	خواص
هل يوجد عدد حقيقي x حيث $2(x+1)=3x-5$ ؟ x هو المجهول.	▪ أمام معادلة يُطرح تساؤل: هل يوجد عدد (أو أعداد) x من D تحقق المساواة ... ؟ تسمّى D المجموعة المرجعية للمعادلة. ▪ عندما نعوّض x في معادلة بقيمة معينة من D ونجد المساواة الناتجة محققة، نقول إنّ هذه المعادلة محققة من أجل تلك القيمة. نسمّي مثل هذه القيمة حلا للمعادلة.
7 حلّ للمعادلة $2(x+1)=3x-5$ لأنه، عند تعويض x بالعدد 7، تتحقق المساواة: $2(7+1)=3\times7-5$	▪ حلّ معادلة ذات المتغيّر x يعني تعيين كلّ قيم x من D التي تحققها.
المعادلة $2x-3=8$ تكافئ $2x-3+3=8+3$ أي $2x=11$ وتكافئ $2x\times\frac{1}{2}=11\times\frac{1}{2}$ أي $x=\frac{11}{2}$. حلّ المعادلة $2x-3=8$ هو العدد $x=\frac{11}{2}$.	▪ نقول عن معادلتين إنهما متكافئتان عندما يكون لهما نفس مجموعة الحلول. ▪ إذا أضفنا نفس العدد إلى طرفي معادلة نحصل على معادلة مكافئة لها. ▪ إذا ضربنا في نفس العدد غير المعدوم طرفي معادلة نحصل على معادلة مكافئة لها.

• معادلات يؤول حلها إلى حلّ معادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد

• "معادلة جداء"

مبرهنة 2

يكون جداء عدّة عوامل معدوما إذا وفقط إذا كان احد العوامل على الأقل معدوما.

$A(x)\times B(x)=0$ تكافئ $A(x)=0$ أو $B(x)=0$

ملاحظة

مثل المعادلة $A(x)\times B(x)=0$ ، تسمّى "معادلة جداء".

مثال: حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة:

$$(2x-1)^2+x(1-2x)=4x^2-1 \qquad (1)$$

بعد تحليل $4x^2-1$ في المعادلة (1)، نلاحظ وجود عامل مشترك هو $(2x-1)$. مما يسمح لنا بكتابة (1) على شكل معادلة جداء:

$$(2x-1)^2+x(1-2x)=4x^2-1$$
$$(2x-1)^2+x(1-2x)=(2x-1)(2x+1)$$
$$(2x-1)^2+x(1-2x)-(2x-1)(2x+1)=0$$
$$(2x-1)\left[(2x-1)-x-(2x+1)\right]=0$$
$$(2x-1)(-x-2)=0$$

منه $2x-1=0$ أو $-x-2=0$

$x=\frac{1}{2}$ أو $x=-2$

إذن، مجموعة حلول المعادلة هي: $S=\left\{-2\,;\,\frac{1}{2}\right\}$

نتيجة

n عدد طبيعي غير معدوم.

$\left[A(x)\right]^n=0$ تكافئ $A(x)=0$

مثال: المعادلة $(2x+3)^2=0$ تكافئ $2x+3=0$ أي $x=-\frac{3}{2}$

• "معادلة حاصل قسمة"

مبرهنة 3

المعادلة $\frac{A(x)}{B(x)}=0$ تكافئ $A(x)=0$ و $B(x)\neq 0$

ملاحظة

مثل المعادلة $\frac{A(x)}{B(x)}=0$ ، تسمّى "معادلة حاصل قسمة".



مثال: حلّ، في $\mathbb{R}$، المعادلة: $\frac{4x^2-1}{2x+1}=0$ (2)

المعادلة (2) تكافئ: $4x^2-1=0$ و $2x+1\neq 0$

(يسمح الشرط $2x+1\neq 0$ بتعيين المجموعة المرجعية للمعادلة).

أي $(2x-1)(2x+1)=0$ و $x\neq -\frac{1}{2}$ أي ($x=\frac{1}{2}$ أو $x=-\frac{1}{2}$) و $x\neq -\frac{1}{2}$

بما أنّ $x\neq -\frac{1}{2}$، ينتج $x=\frac{1}{2}$ الحلّ الوحيد للمعادلة.

إذن مجموعة حلول المعادلة (2) هي: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

6. المتراجحات

- إشارة العبارة $ax+b$ حيث $(a\neq 0)$

لدراسة إشارة العبارة $ax+b$ حيث $(a\neq 0)$، نحلّ، في $\mathbb{R}$، إحدى المتراجحتين $ax+b\geq 0$ أو $ax+b\leq 0$ ونلخص النتائج كالآتي:

- $a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

- $a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

قاعدة:

يمكن تلخيص إشارة العبارة $ax+b$ كما هو موضح في الجدول المقابل:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		عكس إشارة a	0	إشارة a	

المتراجحات

- "متراجحة جداء"

مبرهنة 4

$A(x)$ ، $B(x)$ عبارتان جبريتان.
المتراجحة $A(x)\times B(x)\geq 0$ تكافئ $A(x)$ و $B(x)$ من نفس الإشارة.

ملاحظة

مثل المتراجحة $A(x)\times B(x)\geq 0$ تسمّى "متراجحة جداء".

مثال: حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $x^2-9<0$ (1)

(1) تكافئ $(x-3)(x+3)<0$، لندرس إذن إشارة العبارة $(x-3)(x+3)$:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

نقرأ في السّطر الأخير للجدول أنّ $(x-3)(x+3)$ يكون سالبا تماما على المجال $]-3;3[$
بالتالي، (1) تكافئ $x\in\,]-3;3[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (1) هي: $]-3;3[$.

• متراجحة حاصل قسمة

مبرهنة 5

$A(x)$ ، $B(x)$ عبارتان جبريتان.
المتراجحة $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ تكافئ $A(x) \times B(x) \geq 0$ و $B(x) \neq 0$

ملاحظة

مثل المتراجحة $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ ، تسمّى متراجحة "حاصل قسمة".

مثال: حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{x-2}{2x+3} \geq 0$ (2)

تكون العبارة $\frac{x-2}{2x+3}$ معرفة عندما يكون $2x+3$ غير معدوم، بمعنى $x \neq -\frac{3}{2}$

لدراسة إشارة حاصل القسمة هذا، ندرس إشارة الجداء $(x-2)(2x+3)$باستعمال جدول الإشارات:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-2}{2x+3}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

نقرأ في السّطر الأخير للجدول أنّ $\frac{x-2}{2x+3}$ يكون موجبا (أكبر من 0 أو يساويه) على المجموعة

$]-\infty;-\frac{3}{2}[\cup[2;+\infty[$. مجموعة حلول المتراجحة (2) هي: $]-\infty;-\frac{1}{2}[\cup[2;+\infty[$.

7- العبارة ax^2+bx+c حيث $a\neq 0$

• الشكل النموذجي للعبارة ax^2+bx+c $(a\neq 0)$

من أجل كلّ عدد حقيقي x و a عدد حقيقي غير معدوم،

لدينا: $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)$ لكن $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$

ومنه $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

نضع $\Delta = b^2-4ac$ ، عندئذ $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

تعريف

- العدد b^2-4ac هو مُميّز العبارة ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ ونرمز إليه بالرمز Δ (نقرأ " دلتا").
- $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ هو الشكل النموذجي للعبارة ax^2+bx+c $(a\neq 0)$.

أمثلة:

الشكل النموذجي للعبارة x^2+4x-1 هو $(x+2)^2-5$ ونكتب: $x^2+4x-1=(x+2)^2-5$

الشكل النموذجي للعبارة $3x^2-12x-36$ هو $3\left[(x-2)^2-16\right]$ ونكتب:

$$3x^2-12x-36=3(x^2-4x-12)$$
$$=3\left[(x-2)^2-16\right]$$

- حلّ المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

نكتب عبارة الطرف الأوّل للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ على شكلها النموذجي، عندئذ نميّز ثلاث حالات:

- $\Delta>0$ نكتب $\frac{\Delta}{4a^2}=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$.

ومنه
$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

للمعادلة حلان هما: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

- $\Delta=0$ $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. ومنه للمعادلة حلّ وحيد هو: $x_0=\frac{-b}{2a}$

- $\Delta<0$ لدينا $-\frac{\Delta}{4a^2}>0$، وبالتالي $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)>0$ ومنه المعادلة لا تقبل حلولا.

مبرهنة

لتكن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ مع $(a\neq 0)$، Δ مميّزها:

- إذا كان $\Delta>0$ فإنّ المعادلة تقبل حلّين x_1، x_2: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
  وينتج $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
- إذا كان $\Delta=0$ فإنّ المعادلة تقبل حلا مضاعفا x_0: $x_0=\frac{-b}{2a}$ (نعني بحلّ مضاعف، حلين متطابقين) وينتج $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$
- إذا كان $\Delta<0$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلولا والعبارة ax^2+bx+c لا تحلل.

أمثلة

1) في المعادلة $x^2+2x-2=0$ لدينا $\Delta=12>0$
إذن فهي تقبل حلين هما: $x_1=-1-\sqrt{3}$ ، $x_2=-1+\sqrt{3}$.

2) في المعادلة $2x^2-12x+18=0$ لدينا $\Delta=0$، إذن فهي تقبل حلا مضاعفا هو: $x_0=3$.

3) في المعادلة $x^2-x+2=0$ لدينا $\Delta=-3<0$ أي $\Delta<0$ إذن فهي لا تقبل حلولا.

طرائق وتمارين محلولة

• نشر وتبسيط وترتيب عبارة جبرية

أنشر وبسّط ثمّ رتّب العبارة $2(x^2-x+1)-x(x+2)+3$

تعليق

نلاحظ أنّ الشكل المبسّط للعبارة مرتّب حسب قوى x تنازليا.

حلّ

ننشر العبارة: $2(x^2-x+1)-x(x+2)+3=2x^2-2x+2-x^2-2x+3$

نبسّط العبارة الناتجة:

$$2x^2-2x+2-x^2-2x+3=2x^2-x^2-2x-2x+2+3$$
$$=(2-1)x^2-(2+2)x+5$$
$$=x^2-4x+5$$

طريقة

لنشر وتبسيط وترتيب عبارة، ننشر الجداءات، إن وُجدت، نحلل الحدود المتشابهة ونرتب النتيجة حسب قوى x (الحرف) تنازليا.

• تحليل عبارة جبرية

حلّل العبارات الآتية:

(1) $x(x-2)-5(2-x)$ (2) $4x^2-12x+9$ (3) $2x^2+5x-3$

تعاليق

• نبحث عن العوامل المشتركة بين حدود العبارة. في هذه الحالة، يكون $(x-2)$ عاملا مشتركا بعد إجراء التغيير $2-x=-(x-2)$.

• نتعرّف على إحدى المتطابقات الشهيرة بالتمعن في حدود العبارة.

• نلاحظ عدم وجود عوامل مشتركة بين حدود العبارة ولا نتعرف على إحدى المتطابقات الشهيرة.

حلّ

(1) لدينا $2-x=-(x-2)$.

العبارة تصبح $x(x-2)+5(x-2)$.

ومنه $x(x-2)+5(x-2)=(x-2)(x+5)$

(2) العبارة على شكل مجموع ذي ثلاثة حدود: $4x^2$ ، $-12x$ ، 9

فيها: $4x^2$ مربع $2x$ ، 9 مربع 3 ، $12x=2\times 2x\times 3$

وبالتالي يكون تحليلها من الشكل $(a-b)^2$ مع $a=2x$ ، $b=3$

أي $4x^2-12x+9=(2x-3)^2$

(3) العبارة من الشكل ax^2+bx+c $(a\neq 0)$، نكتبها على الشكل النموذجي.

$$2x^2+5x-3=2\left[x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right]=2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right]=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)$$

طريقة

لتحليل عبارة جبرية، يمكن إتباع إحدى الطرائق التالية:

- نستعمل المساواتين $ab+ac=a(b+c)$ ، $ab-ac=a(b-c)$ (نتعرّف على عامل مشترك)
- نستعمل مباشرة المتطابقات الشهيرة $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ، $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ ، $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
- نستعمل الشكل النموذجي للعبارة $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

حلّ كلا من المتراجحتين الآتيتين:

(1) $(3x-2)^2 \geq (x-1)^2$ (2) $\frac{4x+1}{(2x-1)^2} < \frac{1}{2x-1}$

حلّ

(1) ننقل كلّ الحدود إلى نفس الطرف:

$$(3x-2)^2 - (x-1)^2 \geq 0$$

نحلل الطرف الأوّل:

$$[(3x-2)-(x-1)][(3x-2)+(x-1)] \geq 0$$
$$(3x-2-x+1)(3x-2+x-1) \geq 0$$
$$(2x-1)(2x-3) \geq 0$$

ندرس إشارة $(2x-1)(2x-3)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-1)(2x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

نستخلص أنّ مجموعة حلول المتراجحة هي:

$$\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$$

(2) المقامات تتضمن المجهول، نبحث إذن عن الشروط:

$2x-1=0$ تكافئ $x=\frac{1}{2}$. وبالتالي يكون $\frac{1}{2}$ قيمة ممنوعة.

ننقل كلّ الحدود إلى نفس الطرف: $\frac{4x+1}{(2x-1)^2} \quad \frac{1}{2x-1} < 0$

نوّحد المقامات:

$\frac{4x-1-(2x-1)}{(2x-1)^2} < 0$ أي $\frac{2x}{(2x-1)^2} < 0$

ندرس إشارة $\frac{2x}{(2x-1)^2}$:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$\frac{2x}{(2x-1)^2}$		$-$	0	$+$	‖	$+$	

نستخلص أنّ مجموعة حلول المتراجحة هي: $]-\infty ; 0[$

تعاليق

- نتعرّف على فرق مربعين في الطرف الأوّل.
- عند دراسة إشارة جداء، نبيّن في جدول إشارة كلّ عامل ثمّ نستنتج إشارة الجداء باستعمال قاعدة الإشارات.
- عندما تتضمن مقامات حدود المتراجحة المجهول، نبدأ بتعيين القيم الممنوعة ونبيّن ذلك في جدول الإشارات بخط متصل مضاعف.
- إشارة $\frac{A}{B}$ هي نفسها إشارة $A \times B$، بشرط $A \neq 0$.

إشارة $\frac{2x}{(2x-1)^2}$ تتوقف على إشارة $2x$ فقط، باعتبار أنّ $(2x-1)^2 \geq 0$

طريقة

لحلّ متراجحة، نعيّن عند الضرورة القيم الممنوعة وننقل كلّ الحدود إلى نفس الطرف ليصبح الطرف الآخر معدوما. ندرس إشارة العبارة المحصّل عليها باستعمال جدول الإشارات ونستخلص الحلول المطلوبة.

x عدد حقيقي ، $E(x)=(x-1)^2-16$

1. تحقق من أنّ:

أ) $E(x)=x^2-2x-15$ ب) $E(x)=(x-5)(x+3)$

2. استعمال الصيغة الأنسب للعبارة $E(x)$:

أ) احسب $E(0)$

ب) حلّ المعادلات: $E(x)=0$ ؛ $E(x)=9$ ؛ $E(x)=-15$

تعاليق	حلّ
نستعمل المتطابقة الشهيرة $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	1. أ) ننشر العبارة $E(x)$ في صيغتها المفروضة ونجد: $(x-1)^2-16=x^2-2x+1-16=x^2-2x-15$
نستعمل المتطابقة الشهيرة $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$	ب) نحلل العبارة $E(x)$ في صيغتها المفروضة ونجد: $(x-1)^2-16=(x-1-4)(x-1+4)=(x-5)(x+3)$
نختار الصيغة المنشورة لأنّ كلّ الحدود المتعلقة بـ x^2 و x تنعدم من أجل $x=0$	2. أ) لحساب $E(0)$، نستعمل الصيغة المنشورة للعبارة ونجد: $E(0)=0^2-2\times 0-15=-15$
الطرف الثاني للمعادلة معدوم، يستحسن استعمال الصيغة المحللة.	ب) لحلّ المعادلة $E(x)=0$ ، نستعمل الصيغة المحللة للعبارة ونجد: $E(x)=0$ تكافئ $(x-5)(x+3)=0$ تكافئ $x-5=0$ أو $x+3=0$ أي $x=5$ أو $x=-3$ ومنه مجموعة حلول المعادلة: $\{-3\ ;\ 5\}$
نلاحظ أنّ $16+9=25$ ، نحلّ المعادلة على الشكل $x^2=a$.	لحلّ المعادلة $E(x)=9$، نستعمل الصيغة المفروضة للعبارة ونجد: $E(x)=9$ تكافئ $(x-1)^2-16=9$ تكافئ $(x-1)^2=25$ تكافئ $x-1=5$ أو $x-1=-5$ أي $x=6$ أو $x=-4$ ومنه مجموعة حلول المعادلة: $\{-4\ ;\ 6\}$
نتخلص من -15 في طرفي المعادلة ونتحصل على معادلة جداء.	لحلّ المعادلة $E(x)=-15$، نختار الصيغة المنشورة للعبارة ونجد: $E(x)=-15$ تكافئ $x^2-2x-15=-15$ تكافئ $x^2-2x=0$ تكافئ $x(x-2)=0$ تكافئ $x=0$ أو $x-2=0$ أي $x=0$ أو $x=2$ ومنه مجموعة حلول المعادلة: $S=\{0\ ;\ 2\}$

طريقة

لحلّ معادلة ، نكتبها على إحدى الصيغ (المبسّطة والمرتّبة، المحللة) ونجري بعد ذلك الحسابات الضرورية.

• **إيجاد ترابط الدوال المرجعية الموافق لدالة معطاة**

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالشكل $f(x)=\dfrac{2x-3}{x}$.

من بين الاقتراحات الآتية، عيّن ترابط الدوال المرجعية الموافق للمرور من x إلى $f(x)$:

1. نطبق الدالة التآلفية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $g(x)=2x-3$، ثمّ الدالة مقلوب h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالشكل $h(x)=\dfrac{1}{x}$.
2. نطبق دالة المقلوب h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالشكل $h(x)=\dfrac{1}{x}$ ثمّ الدالة التآلفية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $g(x)=2x-3$.
3. نطبق دالة المقلوب h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالشكل $h(x)=\dfrac{1}{x}$ ثمّ الدالة التآلفية k المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $k(x)=2-3x$.

حلّ	تعاليق
1 . نحسب صورة 3 بالدلة f وبالترابط " g ثمّ h ": ▪ $f(3)=\dfrac{2(3)-3}{3}=1$ ▪ $3\xrightarrow{g}3\xrightarrow{h}\dfrac{1}{3}$ الصورتان مختلفتان، وبالتالي فالترابط الأوّل غير موافق.	
2 . نحسب صورة 3 بالدلة f وبالترابط " h ثمّ g ": ▪ $f(3)=1$ ▪ $3\xrightarrow{h}\dfrac{1}{3}\xrightarrow{g}2\left(\dfrac{1}{3}\right)-3=\dfrac{2-9}{3}=-\dfrac{7}{3}$ الصورتان مختلفتان، وبالتالي فالترابط الثاني غير موافق.	لدحض افتراض ما، يكفي إيجاد مثال مضاد.
3 . نحسب صورة 3 بالدلة f وبالترابط " h ثمّ k ": ▪ $f(3)=1$ ▪ $3\xrightarrow{h}\dfrac{1}{3}\xrightarrow{k}2-3\left(\dfrac{1}{3}\right)=2-1=1$ الصورتان متساويتان، وبالتالي يمكن أن يكون الترابط الثالث موافقا. للبرهنة على ذلك: نعلم أنه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}^*$ ، $f(x)=\dfrac{2x-3}{x}=\dfrac{2x}{x}-\dfrac{3}{x}=2-\dfrac{3}{x}$ ولدينا أيضا حسب الترابط " h ثمّ k ": $x\xrightarrow{h}y=\dfrac{1}{x}\xrightarrow{k}z=2-3y=2-\dfrac{3}{x}$ نستنتج أنّ $f(x)=k(h(x))$	لتأكيد افتراض ما، لا نكتفي بالتحقق من صحته من أجل بعض الحالات.

طريقة

لإيجاد ترابط الدوال المرجعية للمرور من x إلى $f(x)$ ، نأخذ بالاعتبار الترتيب الذي نجري فيه العمليات لحساب الصورة.

- حلّ معادلة من الدرجة الثانية

حلّ كلا من المعادلات الآتية:

1) $x^2+1=0$ 2) $x^2+6x+9=0$ 3) $9-(x-3)^2=\frac{17}{2}$ 4) $3x^2-2x+1=0$

تعاليق	حلّ
تكتب أيضا المعادلة على الشكل $x^2=-1$، ثمّ نقارن الطرفين.	1. لدينا من أجل كلّ عدد حقيقي x، $x^2\geq 0$ وبالتالي $x^2+1>0$. المعادلة $x^2+1=0$ ليست لها حلول. مجموعة حلول المعادلة هي ϕ.
نتعرّف على متطابقة شهيرة في الطرف الأول ثمّ نحلله.	2. المعادلة $x^2+6x+9=0$ تكافئ $(x+3)^2=0$ تكافئ $x+3=0$ أي $x=-3$ مجموعة حلول المعادلة هي $\{-3\}$.
نتعرّف على متطابقة شهيرة (فرق مربعين) في الطرف الأول، لكن ذلك لا يساعدنا كثيرا باعتبار أنّ الطرف الثاني للمعادلة غير معدوم.	3. المعادلة $9-(x-3)^2=\frac{17}{2}$ تكافئ $9-(x^2-6x+9)=\frac{17}{2}$ تكافئ $-2x^2-12x-17=0$ لدينا في هذه الحالة $a=-2$، $b=-12$، $c=-17$ وبالتالي $\Delta=(-12)^2-4(-2)(-17)=8$ المعادلة لها، إذن، حلان: $x_1=\frac{-(-12)-\sqrt{8}}{2(-2)}=\frac{12-2\sqrt{2}}{-4}=\frac{-6+\sqrt{2}}{2}$ $x_2=\frac{-(-12)+\sqrt{8}}{2(-2)}=\frac{12+2\sqrt{2}}{-4}=\frac{-6-\sqrt{2}}{2}$ مجموعة حلول المعادلة هي $\left\{\frac{-6-\sqrt{2}}{2};\frac{-6+\sqrt{2}}{2}\right\}$
	4. لدينا في هذه الحالة $a=3$، $b=-2$، $c=1$ وبالتالي $\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 3=-8$ المعادلة، إذن، ليس لها حلول. مجموعة حلول المعادلة هي ϕ.

طريقة

لحلّ معادلة من الشكل $ax^2+bx+c=0$ مع $a\neq 0$:

- نتمعّن في إمكانية تحليل المعادلة.
- في الحالات الأخرى، نستعمل المميّز.

ترجمة مشكلة وحلها باستعمال معادلة

$ABCD$ مستطيل حيث $AB=10cm$، $AD=4cm$، I منتصف $[AB]$، J منتصف $[CD]$.
M نقطة متغيرة من $[CD]$.
عيّن مواضع M التي يكون من أجلها المثلث AMB قائما في M.



حلّ

تعاليق

يتعلق الأمر في هذه الوضعية بترييض مسألة.

- نضع $MJ = x$. لدينا $0 \leq x < 5$

يمكن تبرير هذا الاختيار بالاعتماد على التخمين:
الدائرة ذات القطر $[AB]$ المحيطة بالمثلث القائم AMB تقطع $[CD]$ في نقطتين متناظرتين بالنسبة إلى J تجيبان عن السؤال.

يمكن اعتبار M تتغيّر على كلّ القطعة $[CD]$ بدلا من $[DJ]$ ونضع $DM = x$ ،ويكون في هذه الحالة $0 \leq x \leq 10$.
فنتحصّل على المعادلة $x^2 - 10x + 16 = 0$.

- نعبّر عن DM و MC بدلالة x، نجد:

$$MC = 5 + x \quad ، DM = 5 - x$$

حسب مبرهنة فيثاغورس، المثلث AMB قائم في M يكافئ:

$$AM^2 + MB^2 = AB^2$$

لكن، $AM^2 = AD^2 + DM^2$ ، $MB^2 = MC^2 + CB^2$

منه $MC^2 + CB^2 + AD^2 + DM^2 = AB^2$

أي $(5+x)^2 + 4^2 + 4^2 + (5-x)^2 = 10^2$

بالنشر والتبسيط، نجد: $2x^2 + 82 = 100$ أي $x^2 = 9$

نترجم النصّ بمعادلة رياضية المجهول فيها هو x.

- وبما أنّ $0 \leq x < 5$، فإنّ $x = 3$.

نعيد نفس العمل عندما تكون M من JC، نجد أيضا $x = 3$.

عند حلّ المعادلة، لا نعتبر إلا الحلول التي توافق المعطيات.

- توجد، إذن، نقطتان تحققان المطلوب.

لإنشائهما، نرسم الدائرة التي قطرها $[AB]$.

لا نكتفي بتعيين عدد النقط، يستحسن إنشاؤها أيضا.

طريقة

لترجمة مشكلة وحلّها باستعمال معادلة:

- نختار المجهول.
- نترجم النص بمعادلة رياضية.
- نحلّ المعادلة.
- نستخلص.

تعلّم البرهنة

- إنجاز استدلالات تتدخل فيها استلزامات أو تكافؤات .

1. أ) برهن أنه مهما كان العددان الحقيقيان الموجبان a، b:

$a = b$ يكافئ $a^2 = b^2$

ب) لتكن المعادلة: $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-4}$ (1)

إذا كانت للمعادلة (1) حلول، فلماذا يجب أن تنتمي هذه الحلول إلى المجال $[2\,;+\infty[$ ؟

باستعمال الخاصية المبرهن عليها في السؤال أ)، حلّ في $[2\,;+\infty[$ المعادلة (1).

2. لتكن المعادلة: $\sqrt{x-2} = \sqrt{13-2x}$ (2)

عيّن المجموعة المرجعية للمعادلة (2) ثمّ حلّ هذه المعادلة.

3. تمرين:

إليك نصّ السؤال والحلّ المقترح له من قبل تلميذ. ما رأيك في هذا الحل؟

نص السؤال: عيّن مجموعة النقط المشتركة للمنحني (C) الذي معادلته $y = \sqrt{2(x+51)}$ والمستقيم (D) الذي معادلته $y = 9 - x$.

الحل المقترح:

إذا كانت M إحداثياها (x, y) مشتركة بين (C) و(D)، فإن إحداثييها يحققان معادلة (C) ومعادلة (D) وبالتالي هما حل للجملة:

$$\begin{cases} y = 9-x \\ y = \sqrt{2(x+51)} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} y = 9-x \\ (9-x)^2 = 2(x+51) \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} y = 9-x \\ x^2-20x-21=0 \end{cases}$$

النقطة M مشتركة بين (C) و(D) إذا وفقط إذا كانت فاصلتها حلا للمعادلة:

$$(1) \ldots x^2 - 20x - 21 = 0$$

لكن $x^2 - 20x - 21 = (x-10)^2 - 121$، فالمعادلة (1) تقبل حلين هما -1، 21.

ونستنتج أن (C) و(D) يشتركان في نقطتين هما $M_1(-1\,;10)$، $M_2(21\,;-12)$.

إعادة استثمار

حرّر جوابا تحلّ فيه المعادلة الآتية، مع إبراز العبارات الدالة على الاستلزام أو التكافؤ في خطوات حلك:

$$\frac{3x-4}{x+1} = \frac{-7}{x} + \frac{7-x}{x^2+x}$$



استعمال تكنولوجيات الإعلام والاتصال

- تحليل عبارة جبرية باستعمال مجدول
- ترابط دوال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل:

$$f(x)=\frac{-2}{x+1}-3$$

يمكن الحصول على عبارة $f(x)$ ، من أجل $x\neq -1$، حسب ترابط الدوال المألوفة الآتي:

$$x \xmapsto{+1} x+1 \xmapsto{\text{مقلوب}} \frac{1}{x+1} \xmapsto{\times(-2)} -2\left(\frac{1}{x+1}\right) \xmapsto{-3} 2\left(\frac{1}{x+1}\right)-3$$

بنفس الكيفية، اكتب ترابط الدوال المألوفة الذي يسمح بكتابة العبارة: $f(x)=-(x-3)^2+1$

- اكتشاف ترابط دوال مرجعية موافق

لاحظ جدول القيم الآتي، استنتج عبارة ممكنة للدالة $x\mapsto f(x)$،
انطلاقا من الدوال المرجعية h، g، k.
(القيم مُدورة إلى الجزء من المائة).

x	g(x)	h(x)	k(x)		f(x)
-3	9	-9	-0,33		-0,11
-2,5	6,3	-8	-0,4		-0,13
-2	4	-7	-0,5		-0,14
-1,5	2,3	-6	-0,67		-0,17
-1	1	-5	-1		-0,2
-0,5	0,3	-4	-2		-0,25
0	0	-3	####		-0,33
0,5	0,3	-2	2		-0,5
1	1	-1	1		-1
1,5	2,3	0	0,67		####
2	4	1	0,5		1
2,5	6,3	2	0,4		0,5
3	9	3	0,33		0,33

إرشادات:

- للتعرّف على دالة تآلفية، يمكن التفكير في استعمال الخاصية المميزة.
- للتعرّف على دالة المربع ودالة المقلوب، يمكن التفكير في استعمال شفعية كلّ منهما وأثر ذلك على جدول قيمها على مجال متناظر.
- لإيجاد عبارة الدالة f، يمكن تجريب التركيبات المختلفة للدوال h، g، k.

إعادة استثمار

في الجدول المقابل f، g دالتان مرجعيان.

1. بتحليل قيم $f(x)$ من أجل بعض الأعداد من المجال $[-2\,;\,2]$، استنتج عبارة $f(x)$.
2. أكمل خانات العمود الثاني من الجدول المقابل.

x	g(x)	g(x)
-2		0
-1,5		1,5
-1		3
-0,5		4,5
0		6
0,5		7,5
1		9
1,5		10,5
2		12

حـــل مسألة إدماجيـــة

الهدف: الاستعانة بالحاسبة البيانية لاختبار صحّة مخمّنة

لتكن الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ حيث:

$$f(x)=x^3-1 \quad ; \quad g(x)=x^3-x^2-(x+1)(x-1)^2$$

1. دون استعمال النشر والحاسبة، احسب: $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(-1)$ ثمّ $g(0)$ ، $g(1)$ ، $g(-1)$
2. ما هو التخمين الذي يمكن وضعه ؟
3. باستعمال حاسبة ، قارن بين قيم العبارتين المعرفتين للدالتين من أجل قيم أخرى للعدد x .
   (تعطى جداول المقارنة)
   هل الجداول تؤكد التخمين الموضوع سابقا ؟
4. أنشئ، بحاسبة بيانية، المنحنيين الممثلين للدالتين.
   ماذا تمثّل الأعداد 0 ، 1، -1 بالنسبة للمنحنيين ؟ ما هي المعادلة التي تفسّر ذلك ؟

---

1. بالتعويض المباشر في العبارتين، نحصل على:
   $f(0)=-1$ ، $f(1)=0$ ، $f(-1)=-2$
   $g(0)=-1$ ، $g(1)=0$ ، $g(-1)=-2$

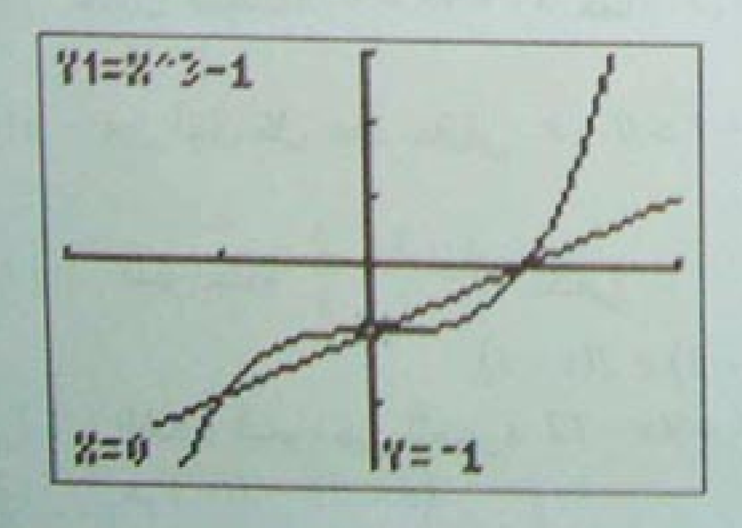
2. بملاحظة النتائج السابقة، نقول أنّه يمكن أن تكون العبارتان المعرفتان للدالتين متساويتين، أي أنّ $f(x)=g(x)$.

3. بوضع
   $Y_1=x^3-1$
   $Y_2=x^3-x^2-(x+1)(x-1)^2$

X	Y1	Y2
-2	-9	-3
-1	-2	-2
0	-1	-1
1	0	0
2	7	1
3	26	2
4	63	3

X=4

بمقارنة النتائج المحصّل عليها من أجل قيم أخرى لـــ x ،
يتبيّن أنّ التخمين الموضوع عند 2) غير صحيح.



4. بقراءة بيانية، نلاحظ أنّ المنحنيين يشتركان في ثلاث نقاط والأعداد 0 ، 1، -1 هي فواصل هذه النقاط.

• يمكن تفسير النتائج السابقة بحلّ المعادلة $f(x)=g(x)$.

تمـــارين ومســـائل

أصحيح أم خاطئ؟

بيّن إن كان النصّ صحيحا أم خاطئا مع التبرير.

1. x عدد حقيقي.
x^2-2 فرق بين مربعين.

2. A عبارة جبرية حيث $A=x^2-3x-4$.
من أجل $x=0$، $A=-4$

3. من أجل كلّ عدد حقيقي x،
$(-2x-1)^2=4x^2-4x+1$

4. من أجل كلّ عدد حقيقي غير معدوم x،
$\frac{1}{x^2+2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}$

5. من أجل كلّ عدد حقيقي x،
$(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

6. A عبارة جبرية حيث $A=(-x+2)^2$
الشكل المنشور والمبسط للعبارة A
هو: x^2+4

7. تحليل العبارة $9-x^2$ هو $(x-3)(x+3)$

8. بتطبيق الدالة $x\mapsto x+1$، متبوعة بالدالة المربع ثمّ الدالة المقلوب نحصل على الدالة $x\mapsto\frac{1}{x^2+1}$

9. حلول المعادلة $x^2+49=0$ هما: 7، -7

10. من أجل كلّ عدد حقيقي x، $-x-1\leq 0$

11. المتراجحة $\frac{x-3}{x-1}\geq\frac{2}{3}$ تكافئ
$3(x-3)\geq 2(x-1)$

12. الشكل النموذجي للعبارة $A=x^2+4x-12$
هو: $(x+2)^2-16$

13. المعادلة $-x^2-x-1=0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

العبارة الجبرية

14. x عدد حقيقي.
في كلّ حالة من الحالات الآتية، عيّن طبيعة كلّ عبارة معطاة.
أ) x^2+2x
ب) $x(2x^2+1)+2$
حـ) $(x-1)x^2$
د) $\frac{2}{3}x(x-1)^2$
هـ) $\frac{1}{x^2+1}$

15. عبّر عن النصوص التالية بعبارات مناسبة.
أ) معاكس ضعف x.
ب) مربع مجموع x و -1
حـ) مجموع مقلوب x و -1
د) مقلوب مجموع x و -1

16. ما هي التعليمات اللازمة لكتابة العبارة الآتية:
$$\frac{x^2}{x^3-1}-2$$

17. x عدد حقيقي، $E(x)=-2(x+1)^2-3x+1$
أ) أحسب $E(0)$
ب) أنشر وبسّط العبارة.
حـ) عوّض x بالقيمة 0 في العبارة الناتجة، هل تجد نفس النتيجة كما في أ) ؟

18. احسب عندما يكون ذلك ممكنا القيم العددية للعبارات الآتية من أجل قيم المتغيرات المعطاة.
أ) $A=x(x^2-1)$ ، $x=\sqrt{2}$
ب) $B=\frac{x+y}{xy}$ ، $x=0$، $y=-1$
حـ) $\sqrt{-x+3}$ ، $x=\frac{5}{3}$
د) $\frac{x^2+1}{\sqrt{x-1}}$ ، $x=1$

19. بيّن أنّ $(a+b)^3\neq a^3+b^3$



حــــلّ مسألة إدماجيـــة

الهدف: الاستعانة بالحاسبة البيانية لاختبار صحّة مخمّنة

لتكن الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ حيث:

$$f(x)=x^3-1 \quad ; \quad g(x)=x^3-x^2-(x+1)(x-1)^2$$

1. دون استعمال النشر والحاسبة، احسب: $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(-1)$ ثمّ $g(0)$ ، $g(1)$ ، $g(-1)$
2. ما هو التخمين الذي يمكن وضعه ؟
3. باستعمال حاسبة ، قارن بين قيم العبارتين المعرفتين للدالتين من أجل قيم أخرى للعدد x .
   (تعطى جداول المقارنة)
   هل الجداول تؤكد التخمين الموضوع سابقا ؟
4. أنشئ، بحاسبة بيانية، المنحنيين الممثلين للدالتين.
   ماذا تمثّل الأعداد 0 ، 1، -1 بالنسبة للمنحنيين ؟ ما هي المعادلة التي تفسّر ذلك ؟

---

1. بالتعويض المباشر في العبارتين، نحصل على:
$$f(0)=-1 \quad ، \quad f(1)=0 \quad ، \quad f(-1)=-2$$
$$g(0)=-1 \quad ، \quad g(1)=0 \quad ، \quad g(-1)=-2$$

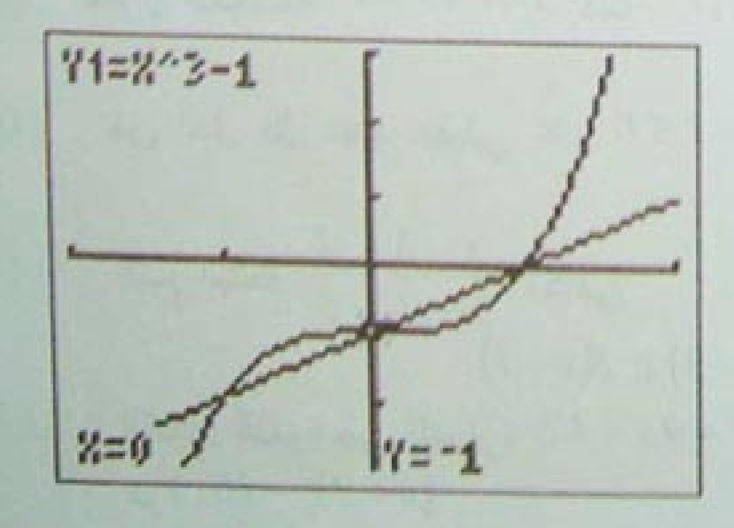
2. بملاحظة النتائج السابقة، نقول أنّه يمكن أن تكون العبارتان المعرفتان للدالتين متساويتين، أي أنّ $f(x)=g(x)$.

3. بوضع
$$Y_1=x^3-1$$
$$Y_2=x^3-x^2-(x+1)(x-1)^2$$

X	Y1	Y2
-2	-9	-3
-1	-2	-2
0	-1	-1
1	0	0
2	7	1
3	26	2
[illegible]	63	3

X=4

بمقارنة النتائج المحصّل عليها من أجل قيم أخرى لـــ x ،
يتبيّن أنّ التخمين الموضوع عند 2) غير صحيح.



4. بقراءة بيانية، نلاحظ أنّ المنحنيين يشتركان في ثلاث نقاط والأعداد 0 ، 1، -1 هي فواصل هذه النقاط.

- يمكن تفسير النتائج السابقة بحلّ المعادلة $f(x)=g(x)$.

أصحيح أم خاطئ؟

بيّن إن كان النصّ صحيحا أم خاطئا مع التبرير.

1. x عدد حقيقي.
$x^2 - 2$ فرق بين مربعين.

2. A عبارة جبرية حيث $A = x^2 - 3x - 4$.
من أجل $x = 0$، $A = -4$

3. من أجل كلّ عدد حقيقي x،
$(-2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

4. من أجل كلّ عدد حقيقي غير معدوم x،
$\frac{1}{x^2+2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}$

5. من أجل كلّ عدد حقيقي x،
$(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

6. A عبارة جبرية حيث $A = (-x+2)^2$
الشكل المنشور والمبسط للعبارة A
هو: $x^2 + 4$

7. تحليل العبارة $x^2 - 9$ هو $(x-3)(x+3)$

8. بتطبيق الدالة $x \mapsto x + 1$، متبوعة بالدالة المربع ثمّ الدالة المقلوب نحصل على الدالة $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$

9. حلول المعادلة $x^2 + 49 = 0$ هما: 7، -7

10. من أجل كلّ عدد حقيقي x، $-x - 1 \leq 0$

11. المتراجحة $\frac{x-3}{x-1} \geq \frac{2}{3}$ تكافئ
$3(x-3) \geq 2(x-1)$

12. الشكل النموذجي للعبارة $A = x^2 + 4x - 12$
هو: $(x+2)^2 - 16$

13. المعادلة $-x^2 - x - 1 = 0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

العبارة الجبرية

14. x عدد حقيقي.
في كلّ حالة من الحالات الآتية، عيّن طبيعة كلّ عبارة معطاة.
أ) $x^2 + 2x$
ب) $x(2x^2+1)+2$
حـ) $(x-1)x^2$
د) $\frac{2}{3}x(x-1)^2$
هـ) $\frac{1}{x^2+1}$

15. عبّر عن النصوص التالية بعبارات مناسبة.
أ) معاكس ضعف x.
ب) مربع مجموع x و -1
حـ) مجموع مقلوب x و -1
د) مقلوب مجموع x و -1

16. ما هي التعليمات اللازمة لكتابة العبارة الآتية:
$$\frac{x^2}{x^3-1} - 2$$

17. x عدد حقيقي، $E(x) = -2(x+1)^2 - 3x + 1$
أ) أحسب $E(0)$
ب) أنشر وبسّط العبارة.
حـ) عوّض x بالقيمة 0 في العبارة الناتجة، هل تجد نفس النتيجة كما في أ) ؟

18. احسب عندما يكون ذلك ممكنا القيم العددية للعبارات الآتية من أجل قيم المتغيرات المعطاة.
أ) $A = x(x^2-1)$ ، $x = \sqrt{2}$
ب) $B = \frac{x+y}{xy}$ ، $x = 0$، $y = -1$
حـ) $\sqrt{-x+3}$ ، $x = \frac{5}{3}$
د) $\frac{x^2+1}{\sqrt{x-1}}$ ، $x = 1$

19. بيّن أنّ $(a+b)^3 \neq a^3 + b^3$

20. عيّن قيم x التي من أجلها يكون للعبارات الآتية معنى ثمّ وحّد المقامات.

أ) $E(x)=3-\frac{(2x-1)^2}{x-3}$

ب) $F(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}$

حـ) $G(x)=\frac{2}{x^2}-x$

د) $H(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

21. بسّط العبارات الآتية:

أ) $x^2+2x-5x$ ب) $x\sqrt{2}+3x$

حـ) $2x^2-3x-x^2+1$

22. أنشر كلا من العبارات الآتية:

أ) $A(x)=(x-1)(x+1)(x-2)$

ب) $B(x)=(3x-1)^2(x+2)$

حـ) $C(x)=-2x(x+2)^2-3(x+1)(2x-3)$

23. أنشر ثمّ رتّب كلا من العبارات الآتية:

أ) $A(x)=3(x-5)(x+3)$

ب) $B(x)=\frac{x+1}{3}-\frac{x}{2}+4$

حـ) $C(x)=\frac{2}{3}x(2x+9)-5x+1$

24. أنشر ثمّ رتّب كلا من العبارات الآتية:

أ) $(3x-\sqrt{2})^2$

ب) $(x+2)^2-(x+3)^2$

حـ) $(-2x-5)(5+2x)$

د) $\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2$

25. انشر ثمّ رتّب العبارة الآتية:

$$E(x)=\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+x\left(\frac{x+2}{4}\right)$$

26. أنشر عندما يكون ذلك ممكنا كلا من العبارات الآتية:

أ) $3x^2-15$

ب) $2(x^2-1)-x^2+1$

حـ) x^3-2x^2+5

27. الصيغ المنشورة للعبارات الآتية لها الشكل ax^2+bx+c حيث c، b، a أعداد حقيقية.
أوجد، دون النشر، العددين a، c.

أ) $(2x-1)(x+3)$

ب) $4\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)$

حـ) $(x\sqrt{2}-1)(2x+3)$

28. دون استعمال النشر، عيّن الصيغة المساوية $2x^2-5x+2$

أ) $(x-2)(1-2x)$

ب) $(x-2)(2x-1)$

حـ) $(x-1)(x-2)$

29. حلل العبارات الآتية:

أ) $2x^3-x$

ب) $2x^3-3x^2+6x$

حـ) $2x(x-1)+(3x+2)(x-1)$

د) $x^2-0{,}49$

30. حلل العبارات الآتية:

أ) $(x-5)(3x+2)+x^2-25$

ب) $9x^2-(x+1)^2$

حـ) $x(x^2-3)$

31. E عبارة جبرية حيث $E=(x+1)^2-x-1$.

1- بملاحظة أنّ $-x-1=-(x+1)$، حلل E.

2- حلل العبارات الآتية:

أ) $(3x-1)(x-1)-x(1-3x)$

ب) $4x^2-9+(2x-3)$

حـ) $(3x-2)(x+1)-(4-6x)(x+3)$

32. حلل باستعمال المتطابقات الشهيرة العبارات الآتية:

أ) $2x^2+2x\sqrt{2}+1$ ب) $x^2-\frac{25}{9}$

حـ) $3x^2-1$

33. برهن المساويات الآتية:

أ) $\frac{2x+1}{x+1}=2-\frac{1}{x+1}$ حيث $x\neq -1$

ب) $\frac{x^2+x-1}{x+2}=x-1+\frac{1}{x+2}$ حيث $x\neq -2$

حـ) $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$

34. برهن أنه من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب ويختلف عن 1،

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{2}{x-1}$$

الدوال والعبارات الجبرية

35. إليك برنامج الحساب الآتي:

اختر عددا
ربّع هذا العدد
أضف إلى النتيجة $\frac{1}{3}$
أضرب النتيجة في $\frac{4}{3}$

1. طبّق هذا البرنامج على كلّ من 0، 1، -1
2. طبق هذا البرنامج عل عدد حقيقي كيفي x، لتكن النتيجة $f(x)$.
3. ما هو ترابط الدوال المرجعية الذي يسمح بالمرور من x إلى $f(x)$ ؟

36. عيّن ترابط الدوال الذي يسمح بالمرور من x إلى $f(x)$ في كلّ حالة.

أ) $x\mapsto\frac{1}{x-2}$ مع $x\neq 2$

ب) $x\mapsto 5x^2-1$

حـ) $x\mapsto 2\sqrt{x}-3$ مع $x\geq 0$

37. f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالشكل:
$f(x)=-3(2x-1)^2+5$
عيّن ترابط ثلاث دوال مرجعية يسمح بالمرور من x إلى $f(x)$.

38. f هي الدالة المعرّفة لكلّ عدد حقيقي $x\neq 3$ بالشكل: $f(x)=\frac{x+5}{x-3}$.

1. هل الإجابة الآتية صحيحة:
" ننتقل من x إلى $f(x)$ بتطبيق الدالة $x\mapsto x-3$ متبوعة بالدالة المقلوب ثمّ الدالة $x\mapsto x+5$".
2. تحقق من أنّ لكلّ $x\neq 3$ ، $f(x)=1+\frac{8}{x-3}$
3. استنتج ترابط الدوال الذي يسمح بالمرور من x إلى $f(x)$.

المعادلات

39. بيّن إن كان الرمز " = " يتعلق بمساوية أم بمعادلة فيما يأتي:

أ) A عبارة جبرية حيث $A=x^2+3x-2$

ب) هل يوجد x حيث $2x^2-x=x+1$

40. نعتبر المعادلة $5x^2+x-6=0$ (م).
من بين الأعداد الآتية، عيّن حلول المعادلة (م).
0، 1، 2، -1، $\frac{5}{6}$

41. حلّ في R المعادلات الآتية:

أ) $2x=x+1$ ب) $2x\sqrt{3}-1=0$

حـ) $2x=\frac{2x+1}{3}$ د) $\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

42. حلّ في R المعادلات الآتية:

أ) $x(x+2)=-3-(x^2-3)$

ب) $2(x-2)-4(x-3)=-2x+1$

حـ) $(2x+3)(x-3)-(x-3)(x+2)=0$

د) $3(x-1)^2+2x-2=0$

43. حلّ في R المعادلات الآتية:

أ) $x^2-9=0$

ب) $x^2+16=0$

حـ) $3x^2-6=0$

44. حلّ في R المعادلات الآتية:

أ) $(x+3)^2=(4x-5)^2$

ب) $(2-x)(x+3)=x^2-4$

حـ) $4x^2-9+(2x+3)(3x-4)=0$

45. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية:

أ) $\frac{2x-5}{x+1}=0$ ب) $\frac{8}{x^2-1}=1$

حـ) $\frac{x+5}{x+1}=\frac{x-1}{x-5}$

46. بفرض $f(x)=(2x-3)(3x-1)$.

1. احسب $f\left(\frac{3}{2}\right)$.
2. احسب $f\left(\sqrt{2}\right)$، $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. تعطى النتيجتان على الشكل $a+b\sqrt{2}$.
3. حلّ المعادلة $f(x)=0$

47. لتكن E العبارة

$$E=(2x-1)(x-4)+x^2-16$$

1. انشر وبسّط E.
2. حلّل E.
3. باختيار الصيغة الأنسب، احسب قيمة E من أجل $x=0$، $x=\frac{1}{2}$.
4. باختيار الصيغة الأنسب، حلّ المعادلتين $E=0$، $E=-12$

48. بفرض $A(x)=-3(x-3)+x^2-3x$

1. حلّل ثمّ انشر $A(x)$.
2. نضع $E(x)=\frac{A(x)}{x+2}$. أوجد مجموعة قيم x التي يكون من أجلها معنى للعبارة $E(x)$.
3. حلّ المعادلات الآتية: $E(x)=0$، $E(x)=-6$

49. لتكن f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{5\}$ بالشكل:

$$f(x)=\frac{2x}{x-5}+1$$

1. احسب صورة $\frac{2}{3}$.
2. احسب السوابق الممكنة للأعداد 0، 3، 5

المتراجحات

50. عيّن إشارة كلّ من العبارات الآتية:

أ) x^2+2 ب) $-\sqrt{x}$ حـ) $1+\frac{2}{x^2}$

د) $(x-1)^2+9$ هـ) $-\frac{x^2}{2}-10$ و) $-\sqrt{-x}$

51. أكمل جدول إشارات العبارة $-2x+1$

x	$-\infty$ • $+\infty$
$-2x+1$	0

52. أدرس إشارة كلّ من العبارات الآتية:

أ) $2x-3$ ب) $\frac{2}{3}-\frac{3}{2}x$

حـ) $-1-\frac{2}{\sqrt{2}}x$

53. أدرس إشارة كلّ من العبارات الآتية:

أ) $(x-1)(2x-3)$ ب) $9x^2-1$

حـ) $-x(x+1)$

54. أدرس إشارة كلّ من العبارات الآتية:

أ) $\frac{-2}{x+3}$ ب) $\frac{3(x-2)+3}{x+1}$

حـ) $\frac{x^2}{x-2}$

55. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحات الآتية:

أ) $(3x+5)(x-3)\leq 0$

ب) $9x^2-25\leq 0$

حـ) $(3x-4)^2\geq(5-4x)^2$

56. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحات الآتية:

أ) $x-\frac{1-3x}{2}<2$

ب) $\frac{1}{x+1}\geq 1-x$

حـ) $x^2\leq 8x-16$

57. أ) أدرس إشارة العبارة $\frac{x(x-1)}{x+3}$.

ب) استنتج حلول المتراجحة $\frac{x(x-1)}{x+3} > 0$.

العبارة ax^2+bx+c $(a\neq 0)$

58. أكتب كلّ عبارة على الشكل النموذجي.

أ) x^2-4x+1 ب) $-x^2+2x+4$

جـ) x^2-5x+3

59. أكتب كلّ عبارة على الشكل النموذجي.

أ) $2x^2+6x+4$ ب) $-x^2+7x-10$

جـ) x^2+6x

60. حلّ في R المعادلات الآتية دون استعمال المميّز.

أ) $x^2-3x=0$

ب) $x^2+10x+25=0$

جـ) $(x+1)^2-9=0$

61. حلّ في R المعادلات الآتية:

أ) $x^2+x-1=0$ ب) $1-t-2t^2=0$

جـ) $u^2+5u-6=0$

د) $x^2-3x\sqrt{2}+4=0$

مسائل

62. لتكن العبارة $E(x)=\frac{3x^2+5x+2}{x^2-4}$ (1)

1) ما هي القيم الممنوعة للعبارة $E(x)$؟

2) تحقق من صحة الكتابات المختلفة الآتية للعبارة $E(x)$:

(2) $E(x)=\frac{(x+1)(3x+2)}{x^2-4}$

(3) $E(x)=3+\frac{5x+14}{x^2-4}$

(4) $E(x)=\frac{3x}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

3) اختر العبارة المناسبة ثمّ احسب كلا من العددين $E(0)$، $E(\sqrt{2})$.

4) حل، في $\mathbb{R}$، المعادلتين $E(x)=0$، $E(x)=3$ والمتراجحة $E(x)<0$.

63. هل توجد ثلاثة أعداد طبيعية متتالية هي أطوال أضلاع مثلث قائم؟

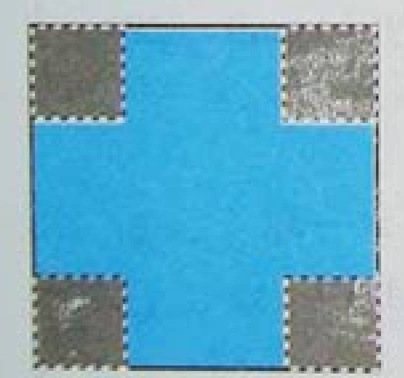
64. ABC مثلث قائم في B حيث $AB=4cm$، $BC=3cm$. (Δ) مستقيم يوازي (BC) ويقطع (AB) في M و $[AC]$ في N.

أ) أرسم شكلا يترجم المعطيات السابقة.

ب) هل يوجد وضع للمستقيم (Δ) الذي من لأجله تكون مساحة المثلث NMC نصف مساحة المثلث ABC ؟

65. قرص نصف قطره $5,5cm$.
بكم نزيد نصف القطر حتى تكون مساحة القرص ضعف مساحة القرص الأوّل ؟

66. ورقة مربعة الشكل ضلعها $6cm$. نقتطع من كلّ ركن من أركانها نفس المربع الصغير كما في الشكل.

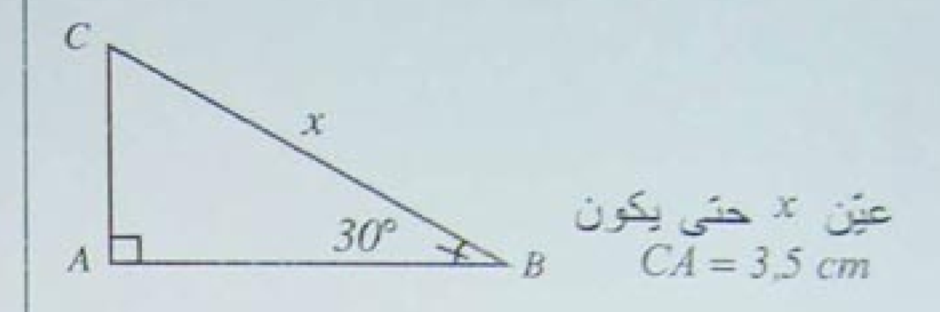


كيف نختار ضلع المربع الصغير حتى تكون مساحة الجزء الملوّن ثلاث أرباع مساحة الورقة المربعة ؟

67. $ABCD$ مربع. E نقطة من $[AB]$، F نقطة من (AD) حيث $EB=DF=5\ cm$.
عيّن طول ضلع المربع الذي من أجله تكون مساحة المثلث AEF مساوية ربع مساحة المربع $ABCD$.

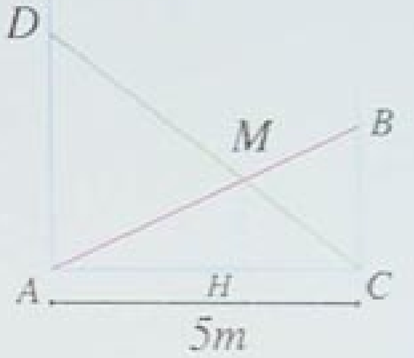
68. عائلة تنظم مصاريفها الشهرية كالآتي:
نصف الدخل الشهري للإطعام وربع الباقي للإيجار والمصاريف الأخرى (ماء، كهرباء) والباقي يخصص منه 10% للتنزه وشراء الملابس والمبلغ الباقي للادخار أي 1400 د.ج.
ما هو الدخل الشهري لهذه العائلة ؟

.69 ABC مثلث قائم في A حيث
$A\hat{B}C = 30°$



عيّن x حتى يكون
$CA = 3{,}5\ cm$

.70 وُضع سُلّمان بين حائطين شاقوليين كما في الشكل.



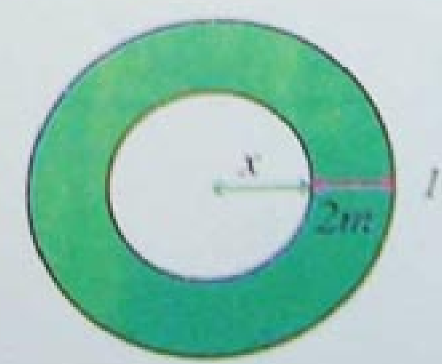
طول السلم الأول $6{,}25m$، طول الثاني $7{,}25m$
عيّن بعد نقطة (تقاطع) السلمين عن الأرض.

.71 سعر حلوية 20 د.ج
نضع x عدد الحلويات المباعة في اليوم.
$C(x)$ كلفة التصنيع اليومية حيث
$C(x) = -x^2 + 50x$.

1. عبّر بدلالة x عن الحصيلة $R(x)$.
2. إذا علمت أنّ الفائدة $B(x)$ تحقق من أن :
$B(x) = R(x) - C(x)$
بيّن أن $B(x) = x(x-30)$
3. ما هو عدد الحلويات التي ينبغي بيعها حتى يحقق البائع ربحا ؟

.72 (C)، (C') دائرتان لهما نفس المركز (الشكل)

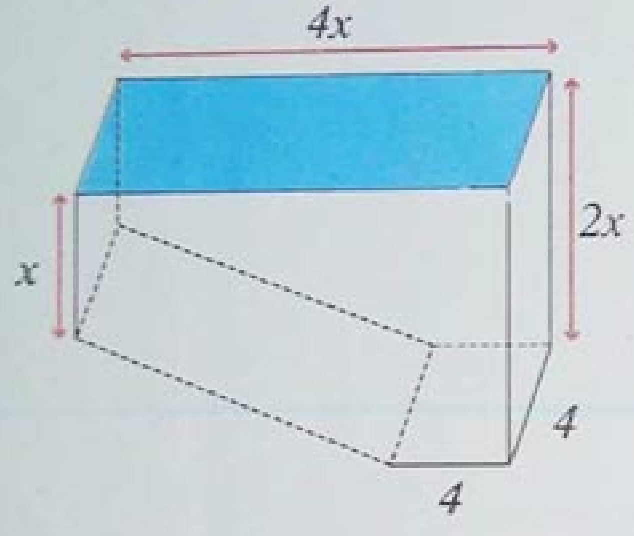
عيّن قيمة x التي من أجلها تكون مساحة الإكليل الملوّن $100\ m^2$



.73 f ، g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بالشكل:
$g(x) = 2x + 1$ ، $f(x) = x^2 - 2x + 1$

1. ارسم باستعمال الحاسبة البيانية المنحنيين الممثلين للدالتين f ، g .
(اختر نافذة ملائمة لمشاهدة النقاط المشتركة الممكنة للمنحنيين).
2. حلّ بيانيا $f(x) = g(x)$
3. حلّ جبريا $f(x) = g(x)$
4. حلّ جبريا $f(x) \le g(x)$

.74 مسبح له الشكل الآتي:



- قاعدة مربعة ضلعها $4m$.
- سطح علوي مستطيل طوله $4x$.
- عمق h حيث $x \le h \le 2x$

1) احسب حجم المسبح بدلالة x.
2) إذا علمت أنّ صاحبها لا يريد أن يدفع أكثر من $481{,}6$ دينارا (مخلصة من الرسوم) لملء المسبح، ما هو حجم الماء الممكن ؟
سعر المتر المكعب من الماء هو $4{,}30$ دينارا.
3) تحقق من أنّ:
$(6x+14)(4x-8) = 24x^2 + 8x - 112$
4) استنتج عندئذ قيم x الموافقة لرغبة صاحب المسبح.

الإحصاء

الكفاءات المستهدفة

- التمييز بين الميزتين الإحصائيتين المتقطعة والمستمرة.
- تلخيص سلسلة إحصائيّة بواسطة مؤشّر موقع.
- استعمال خواص الوسط الحسابي.
- إنشاء تمثيلات بيانية لسلسلة ذات ميزة منفصلة أو مستمرة.
- محاكاة تجربة.



أبو يوسف يعقوب بن إسحاق الكندي 801م- 873 م درس في البصرة وبرز في الفلسفة، ترجم عددا من مؤلفات أرسطو وغيره من فلاسفة اليونان.

الإحصاء علم حديث يهتم بدراسة الظّواهر التّي لا تخضع لقوانين تتحكم فيها علاقات دالّية. كتلك التى نراها بين السّرعة والمسافة المقطوعة. فظاهرة اجتماعية كنسبة المواليد المعوقين سنويا بسبب إشعاع نووي مثلا، لا تخضع لقانون دالّي ونفس الشيء يمكن قوله عن الظّواهر الاقتصادية. ورغم حداثة هذا العلم فإننا نجد عند الأولين بعض الاستخدامات البدائية لكثير من المفاهيم التّي بلورها هذا العلم قصد سدّ حاجاتهم العملية في حياتهم اليومية، كإحصاء المحاصيل الزّراعية والمداخيل الضّريبية. ويبدو أنّ اشتغال الكندي (801م 873م) بتفكيك الرّسائل المشفّرة كان الباب الذي أدى به إلى استخدام مفهوم تكرار ظهور مشاهدة معيّنة، الذي يعرف حاليا بتكرار قيمة في سلسلة إحصائيّة، كما وظّف فكرة تذبذب العيّنات واستقرارها في صورة أولية عندما أعطى طريقته في تفكيك رسالة مُشفّرة يعتمد فيها على تسجيل تكرار كلّ رمز من الرّموز التّي كتب بها نص هذه الرّسالة، وبعد معرفة اللغة التّي كتبت بها، يؤخذ نص لغوي مقروء من نفس اللغة يقارب في حجمه حجم النص المشفّر ويُحسب فيه تكرار كلّ حرف. وبعد ذلك نقوم بتعويض الرّمز ذي أكبر تكرار في الرّسالة المشفرة بالحرف ذي أكبر تكرار في النص المقروء ونعوّض الرّمز ذا الرّتبة الثانية في التّرتيب التّنازلي للتكرار بالحرف ذي الرّتبة الثانية في نفس التّرتيب التّنازلي وهكذا بالنّسبة إلى بقية الرّموز إلى أن نأتي على آخر رمز فنجده يقابل آخر حرف و بهذا تنتهي عملية فكّ الرّسالة المشفّرة.

نشاط 1: التوزيعات التكرارية (1)

البيان المقابل يعبّر عن توزيع علامات اختبار مادّة الرّياضيات لتلاميذ قسم (العلامة على عشرة).
(يُسمّى هذا البيان **مخطط بالأعمدة**).

1) أتمم، حسب هذا البيان، سلسلة علامات التلاميذ:
$2:2:2:3:3:3:3:3:...$

2) أتمم الجدول الآتي:

العلامات	2	3	5	7	8	9
عدد التلاميذ						

"عدد التلاميذ الذين تحصّلوا على العلامة n يسمّى **تكرار العلامة** n"

3) احسب عدد تلاميذ هذا القسم.
ما هي النسبة المئوية للتلاميذ الذين تحصلوا على العلامة 3؟ "تسمّى هذه النسبة **تواتر العلامة 3**"

4) ما هي العلامة التي تكرّرت أكثر؟

5) ما هو معدّل القسم ؟

6) إذا رتّبنا هذه العلامات ترتيبا تصاعديا، فما هي العلامة التي تنصّفها؟

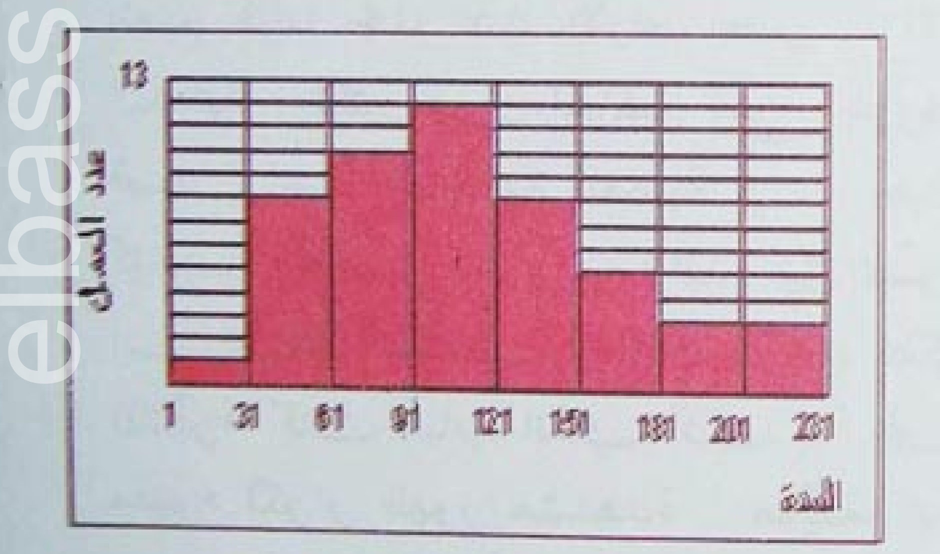
7) أتمم الجدول (جـ) المقابل:

العلامة n	2	3	5	7	8	9
عدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة أصغر أو تساوي n						
عدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة أكبر أو تساوي n						

الجدول (جـ)

نشاط 2: التوزيعات التكرارية (2)

البيان الآتي يعبّر عن المدة المستغرقة للمكالمات الهاتفية لكل عمال مؤسسة في فترة معيّنة (هذا البيان يُسمّى **مدرج تكراري**).



المُدَد موزّعة بين 1 ثانية إلى 231 ثانية (الفرق $231-1$ أي 230 يُسمّى **المدى**).
نقسم مجموعة المُدَد إلى مجالات طول كلّ واحد هو 30 ثانية (كلّ مجال يُسمّى **فئة**)
الفئات هي عندئذ $[1;31[$ ، $[31;61[$ ، $[61;91[$ ، ...
من أجل كلّ فئة $[a;b[$ لدينا n عاملا.
مساحات المستطيلات متناسبة على الترتيب مع الأعداد n.

1) احسب عدد عمال المؤسسة ثمّ النسبة المئوية لكل فئة بالنسبة إلى هذا العدد.

2) ما هو عدد العمال الذين تكلموا مدة 91 ثانية على الأقل؟

3) ما هو عدد العمال الذين تكلموا مدة 91 ثانية على الأكثر ؟

نشاط 3: قراءة مخطط دائري

المخطط الآتي يعبّر عن توزيع أعمار 360 عاملا .

1) ما هو عدد العمال الذين تتراوح أعمارهم من 20 إلى 30 سنة؟

2) ما هو عدد العمال الذين لا تزيد أعمارهم عن 50 سنة؟



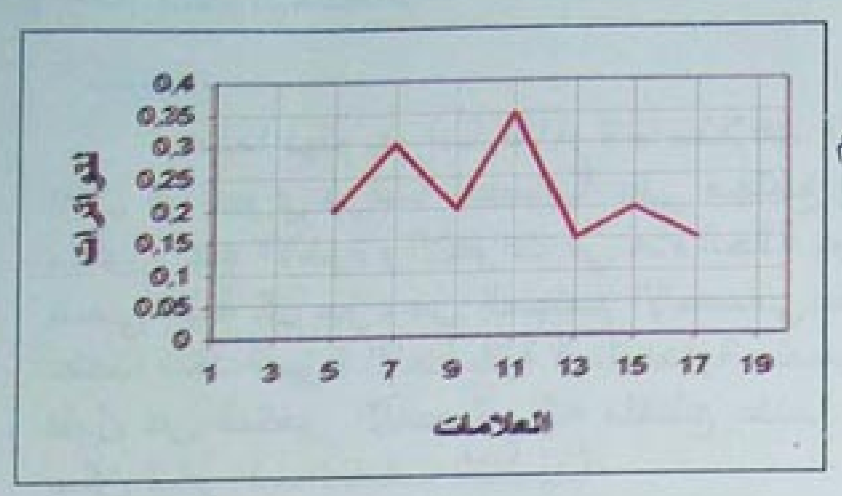
نشاط 4: خواص الوسط الحسابي

قسم مختلط يتكون من 20 ولدا و 8 بنات. المعدّل في استجواب مادة العلوم الطبيعية كان 5 بالنسبة إلى الأولاد و $8,5$ بالنسبة إلى البنات(العلامات على10) . ما هو معدّل القسم؟

نشاط 5: حساب الوسط الحسابي انطلاقا من التواترات

مضلع التّواترات المقابل يبيّن توزيع علامات تلاميذ قسم نهائي.

1) احسب معدّل هذا القسم.
2) هل يمكنك استنتاج التكرارات؟ اشرح.



نشاط 6: تذبذب العيّنات

يحتوي كيس على قريصة حمراء، وقريصتين بيضاوين، وقريصتين خضراوين. لا يمكن التمييز فيما بينها باللمس.

نسحب عشوائيا قريصة واحدة. ونسجّل لونها ثم نعيدها داخل الكيس. ونعيد السّحب من جديد. نكرّر عملية السّحب هذه N مرّة. (نقول إننا أنجزنا سحبا مع الإعادة).

لون القريصة	أحمر	أبيض	أخضر
التكرار n_i			
التواتر $\frac{n_i}{N}$			

1) أنجز 30 سحبا واملأ الجدول المقابل.
   قارن نتائجك مع نتائج زملائك. ماذا تلاحظ؟
2) اجمع نتائج 8 تلاميذ واملأ جدول السّؤال الأول بهذه المعطيات الجديدة . ماذا تلاحظ؟
3) اجمع نتائج كلّ زملائك واملأ جدول السّؤال الأول بهذه المعطيات الجديدة . ماذا تلاحظ؟
4) ارسم على نفس الشكل، مضلعات التواترات للسلسلتين المتعلقتين بالسّؤالين 2) و 3) وللسلسلة التي تحصلت عليها.

نشاط 7: المحاكاة

نريد تقدير النسبة المئوية x للذكور والنسبة المئوية y للإناث الخاصة بمواليد سنة 2004 في ولاية الجزائر. نختار لأجل ذلك 60 عائلة. نفترض أنّ ولادة ذكر لها نفس حظوظ ولادة أنثى .

لتقدير x و y، نقترح استخدام قطعة نقدية غير مزيّفة (أي مصنوعة بطريقة لا ترجح ظهور وجه على حساب آخر) برميها ونصطلح على أنّ الوجه F للقطعة يمثل" أنثى" و الظهر P يمثل " ذكرا".

1) ما هي قيم x و y التي تتوقعها؟
2) أنجز تجربة رمي القطعة نقدية 60 مرّة وسجل تكراري كلّ من F و P، ثم أحسب تواتري كلّ منهما.
3) اجمع نتائج 5 تلاميذ، ثمّ نتائج 10 تلاميذ، ثمّ نتائج كلّ التلاميذ ، وأتمم الجدول المقابل: (يعطى كلّ تواتر بنسبة مئوية).

	تلميذ معيّن	5 تلاميذ	10 تلاميذ	كل تلاميذ القسم
الوجه F				
الوجه P				

5) قارن هذه النتائج بما توقعته في السّؤال (1) . ماذا تلاحظ؟

الــدّرس

1. مفردات الاحصاء

• تمهيد

عندما نهتم بدراسة ظاهرة ما،مثلاعدد الإخوة والأخوات لتلاميذ المستوى النهائي في ثانوية ما، نقول أننا نجري دراسة **إحصائيّة** على **مجتمع إحصائي** هو تلاميذ المستوى النهائي لهذه الثانوية
ويكون عدد الإخوة والأخوات في هذه الحالة هو **الميزة الإحصائيّة** التي تسمى أيضا **الطبع الإحصائي**.
نسمي عيّنة كلّ جزء من المجتمع الإحصائي،مثلا كلّ قسم نهائي في هذه الثانوية هو **عيّنة**.
عندما تأخذ الميزة الإحصائيّة قيما عددية ،نسميها **ميزة كمية** أو **متغيرا احصائيا** .
نقول عن المتغير الإحصائي إنه **متقطع** عندما يمكن عدّ وحصر قيمه(عدد الإخوة) وإنه **مستمر** عندما يمكن قياس قيمه(قامات التلاميذ).
أحيانا،عندما يكون عدد القيَم كبيرا،نلجأ إلى حصرها ضمن مجالات $[\alpha ; \beta[$ تدعى **فئات** ونسمي **مركز** الفئة العدد $\frac{\alpha+\beta}{2}$ **وطولها** العدد الموجب $\beta-\alpha$.

نهتم في بعض الأحيان بدراسة ظاهرة نوعية،كلون العينين أولون الشّعر،لا يمكن التّعبير عليها بعدد فنقول في هذه الحالة أنّ الطّبع الإحصائي هو **طبع إحصائي نوعي** .

• التّوزيعات التّكرارية

- تكرار قيمة للطّبع الإحصائي هوعدد الأفراد الموافقة لهذه القيمة.
- تواتر قيمة للطبع الإحصائي هوحاصل قسمة تكرارها على عدد أفراد المجتمع(**أي التّكرارالكلي**).
- نسمي سلسلة إحصائية مجموعة القيم التي جُمعت .
- غالبا ما نمثل سلسلة احصائية بجدول يشمل كل قيمة وتكرارها .

مثال : السّلسلة الإحصائيّة الآتية تمثل علامات 30 تلميذا .

10 15 12 17 8 7 15 8 10 10 13 17 10 7 17
12 13 7 13 15 8 10 8 13 15 10 13 10 13 15

وهي سلسلة إحصائيّة طبعها كمي متقطع. تكرارها الكلّي هو 30.

العلامات(قيم الطّبع الإحصائي)	7	8	10	12	13	15	17
التّكرارات	3	4	7	2	6	5	3
التّواترات	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{3}{30}$

• التّوزيعات التّكرارية المجمّعة

نفرض أن قيم الميزة مرتبة ترتيبا تصاعديا.
- **التّكرار المجمّع الصّاعد** لقيمة(أو لفئة) هو مجموع تكرارهذه القيمة (أو الفئة) وتكرارات القيم (أوالفئات) الأصغر منها.
- **التّكرار المجمّع النّازل** لقيمة(أو لفئة) هومجموع تكرارهذه القيمة (أو الفئة) وتكرارات القيم (أوالفئات) الأكبر منها.
- **التّواتر المجمّع الصّاعد** لقيمة(أو لفئة) هومجموع تواترهذه القيمة(أو الفئة) وتواترات القيم(أوالفئات) الأصغر منها.
- **التّواتر المجمّع النّازل** لقيمة (أو لفئة) هومجموع توترهذه القيمة (أو الفئة) وتوترات القيم (أوالفئات) الأكبر منها.



مثال :

لدينا سلسلة إحصائيّة تتعلق بأطوال وديان بالكيلومتر. (الطّبع الإحصائي هنا مستمر).

الأطوال	[80;100[	[100;120[	[120;140[	[140;160[
التّكرار	12	10	12	6
التّكرار المجمّع الصّاعد	12	22	34	40
التّكرار المجمّع النّازل	40	28	18	6
التّواتر	$\frac{12}{40}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{12}{40}$	$\frac{6}{40}$
التّواتر المجمّع الصّاعد	$\frac{12}{40}$	$\frac{22}{40}$	$\frac{34}{40}$	1
التّواتر المجمّع النّازل	1	$\frac{28}{40}$	$\frac{18}{40}$	$\frac{6}{40}$

2. مؤشّرات سلسلة إحصائيّة

- **المنوال – الفئة المنوالية**

تعريف 1

- نسمي **منوالا** لسلسلة ذات متغير إحصائي متقطع، كل قيمة موافقة لأكبر تكرار ونرمزله Mod .
- نسمي **فئة منوالية** لسلسلة ذات متغير إحصائي مستمر، كل فئة موافقة لأكبر تكرار.

مثال : السّلسلة الآتية لها منوالان : 10و12.

القيم (علامات التّلاميذ)	7	10	12	13	15
التّكرار (عدد التّلاميذ)	5	8	8	7	2

- **الوسيط**

تعريف 2

لتكن سلسلة إحصائية ذات متغير متقطع قيمه مرتبة ترتيبا تصاعديا أو تنازليا، وتكرارها الكلي N .
نسمي الوسيط لهذه السلسلة العدد الذي نرمز له بالرمز Med، والمعرف كالآتي:
- إذا كان N فرديا أي $N=2p+1$: Med يكون القيمة التّي رتبتها $p+1$.
- إذا كان N زوجيا أي $N=2p$: Med يكون نصف مجموع القيمتين اللتين رتبتاهما p و $p+1$

مثال : للسلسلتين 3؛3؛7؛8؛9؛ و 4؛5؛6؛8؛18؛20 نفس الوسيط $Med = 7$.

خاصية

الوسيط يجزئ سلسلة إحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا أو ترتيبا تنازليا إلى جزئين لهما نفس التّكرار.

ملاحظة: الوسيط لا يتأثر بالقيم الشاذة ، مثلا : للسلسلتين 7؛7؛8؛9؛11؛12؛13 و 1؛1؛8؛9؛11؛18؛20 نفس الوسيط 9 .



• الوسط الحسابي

تعريف 3

الوسط الحسابي للقيم x_1 ، x_2 ، x_3 ، .... ، x_k التي تكراراتها هي، على الترتيب، n_1 ، n_2 ، n_3 ، .... ، n_k هو العدد $\bar{x}$ حيث $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + ...+ n_kx_k}{n_1 + n_2 + n_3 + ...+ n_k}$

مثال: الوسط الحسابي للسلسلة 19، 18، 8، 6، 5، 4 هو 10 .

ملاحظة : الوسط الحسابي يتأثر بالقيم الشاذة ، مثلا الوسط الحسابي للسلسلة 15، 14، 12، 10 هو 12,75
الوسط الحسابي للسلسلة 1 ، 10، 12 ، 14 هو 9,25.

حول الرّمز $\sum$

- المجموع $a_1 + a_2 + ... + a_k$ يكتب $\sum_{i=1}^{i=k} a_i$ ونقرأ : " مجموع الأعداد a_i من $i=1$ إلى $i=k$ ".
- يمكن كتابة الوسط الحسابي $\bar{x}$ على الشكل $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=k} n_i}$.

خواص الوسط الحسابي

خاصية 1

لتكن سلسلة إحصائية تأخذ القيم x_1 ، x_2 ، x_3 ، .... ، x_k بالتواترات f_1 ، f_2 ، f_3 ، .... ، f_k ، على الترتيب.
الوسط الحسابي لهذه السلسلة هو العدد $\bar{x}$ حيث $\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + ... + f_kx_k$.

برهان: نمثل السلسلة في الجدول الآتي:

القيم x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_k
التكرارات n_i	n_1	n_2	n_3	....	n_k
التواترات f_i	f_1	f_2	f_3	....	f_k

تواتر كلّ قيمة x_i هو $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ حيث $N = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k$ و بمأن :

$\bar{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + ... + n_kx_k}{N}$ فإن $\bar{x} = \dfrac{n_1}{N}x_1 + \dfrac{n_2}{N}x_2 + \dfrac{n_3}{N}x_3 + ... + \dfrac{n_k}{N}x_k$

أي $\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + ... + f_kx_k$.

مثال

50% من تلاميذ قسم تحصلوا على العلامة 12 و 30 % تحصلوا على العلامة 10 و 20 %
تحصلوا على العلامة 13 . ما هو معدل هذا القسم ؟



لدينا

القيم (العلامات)	10	12	13
التواترات	0,3	0,5	0,2

الوسط الحسابي (معدّل القسم) هو : $\overline{x} = 0,3\times 10 + 0,5\times 12 + 0,2\times 13 = 11,6$

خاصية 2

- عندما نضيف نفس العدد a لكل قيمة من قيم الطبع الإحصائي: يزداد الوسط الحسابي بالمقدار a أي $\overline{x+a} = \overline{x} + a$.
- عندما نضرب في نفس العدد a كل قيمة من قيم الطبع الإحصائي : الوسط الحسابي يضرب في العدد a أي $\overline{a\times x} = a\times \overline{x}$.

مثال: معدّل علامات تلاميذ قسم هو 9. عندما نضيف نقطتين لكل علامة، يصبح معدّل هذا القسم 11 وعندما نضرب كلّ علامة في 2 يصير المعدّل 18.

- المدى

تعريف 4

مدى سلسلة إحصائية هو الفرق بين أكبر قيمة للمتغير الإحصائي وأصغر قيمة له.

مثال : علامات عمر هي : 5 ؛ 11 ؛ 17 و علامات أحمد هي : 14؛10؛9.
مدى علامات عمر : 5-17 أي 12 ؛ مدى علامات أحمد : 9-14 أي 5 .
للتلميذين نفس المعدّل، ولكن علامات عمر أكثر "تشتتا" بالنسبة إلى علامات أحمد.

ملاحظة: يُسمّى كلّ من المنوال والوسيط والوسط الحسابي **مؤشّرات الموقع**، بينما يُسمّى المدى **مؤشّر التّشتت**.

3. التمثيلات البيانية

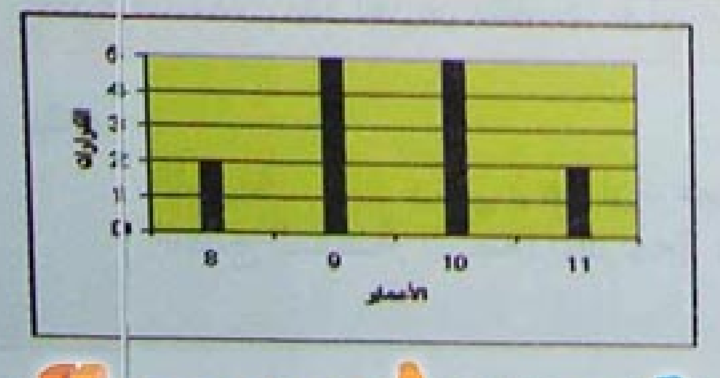
رغم ما توفره الجداول الإحصائيّة من معلومات عن الظّاهرة محلّ الدّراسة إلاّ أنّها لا تزودنا بسرعة بفكرة واضحة ومختصرة وشاملة عن هذه الظّاهرة. لذلك نلجأ غالبا إلى تمثيل هذه الجداول تمثيلا بيانيا.

التّمثيلات البيانية التي نستعملها عادة هي: **المخطّط بالأعمدة، المدرج التّكراري**، المخطّط الدائري، مضلّع التّكرارات، مضلّع التّواترات.

مثال1: يعبّر الجدول الآتي عن توزيع أعمار 12 طفلا:

الأعمار بالسّنوات	8	9	10	11
التّكرار	2	5	5	2

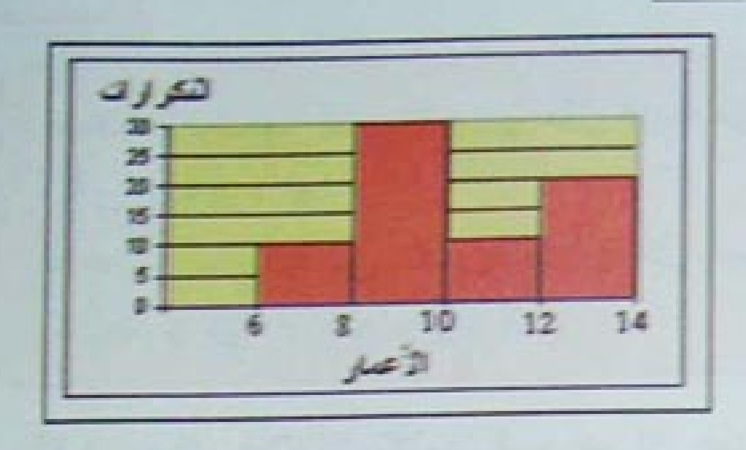
المخطّط بالأعمدة المتعلّق بهذه السّلسلة الإحصائيّة :



مثال 2 أعمار 70 طفل موزعة كالآتي:

الأعمار بالسنوات	[6;8[	[8;10[	[10;12[	[12;14[
التكرار	10	30	10	20

المدرج التكراري المتعلق بهذه السلسلة الإحصائية هو:



ملاحظة هامة : مساحات المستطيلات (الملونة بالأحمر في الشكل) متناسبة مع التكرارات.

4. تذبذب العيّنات والمحاكاة

- عيّنة احصائية

لتكن سلسلة إحصائية تتكون من نتائج تجربة أجريت n مرة. هذه السلسلة تشكل عيّنة.

مثال :

- التجربة : رمي قطعة نقدية غير مزيّفة.
- النتائج الممكنة : ظهر أو وجه.
- الترميز : نرمز بالرّقم 1 للوجه و بالرّقم 2 للظهر.
- العيّنة : عندما نرمي هذه القطعة 10 مرّات نتحصل على عيّنة مقاسها 10 .

نتحصل مثلا عل العيّنة : 1-1-1-2-1-2-2-2-2-2 .

سجّلنا تواتر كلّ نتيجة من النتيجتين وتحصّلنا على الجدول الآتي:



النتيجة	1	2
التواتر	0,4	0,6

جدول توزيع التواترات

مثلا: 0,6 هو تواتر النتيجة 2 .

- تذبذب العيّنات

عندما ننجز تجربة n مرة، نتحصل على عينة مقاسها n ، و عندما نعيد نفس التجربة n مرة في نفس الظروف نجد عينة أخرى **مقاسها** n ليست بالضرورة مطابقة للأولى. تسمى هذه الظاهرة **تذبذب العينات**.

مثال :

التجربة : رمي زهر نرد غير مزيّف.

النتائج الممكنة: الوجه1 ،الوجه2 ، الوجه3 ، الوجه4 ، الوجه 5، الوجه6.

الترميز : نرمز لكل وجه بعدد النقط الذي يحمله ؛ مثلا الوجه هو 6 .
رمى محمد زهر النرد 50 مرة فتحصل على عينة A، وأنجز سعيد نفس العملية بنفس النرد فتحصل على عينة B .
لكل عينة تحصلنا على توزيع التواترات حسب الجدول الآتي:

النتيجة	1	2	3	4	5	6
تواتر A	0,12	0,18	0,12	0,14	0,18	0,26
تواتر B	0,14	0,2	0,16	0,15	0,24	0,11

نلاحظ أنّ توزيع التواترات في العينتين ليس نفسه، أي هناك تذبذب في نتائج كلّ من سعيد ومحمد، هذه الظاهرة تعرف بتذبذب العينات.

- **تجربة عشوائية**

عندما نرمي زهر نرد غير مزيّف ، ونهتم بالرّقم الظّاهر على الوجهه العلوي، من المؤكد أننا لا نستطيع توقع هذه النتيجة مسبقا؛ إنّ هذه التّجربة تسمى **تجربة عشوائية** .

- **المحاكاة**

محاكاة تجربة عشوائية يعني اختيار نموذج لهذه التّجربة.

مثال:
- التّجربة العشوائية: ميلاد بنت أو ولد في 10 عائلات.
- نموذج لهذه التّجربة: حظوظ ميلاد بنت تساوي حظوظ ميلاد ولد.
- تنفيذ محاكاة توزيع الجنس في 10 عائلات : يمكن محاكاة هذه التّجربة بعدة طرق، نقترح هنا طريقتين مألوفتين هما:

طريقة1:
نرمي قطعة نقديّة غير مزيّفة **10** مرّات حيث نرفق الوجه بالنتيجة "بنت" و الظهر بالنتيجة "ولد" .
مثلا : العيّنة وجه ـ ظهر ـ وجه ـ وجه ـ ظهر ـ وجه ـ ظهر ـ وجه ـ وجه ـ ظهر تعبّر عن 6 بنات و 4 أولاد في العائلات العشرة. (يمكن ان نرمز F لـ : وجه و P لـ : ظهر).

طريقة2:
نرمي زهر نرد غير مزيّف **10** مرّات. نرفق الوجوه 2 ، 4 ، 6 بالنتيجة "بنت" و الوجوه 1 ، 3 ، 5 بالنتيجة "ولد" .
مثلا: العيّنة 2-4-1-3-1-5-6-2-3-1 تعبّر عن 4 بنات و 6 أولاد في العائلات العشرة.

ملاحظات :

- السّند المادّي في الطّريقة الأولى هو قطعة نقديّة غير مزيّفة.
- السّند المادّي في الطّريقة الثانية هو زهر نرد غير مزيّف.
- إذا كرّرنا التّجربة 500 مرّة مثلا حصلنا على عيّنة مقاسها 500، ويمكن إنطلاقا منها تقدير تواتر المواليد حسب الجنس.



- التمثيلات البيانية

1. إنشاء المخطط بالأعمدة، ومضلع التكرارات، ومضلع التواترات.

السلسلة الآتية تعبّر عن علامات 20 تلميذا.

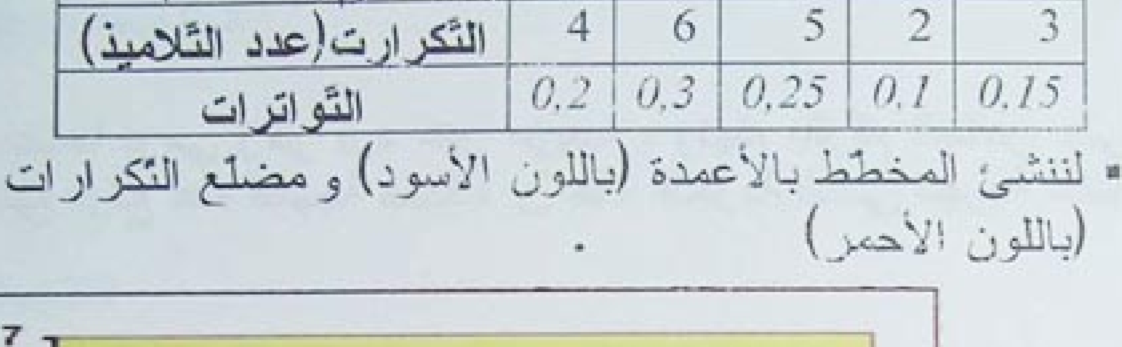
10	16	8	12	10	8	12	12	16	14
10	10	14	10	8	12	8	12	10	16

مثّل هذه السلسلة بمخطط بالأعمدة، ثم أنشئ مضلع التكرارات، ومضلع التواترات.

تعاليق	حلّ

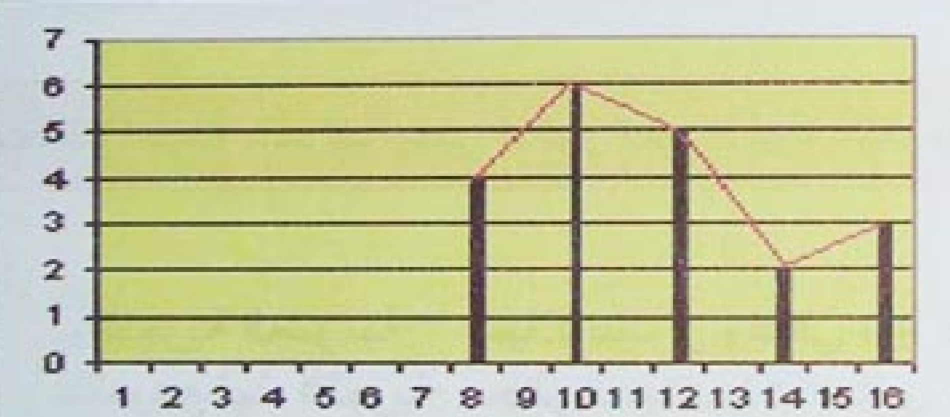
حلّ

- نلخص السلسلة في الجدول الآتي

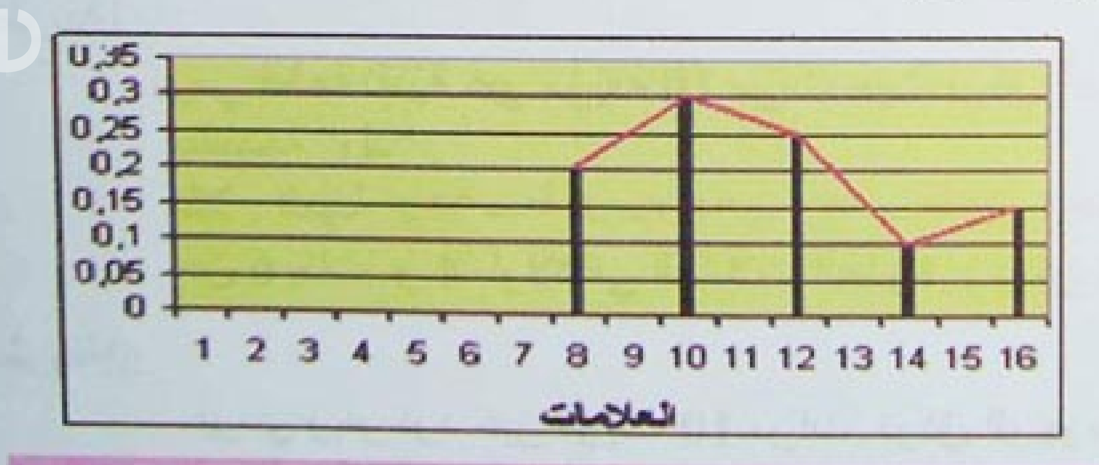


القيم (العلامات)	8	10	12	14	16
التكرارت (عدد التلاميذ)	4	6	5	2	3
التواترات	0,2	0,3	0,25	0,1	0,15

- لننشئ المخطط بالأعمدة (باللون الأسود) و مضلع التكرارات (باللون الأحمر).



- لننشئ المخطط بالأعمدة (باللون الأسود) و مضلع التواترات (باللون الأحمر).



تعاليق

- لاحظ أنّ قيم المتغير أعطيت على شكل خام، ولا بد من ترتيبها لتسهيل استغلالها.
- نستعمل المخطط بالأعمدة في حالة طبع إحصائي متقطع. أطوال الأعمدة متناسبة مع التكرارات (و مع التواترات) في كلّ من المخططين.

طريقة

1) نسجل القيم x_i على محور الفواصل و التكرارات n_i (التواترات f_i) على محور التراتيب و نعتبر النقط $A_i(x_i;0)$ و $M_i(x_i;n_i)$ و $N_i(x_i;f_i)$.

2) نوصل النقطة A_i بالنقطة M_i (النقطة A_i بالنقطة N_i) فنتحصل على الأعمدة. الخط المنكسر الذي يصل بين الرؤوس M_i للأعمدة (الرؤوس N_i للأعمدة) يدعى مضلع التكرارات (مضلع التواترات).

2- إنشاء مخطط دائري

الجدول الآتي يبين عدد السيارات المسجلة في الجزائر إلى 31/12/2002 .
(المصدر : الديوان الوطني للإحصائيات).

السيارات السياحية	الشاحنات	الأنواع الأخرى
1739286	300171	938400

مثل هذه السلسلة بمخطط دائري.

تعاليق

أقياس الزوايا متناسبة مع التكرارات (ومع التواترات).

حلّ

- التكرار الكلي هو: $N = 1739286 + 300171 + 938400 = 2977857$
- قيس الزاوية الموافق للسيارات السياحية: $360 \times \frac{1739286}{2977857} \approx 210°$
- قيس الزاوية الموافق للشاحنات : $360 \times \frac{300171}{2977857} \approx 36°$
- قيس الزاوية الموافق للأنواع الأخرى : $360 \times \frac{938400}{2977857} \approx 114°$

إنشاء المخطط الدائري:



طريقة

N هو التكرار الكلي، و n_i تكرار فئة (أو قيمة)؛ نمثل هذه الفئة (أو القيمة) بالقطاع الزاوي الذي قيس زاويته α حيث $\alpha = 360 \times \frac{n_i}{N}$ أي $\alpha = 360 \times f_i$

3- إنشاء مدرج التكرارات في حالة طبع إحصائي مستمر (الفئات متساوية الطول)

أجريت دراسة على 100 مصباح لمعرفة مدة صلاحيتها و سجلت النتائج في الجدول الآتي:

مدة الصلاحية بالساعات	$[300;400[$	$[400;500[$	$[500;600[$	$[600;700[$
عدد المصابيح	15	35	30	20

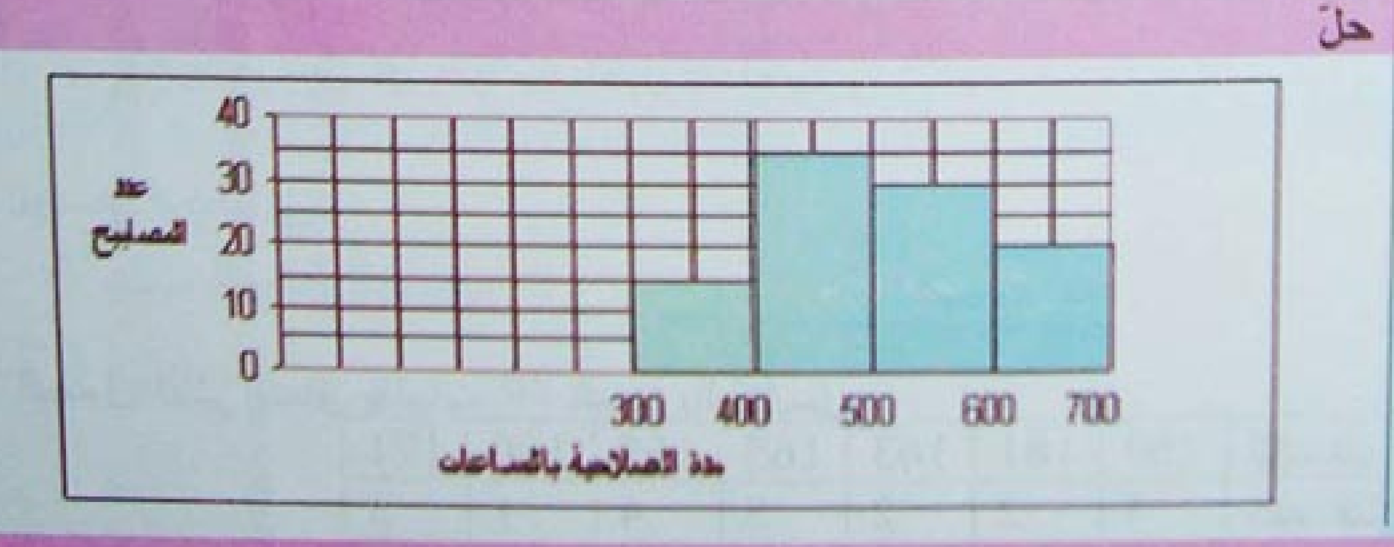
أنشئ المدرج التكراري لهذه السلسلة.

تعاليق

نستعمل دائما المدرج التكراري عندما يتعلق الأمر بقيم مصنفة في فئات.

مساحة كلّ مستطيل متناسبة مع تكرار الفئة الممثلة لها

حلّ



طريقة

نمثل تكرار كلّ فئة بمستطيل، بعداه هما مدى الفئة وتكرارها.



4- إنشاء مدرج التكرارات في حالة طبع إحصائي مستمر (الفئات مختلفة الطول)

أجريت دراسة على 100 مصباح لمعرفة مدة صلاحيتها و سجلت النتائج في الجدول الآتي:

مدة الصلاحية بالسّاعات	$[200;300[$	$[300;400[$	$[400;700[$	$[700;900[$
عدد المصابيح	5	30	45	20

أنشئ المدرج التّكراري لهذه السّلسلة.

تعاليق

حذار: عندما يتعلق الأمر بسلسلة طبعها مستمر، مبوّبة في فئات مختلفة الطول، فإنّ إنشاء مدرّجها التّكراري لا يتم بنفس الطريقة التي تكون فيها الفئات متساوية الطّول.

حلّ

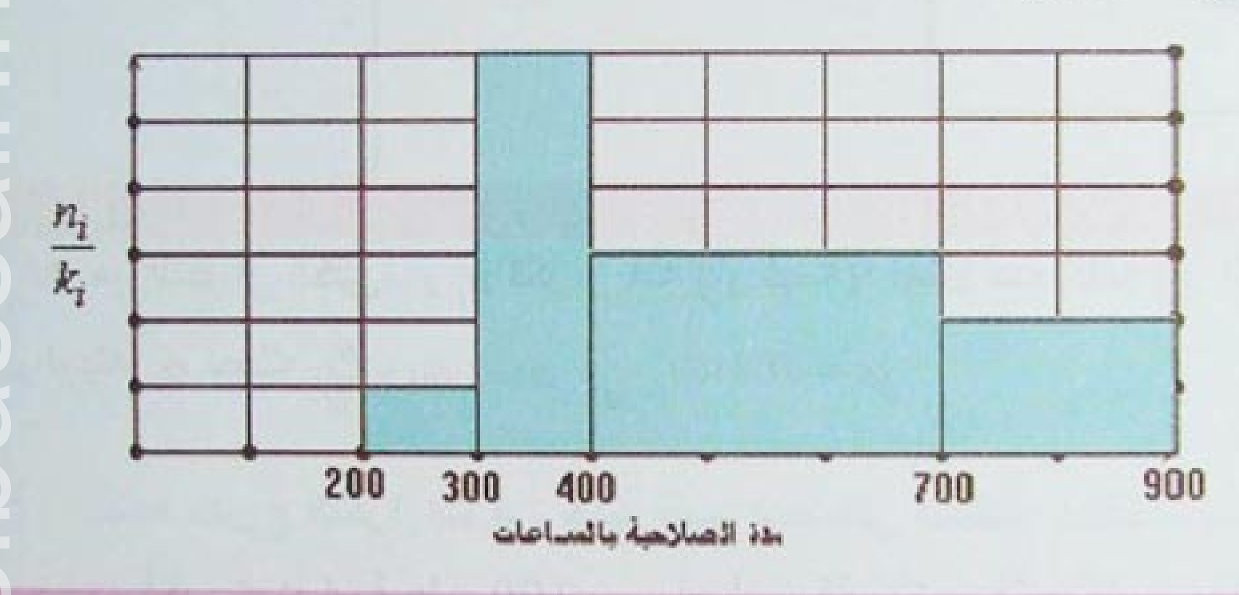
أصغر طول هو : $a = 100$.

طول الفئة $[400;700[$ هو 300 و $300 = k_3 a$ أي $k_3 = 3$.

طول الفئة $[700;900[$ هو 200 و $200 = k_4 a$ أي $k_4 = 2$.

الفئات	$[200;300[$	$[300;400[$	$[400;700[$	$[700;900[$
أطوال الفئات	100	100	300	200
التّكرارات n_i	5	30	45	20
k_i	1	1	3	2
الإرتفاعات $\frac{n_i}{k_i}$	5	30	15	10

إنشاء المدرج التّكراري



طريقة

الفئات مختلفة الأطوال، تحافظ على تناسب المساحات مع التكرارات ، بالطريقة الآتية:

- نمثّل الفئة التي لها أصغر طول a ، وليكن n تكرارها، بمستطيل بعداه a و n .
- فيما يخص أي فئة أخرى (طولها a_i و تكرارها n_i) : نعيّن العدد الحقيقي k_i من العلاقة $a_i = k_i a$ ، ونمثّل كلّ منها بمستطيل بعداه a_i و $\frac{n_i}{k_i}$.

• الوسط الحسابي

1- حساب الوسط الحسابي

الجدول الآتي يتعلق بقامات 20 تلميذا بالسّنتيمتر.

القامات	160	161	163	165	169	170	171
عدد التّلاميذ	3	2	2	5	4	1	3

1) احسب الوسط الحسابي.

2) بوّب معطيات هذا الجدول في فئات طول كلّ واحدة منها 4 ، واحسب عندئذ الوسط الحسابي.

تعاليق	حلّ
في 2) فرضنا أنّ كلّ القامات المحصورة في المجال $[a;b[$ متساوية وتساوي $\frac{a+b}{2}$ إذن لا نتفاجأ عندما نجد الوسط الحسابي يختلف عن $165,6\ cm$.	1)الوسط الحسابي هو : $\frac{3\times160+2\times161+2\times163+5\times165+4\times169+1\times170+3\times171}{20}=165,6$

2) تبويب معطيات الجدول السّابق في فئات طول كلّ واحدة 4.

الفئات	$[160;164[$	$[164;168[$	$[168;172[$
مراكز الفئات	162	166	170
عدد التّلاميذ	7	5	8

الوسط الحسابي يكون:
$$\frac{162\times7+166\times5+170\times8}{20}=166,2$$

طريقة

عندما يتعلق الأمر بطبع إحصائي مستمر ،نحسب الوسط الحسابي بتعويض كلّ فئة $[a;b[$ بمركزها $\frac{a+b}{2}$.

2- استعمال خواص الوسط الحسابي

احسب الوسط الحسابي $\overline{x}$ للأعداد : 98764,5 ؛ 98764,1 ؛ 98764,2 ؛ 98764,6.

تعاليق	حلّ
نجد هنا الوسط الحسابي ذهنيا .	للأعداد المعطاة نفس الجزء الصحيح . نحسب الوسط الحسابي للسلسلة $0,6$ ؛ $0,2$ ؛ $0,1$ ؛ $0,5$ ونجد $\frac{1,4}{4}$ أي $0,35$ إذن $\overline{x}$ هو $98764,35$.

طريقة

الوسط الحسابي يزداد بالعدد a عندما نضيف a لكل قيمة من قيم السّلسلة الإحصائيّة.

3- حساب الوسط الحسابي لسلسلة انطلاقا من أوساط حسابية جزئية.

يتكون قسم من 15 تلميذا و 10 تلميذات، معدّل التّلاميذ 12,5 ومعدّل التّلميذات 11,3.
ما هو معدّل القسم؟

تعليق	حلّ
يمكن تعميم هذه الطريقة إلى عدة أجزاء للسلسلة $\overline{x}=\frac{\sum N_i\times\overline{x_i}}{\sum N_i}$	معدّل القسم هو : $\frac{15\times12,5+10\times11,3}{25}=12,02$

طريقة

لحساب الوسط الحسابي $\overline{x}$ لسلسة، تكرارها الكلي N، انطلاقا من وسطين حسابيين جزئيين لهما $\overline{x_1}$ ، $\overline{x_2}$ تكراراهما N_1 ، N_2 على الترتيب ($N=N_1+N_2$)، نطبق القاعدة: $\overline{x}=\frac{N_1\times\overline{x_1}+N_2\times\overline{x_2}}{N}$

* الوسيط والمنوال

1. تعيين الوسيط والمنوال في حالة طبع إحصائي متقطع

1) عين وسيط السلسلة 3؛10؛8؛7؛6؛6؛5؛4؛4 ثم منوالها.

2) عين وسيط السلسلة 2؛5؛7؛8؛7؛4؛3-؛9 ثم منوالها.

حلّ

1) ـ التكرار الكلي هو 9 (عدد فردي) أي $2\times4+1$ إذن الوسيط هو القيمة التي رتبتها $4+1$ أي 6.

ـ القيمتان اللتان لهما أكبر تكرار وهما : 4 و6 إذن السّلسلة تقبل منوالين هما 4 و 6 .

2) ـ نرتب السّلسلة ترتيبا تصاعديا : $-3;2;4;5;7;7;8;9$.

ـ التكرار الكلي هو 8 (عدد زوجي) أي 2×4 .

الوسيط هو نصف المجموع للقيمتين اللتين رتبتاهما 4 و $4+1$

أي $6=\frac{7+5}{2}$.

ـ القيمة التي لها أكبر تكرار هي 7 أي المنوال هو 7 .

تعاليق

* إذا كان التكرار الكلي زوجيا فإن الوسيط لا ينتمي إلى السّلسلة .
* يجب التّمييز بين قيمة ورتبتها .
* يمكن ان تقبل سلسلة أكثر من منوال واحد.

طريقة

* لحساب وسيط سلسلة نرتّبها أولا ترتيبا تصاعديا أو تنازليا إذا لم تكن مرتبة، ثم نبحث عن القيمة الوسيطية كما ورد في تعريف الوسيط آخذين بالاعتبار شفعية التّكرار الكلي.
* لحساب منوال سلسلة نبحث عن القيمة التي لها أكبر تكرار (أي القيمة السّائدة).

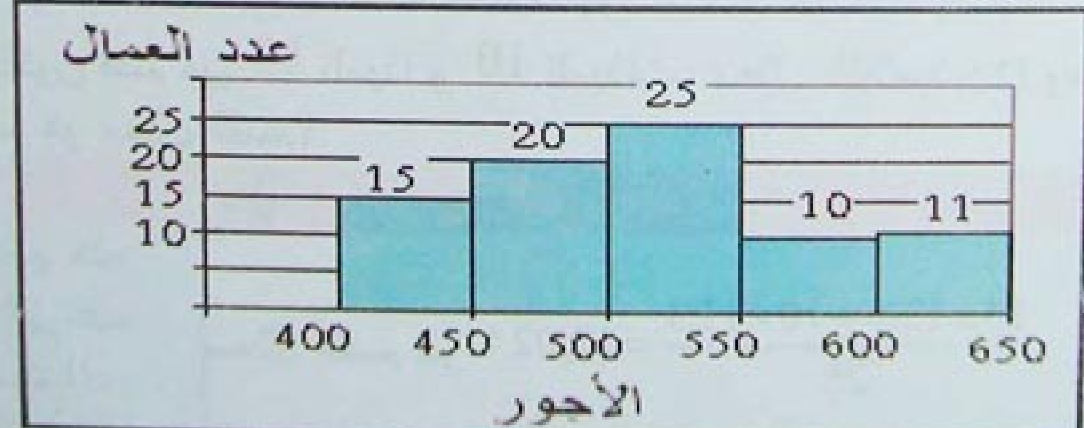
2. تعيين الوسيط في حالة طبع احصائي مستمر باستعمال مدرج التّكرارات

الجدول الآتي يتعلق بالأجور التي يتقاضاها 81 عاملا بالدينار في اليوم . عين وسيط هذه السّلسلة.

الأجور $(D.A)$	$[400;450[$	$[450;550[$	$[500;550[$	$[550;600[$	$[600;650[$
عدد العمال	15	20	25	10	11

حلّ

المدرج التكراري الذي يمثل السّلسلة الإحصائيّة هو :



* نلاحظ أنّ قائمة العمال مرتبة ترتيبا تصاعديا حسب أجورهم.

عدد العمل هو 81 و $81=2\times40+1$ إذن رتبة الوسيط في السّلسلة هي 41 .

* أجرة العامل X الذي رتبته 41 في قائمة العمّال تكون حتما في المجال $[500;550[$ لأن عدد العمال الذين يتقاضون أجرة أقل من 500 DA هو 35، وعدد العمال الذين يتقاضون أجرة أقل من 550 DA هو 60.

وبالتالي فإن الوسيط ينتمي حتما إلى المجال $[500;550[$ الذي يُسمّى **الفئة الوسيطية** .

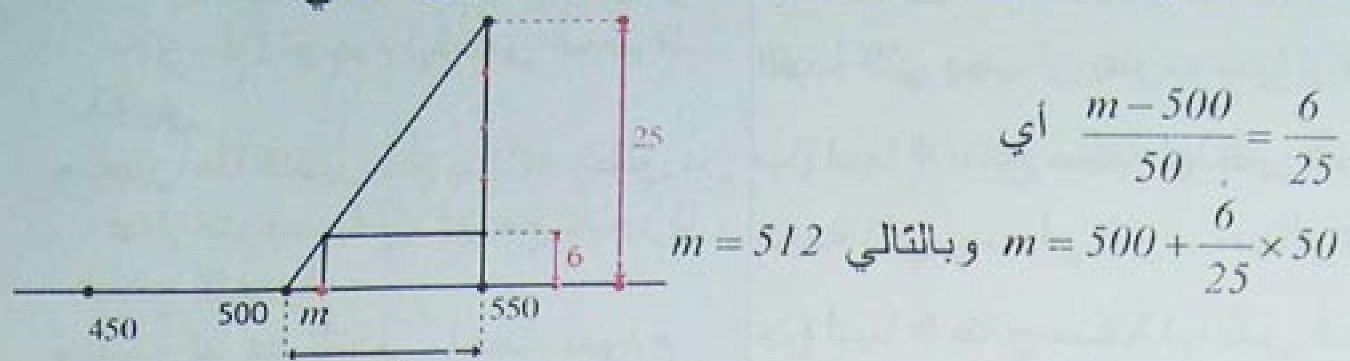
تعاليق

نلاحظ أنّ التكرار الكلي هو 81 أي عدد فردي فنتج عن ذلك تطابق الوسيط مع القيمة التي رتبتها 41 في هذه السّلسلة.

يكون الوسيط قيمة من قيم السّلسلة إذا كان تكرارها الكلي فرديا.

اعتمدنا في البحث عن القيمة m على فرض أنّ الأجور موزعة بانتظام في الفئة $]500;550]$.

- عدد العمال الذين يتقاضون أجرة أقل من الوسيط أو تساويه هو $41 = 6+35$.
وبالتالي فإنّ رتبة الوسيط هي 6 في الفئة $]500;550]$.
لإيجاد قيمة مقرّبة m للوسيط يمكن توظيف خاصية طاليس كالآتي:



أي $\frac{m-500}{50}=\frac{6}{25}$

$m=500+\frac{6}{25}\times 50$ وبالتالي $m=512$

طريقة

لحساب وسيط سلسلة طبعها مستمر:
- نعين الفئة $]a;b]$ التي تشمل الوسيط (Med) وهي الفئة الوسيطية .
- نعين r رتبة الوسيط (Med) في الفئة $]a;b]$.
- إذا سمّينا l طول الفئة $]a;b]$ و d تكرارها، نجد تقديرا m للوسيط Med كالآتي : $m=a+\frac{r}{d}\times l$

• اختيار مؤشّر موقع لتلخيص سلسلة إحصائيّة

عين في كلّ وضعية من الوضعيات الآتية ،مؤشّر الموقع الذي تراه مناسبا لتلخيص السّلسلة .
الوضعية1: سلسلة متعلقة بعدد العائلات الّتي مدخولها الشهري أقل من 10000DA .
الهدف هو تقديم مساعدة إلى 50 % من هذه العائلات من قبل البلدية.
الوضعية2: سلسلة متعلقة بمقاسات الأحذية الّتي باعها تاجر.
الوضعية3: سلسلة متعلقة بنتائج تلميذ في المواد الأساسية (الرّياضيات معاملها 4، والعلوم الفيزيائية معاملها 4، والعلوم الطّبيعية معاملها 5).

المواد	الرياضيات	العلوم الفيزيائية	العلوم الطبيعية
العلامات	12	4	11

حلّ

- في الوضعية1 : نختار الوسيط لأن 50 % من القيم تكون أقل من الوسيط .
- في الوضعية2 : نختار المنوال لأن التّاجر يزوّد دكّانه حسب طلب الزبائن.
- في الوضعية3 : نختار الوسط الحسابي للسلسلة للحصول على معدّل التلميذ.

تعاليق

- الوسيط لا يتأثر بالقيم الشاذة.
- الوسط الحسابي مرتبط بكل القيم فهو يتأثر بكل القيم.

طريقة

نختار المؤشّر الذي يفيدنا في الوضعية التي نحن بصدد التّعامل معها، أي حسب الهدف من الدّراسة.

• توقع بعض النتائج

عيّن في كلّ وضعية من الوضعيّات الآتية، القيمة التي يجب أن "يقترب" منها تواتر كلّ نتيجة
أ) رمي قطعة نقدية عادية .
ب) رمي قطعتين نقديتين عاديتين .
ج) رمي زهر نرد عادي.

تعاليق	حلّ
• نقصد بقطعة نقدية عادية أو زهر نرد عادي، كلّ الوجوه لها نفس الحظوظ للظهور. • يعتبر هذا التقدير نظريا لأنه ينطلق من اعتبارات حدسية تتوافق مع تصورنا لنتائج التجربة. • يسمح لنا هذا التقدير بإعطاء نموذج رياضي.	أ) للنتيجتين الممكنتين: وهما وجه، ظهر نفس الحظوظ. القيمة التي يجب أن يقترب منها تواتر كلّ نتيجة هي $\frac{1}{2}$. ب) لدينا 4 نتائج ممكنة لها نفس الحظوظ. القيمة التي يجب أن يقترب منها تواتر كلّ نتيجة هي $\frac{1}{4}$. جـ) لدينا 6 نتائج ممكنة لها نفس الحظوظ. القيمة التي يجب أن يقترب منها تواتر كلّ نتيجة هي $\frac{1}{6}$.

طريقة

- نعين عدد النتائج الممكنة N للتجربة.
- إذا كان لكل النتائج نفس الحظوظ للظهور فإن تواتر كلّ نتيجة "يقترب" من $\frac{1}{N}$.

• تذبذب العيّنات (مشاهدة تغير عيّنات)

نعتبر التّجربة: رمي زهر نرد غير مزيّف 50 مرّة.

1) أنجز هذه التّجربة 3 مرّات (نجد 3 عينات مقاس كلّ واحدة هو 50) وأتمم الجدول الآتي:

النتائج الممكنة	1	2	3	4	5	6
تواترات النتائج في العينة الأولى						
تواترات النتائج في العينة الثانية						
تواترات النتائج في العينة الثالثة						

2) عيّن في كلّ عيّنة أكبر تواتر، وأصغر تواتر.

3) عيّن في كلّ عيّنة الوسط الحسابي.

4) ارسم في نفس الشكل مضلع التّواترات المتعلق بكل عيّنة.

تعاليق

- لاحظ: أنجزنا نفس التّجربة في نفس الظروف (عدة مرّات) ولم نجد نفس النتائج؛ نسمي هذه الظّاهرة: **تذبذب العينات**.
- شاهد على التّمثيلات البيانية هذا التّذبذب.
- لاحظ كذلك: كلّ النتائج الممكنة لها نفس الحظوظ للظهور؛ فنظريا تواتر كلّ نتيجة هو $\frac{1}{6}$ $(\frac{1}{6} \approx 0{,}16)$، غير أنّ التّجربة أعطيت خلاف ذلك في العيّنات الثلاث.

حلّ

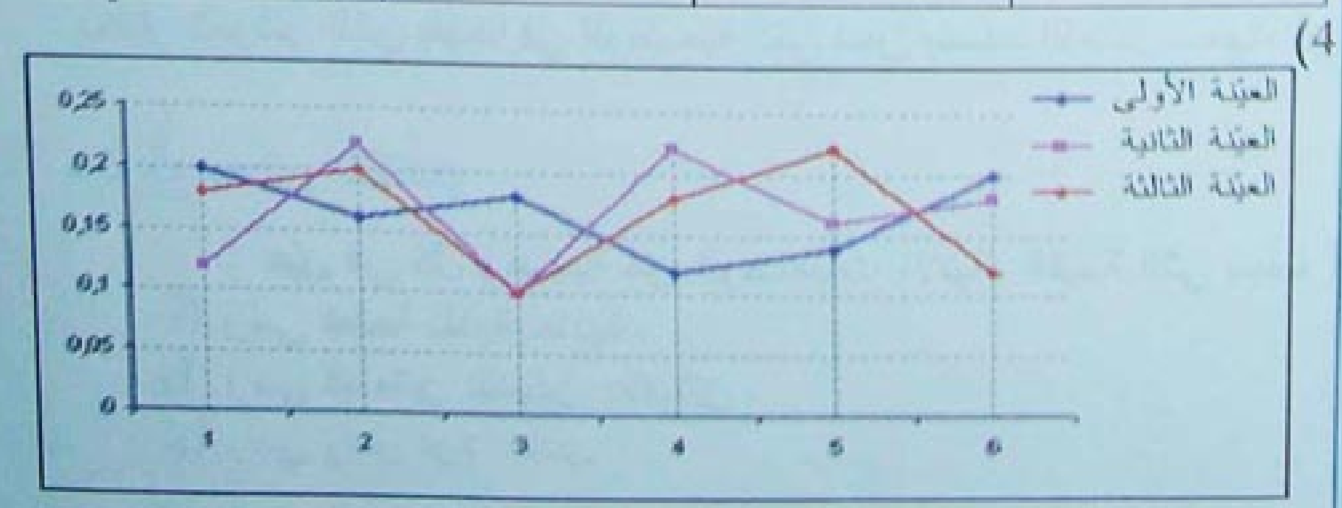
1)

النتائج الممكنة	1	2	3	4	5	6
تواترات النتائج في العيّنة الأولى	0,2	0,16	0,18	0,12	0,14	0,2
تواترات النتائج في العيّنة الثانية	0,12	0,22	0,1	0,22	0,16	0,18
تواترات النتائج في العيّنة الثالثة	0,18	0,2	0,1	0,18	0,22	0,12

2) و 3)

	العيّنة الأولى	العيّنة الثانية	العيّنة الثالثة
أصغر تواتر	0,12	0,1	0,1
أكبر تواتر	0,2	0,22	0,22
الوسط الحسابي	3,44	3,62	3,42

4)



طريقة

- أنجز هذه التّجارب بمشاركة زملائك أى كلّ تلميذ يلقى النرد 50 مرّة ويسجّل التّكرارات لكل قيمة ثم يحسب التّواترات.
- يمكن استعمال الحاسبة البيانية أو مجدول.

• المحاكاة (إنجاز محاكاة)

أنجز محاكاة لتوزيع الأطفال حسب الجنس فى 10عائلات تتكون كلّ منها من 4 أطفال.

تعاليق	حلّ
• إنّ اختيار السّند المادّى للتّجربة مرتبط ارتباطا عضويا بالنّموذج الذى ننجز فى إطاره المحاكاة فمثلا: إذا اخترنا زهر نرد مزيّف لا نستطيع من الناحية العقلانية استيفاء شرط تساوى حظوظ الولادة بين الولد والبنت. • يمكن أن يكون السّند المادّى المناسب لهذا النّموذج هو قطعة نقدية غير مزيّفة.	1) تشبيه التّجربة : نشبّه ولادة طفل في عائلة بتجربة عشوائية تؤدي إلى نتيجتين ممكنتين. 2)اختيار نموذج: نعتبر أنّ كلّ ولادة تحتمل بنتا أو ولدا، وأنّ حظوظ ولادة ولد تساوي حظوظ ولادة بنت. 3) اختيار السّند الماديّ: نختار السّند الماديّ المناسب : زهر نرد غير مزيّف. 4) تحقيق التّجربة : نحاكي توزيع الأطفال حسب الجنس في العائلة الواحدة عندما نلقي زهر النّرد 4 مرّات متتالية، ونعتبر ظهور رقم فردي يعني ولادة ولد، وظهور رقم زوجي يعني ولادة بنت. نكرّر هذه العملية 10 مرّات حتى نحاكي التّوزيع في كلّ العائلات. كانت النتائج المتحصل عليها كما يأتي:

النتائج	ترجمتها	النتائج	ترجمتها
5-3-6-4	بنتان و ولدان	3-3-1-4	3أولاد و بنت
1-3-3-1	4أولاد	1-1-1-1	4 أولاد
3-1-2-2	بنتان و ولدان	2-4-1-2	ولد و 3 بنات
2-2-2-2	4بنات	4-2-1-2	ولد و 3 بنات
4-4-3-3	بنتان و ولدان	1-1-2-3	3 أولاد و بنت

طريقة

نختار تجربة عشوائية تؤدى الى نتيجتين ممكنتين (تشبيه التّجربة) لهما نفس الحظوظ فى الظهور (اختيار نموذج). يمكن انجاز هذه التّجربة بزهر نرد (اختيار السّند المادّى) ونكرّر التّجربة 4 مرّات لكى نحصل على عيّنة مقاسها 4، ثمّ نكرّر ذلك مع كلّ عائلة لتحقيق المطلوب (تحقيق التّجربة).

1) استعمال المجدولات

- حجز سلسلة وحساب مؤشرات الموقع

تعبّر السلسلة الآتية عن علامات 18 تلميذا

8	12	13	19	12	8	8	10	12
12	16	10	12	17	12	10	15	9

أ) احجز علامات هؤلاء التلاميذ في صفحة إكسال.

ب) احسب الوسط الحسابي و الوسيط و المنوال والمدى.

حلّ

Microsoft Excel - TICE1

Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données

B5 f_x =MOYENNE(A2:I3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	السلسلة الآتية تعبر عن العلامات على 20 لـ: 18 تلميذا								
2	8	12	13	19	12	8	8	10	12
3	12	16	10	12	17	12	10	15	9
4									
5		11,94	=	الوسط الحسابي					
6		12	=	الوسيط					
7		12	=	المنوال					
8		11	=	المدى					

أ) نكتب العلامات في 18 خلية انطلاقا من أي خلية (مثلا من الخلية *A2* إلى الخلية *I3*) .

ب)- عندما نكتب في أي خلية (مثلا في *B5*) : *=MOYENNE(A2:I3)*
ثم ننقر على اللمسة [↵] نتحصل على الوسط الحسابي لمحتويات الخلايا من الخلية *A2* إلى الخليّة *I3*.

- عندما نكتب في أي خلية (مثلا في *B6*) : *= MEDIANE (A2:I3)*
ثم ننقر على اللمسة [↵] نتحصل على وسيط محتويات الخلايا من من الخلية *A2* إلى الخليّة *I3*.

- عندما نكتب في أي خلية (مثلا في *B7*) : *= MODE(A2:I3)*
ثم ننقر على اللمسة [↵] فنتحصل على منوال محتويات الخلايا من من الخلية *A2* إلى الخلية *I3*.

- عندما نكتب في أي خلية (مثلا في*B8*):
=MAX(A2:I3)−MIN(A2:I3)
ثم ننقر على اللمسة [↵] نتحصل على مدى محتويات الخلايا من الخلية *A2* إلى الخليّة *I3*.

ملاحظة: عندما نغيّر بعض العلامات تتغير المؤشرات تلقائيا.

تعاليق

- يمكن الانتقال من خانة إلى أخرى باستعمال اللمسات ← ↑ → ↓
- يمكن الحصول على الوسط الحسابي أو الوسيط أو المنوال أو المدى باستعمال Insertion ثم f_x Fonction...

مثلا نتحصل على الوسيط كالآتي:

ننقر على Insertion

ثم على f_x Fonction... ونختار *MEDIANE* في النافذة :

Sélectionnez une fonction
MEDIANE
MOYENNE
SOMME
SI
LIEN_HYPERTEXTE
NB
MAX

طريقة

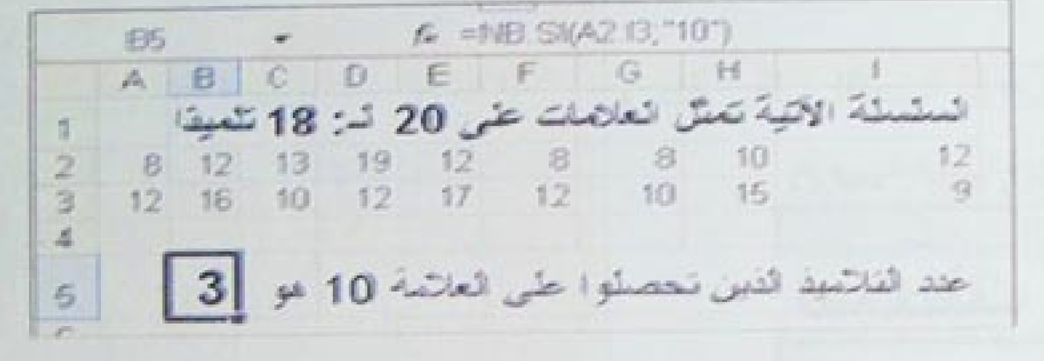
نحجز السلسلة باستعمال لمسات الملمس، ونتنقل من خلية إلى أخرى بالفارة.
لحساب الوسط الحسابي أو الوسيط أو المنوال أو المدى لقيم مسجلة في الخلايا: من الخلية A_i إلى الخلية A_j نستعمل، على الترتيب، $= MOYENNE(A_i : A_j)$ أو $= MEDIANE(A_i : A_j)$ أو $= MODE(A_i : A_j)$ أو $= MAX(A_i : A_j) - MIN(A_i : A_j)$.

- **استعمال التوزيعات التكرارية**

استعمل المثال السابق (توزيع علامات 18 تلميذ) لحساب عدد التلاميذ الذين تحصلوا على العلامة 10 وعدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة أكبر من 10 أو تساويها.

حل

- عدد التلاميذ الذين تحصلوا على العلامة 10 هو تكرار العلامة 10، ولحسابه نحجز في إحدى الخلايا (هنا $B5$) الطلبية: $= NB.SI(A2:I3;"10")$ ثم ننقر على اللمسة ↵ فتظهر النتيجة في الخلية $B5$ (التكرار هو 3).



B5 fx =NB.SI(A2:I3;"10")

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	السلسلة الآتية تمثل العلامات على 20 لـ: 18 تلميذا								
2	8	12	13	19	12	8	8	10	12
3	12	16	10	12	17	12	10	15	9
4									
5		3	عدد التلاميذ الذين تحصلوا على العلامة 10 هو						

ملاحظة: تعني الطلبية $= NB.SI(A2:I3;"10")$ إظهار تكرار العدد 10 في مجموعة الخلايا من $A2$ إلى $I3$.

- عدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة أكبر من 10 أو تساويها هو التكرار المجمّع النازل للعلامة 10، ولحسابه نحجز في إحدى الخلايا (هنا حجزنا في $B5$) الطلبية: $= NB.SI(A2:I3;">=10")$ ثم ننقر على اللمسة ↵ فتظهر النتيجة في الخلية $B5$ (التكرار المجمّع النازل هو 14).

B5 fx =NB.SI(A2:I3;">=10")

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	السلسلة الآتية تمثل العلامات على 20 لـ: 18 تلميذا								
2	8	12	13	19	12	8	8	10	12
3	12	16	10	12	17	12	10	15	9
4									
5		14	عدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة أكبر أو تساوي 10 هو						

ملاحظة: تعني الطلبية $= NB.SI(A2:I3;">=10")$ إظهار عدد العلامات الأكبر من 10 أو التي تساوي 10 في مجموعة الخلايا من $A2$ إلى $I3$.

تعاليق

عندما نحجز الطلبية نراعي الكتابة الدقيقة لها وبالخصوص عدم نسيان رمز المساواة (=) في بداية الحجز.

طريقة

نستعمل الطلبية $NB.SI$ لتعيين عدد الخلايا غير الفارغة المحققة للشرط الذي نكتبه بين المزدوجتين " ".



احجز معدّلات تلاميذ واستخرج : "راسب" أو "ناجح" أمام كلّ معدّل علما أنّ شرط النجاح هو الحصول على معدّل أكبر من 10 أو يساوي 10 ، على الشكل الآتي:

قائمة التلاميذ	المعدّلات	الملاحظات
التلميذ 1	15.82	ناجح
التلميذ2	9.99	راسب
.	.	.
.	.	.
.	.	.

حلّ

- نحجز قائمة التّلاميذ في العمود A ومعدّلاتهم في العمود B .
- نحجز في الخلية $C2$ الطّلبية: =SI(B2>=10;"ناجح";"راسب")
- ننقر على اللّمسة ↵ فيظهر في الخلية $C2$ العبارة "ناجح":

C2 fx =SI(B2>=10;"ناجح";"راسب")

	A	B	C
1	قائمة التلاميذ	المعدلات	الملاحظات
2	التلميذ1	15,82	ناجح
3	التلميذ2	9,99	
4	التلميذ3	10,56	

- نحدّد الخلية $C2$، ونعمّم محتوى الخلية $C2$ إلى الخلية Cn الموافقة للمعدّل الأخير في قائمة التلاميذ، فنتحصل على الشاشة:

C2 fx =SI(B2>=10;"ناجح";"راسب")

	A	B	C	D
1	قائمة التلاميذ	المعدلات	الملاحظات	
2	التلميذ1	15,82	ناجح	
3	التلميذ2	9,99	راسب	
4	التلميذ3	10,56	ناجح	
5	التلميذ4	11,52	ناجح	

تعاليق

نفسر الطّلبية :

=SI(B2>=10;"ناجح";"راسب")

كالآتي :

إذا كان محتوى الخلية $B2$ أكبر أو يساوي 10 أعرض "ناجح" و إلاّ "راسب" .

اصطلاح:

نسمي **تعميم محتوى الخلية $A1$ إلى الخلية AJ** عملية وضع الزّالق على الزاوية السّفلى على اليمين للخلية $A1$ فيتحول إلى رمز + ثمّ الضغط على الزر الأيسر للفأرة مع السّحب حتى الخلية AJ .

طريقة

نحجز أسماء كل التّلاميذ ومعدّل كلّ تلميذ في عمودين (A و B مثلا) . يقابل إسم كلّ تلميذ معدّله على نفس السّطر.

نحجز في خلية تقع على نفس السطر الذي بدأنا فيه حجز قائمة أسماء التلاميذ ومعدّلاتهم (هنا في الخلية $C2$) الطّلبية = SI (الشرط; "ناجح" ; " راسب") ثم نعمّم محتوى الخلية $C2$ إلى الخلية Cn.

يعطى توزيع تلاميذ ثانوية حسب المستويات:
160 تلميذا في السنة الأولى، 120 تلميذا في السنة الثانية، 140 تلميذا في السنة الثالثة .
مثّل هذه السلسلة بيانيا (المخطط الدائري و المخطط بالأعمدة) باستعمال مجدول .

حلّ

نحجز السلسلة :

B	C	D
السنة الأولى	السنة الثانية	السنة الثالثة
160	120	140

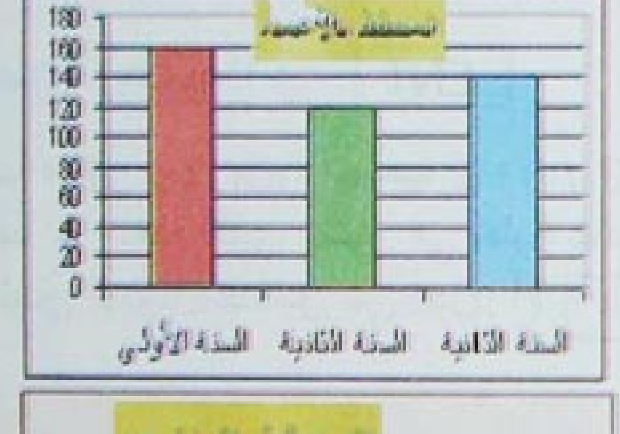
• نحدّد بالفأرة كلّ الخلايا التي تحتوي على القيم :

160	120	140

عندما ننقر على [أيقونة الأعمدة] ثمّ على Terminer نحصل على المخطط بالأعمدة.

عندما ننقر على Secteurs ثم على Terminer نحصل على المخطط الدائري.







تعاليق

يمكن اختيار مخطّطات أخرى كما يلي:

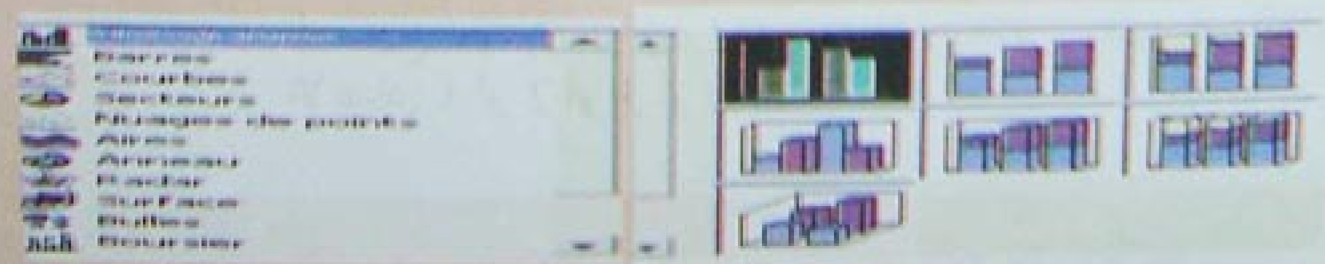
ننقر على Insertion ثم على Graphique... ثم على Types personnalisés ونختار مخطّطا من بين :

Type de graphique :
- Aires n&b
- Barres flottantes
- Barres texturées
- Cônes
- Couleurs empilées
- Courbe - Histo. 2 axes
- Courbe avec lissage
- Courbes - Histogramme
- Courbes à deux axes
- Courbes en couleurs

طريقة

نحجز السلسلة ثم نحدّد بالفأرة كلّ الخانات التي تحتوي على القيم .

ننقر على Insertion ثم على Graphique... ونختار مخطّطا من بين المخطّطات الآتية :



• نتبع التعليمات التي تظهر على النافذة إلى أن نصل إلى النهاية (TERMINER) .

• توليد أعداد عشوائية

ملاحظة: إنّ النتائج المعطاة في الأمثلة الموالية ليست هي بالضرورة التي ستظهر عندما نقوم بتوليد أعداد عشوائية، فالعشوائية بالنسبة لنا تلعب دورها هنا.

▪ استعمال ALEA

اعرض على الشاشة أعدادا عشوائية باستعمال الطلبية =ALEA()

تعاليق	حلّ
يمكن أن نحجز =ALEA() في أي خانة أخرى.	نحجز في الخلية $A2$ =ALEA() وعندما ننقر على اللمسة ↵ يظهر في هذه الخلية عدد عشوائي (وهو عدد ينتمي إلى المجال $[0 ; 1[$). نجد 99 عددا عشوائيا بتعميم محتوى الخلية $A2$ إلى الخلية $A100$ يمكن كذلك الحصول على عدد عشوائي كما يلي: Insertion ← Fonction... f_x ← ALEA ← OK .

طريقة

نستعمل الطلبية =ALEA() لعرض عدد عشوائي من المجال $[0 ; 1[$.

▪ استعمال ALEA و ENT

1) ما معنى $ENT(x)$؟ احسب $ENT(3,14)+2$.
2) ما هو العدد الذي يظهر في خلية عندما نحجز فيها $=ALEA()*4$ وننقر على اللمسة ↵ ؟
3) نفس السؤال السابق من أجل: أ) $=ENT(ALEA()*4)$ ب) $ENT(ALEA()*4+1)$

تعاليق	حلّ
استعمال الطلبية $ENT(ALEA()*\beta+\alpha)$ يعطي الأعداد الطبيعية التي تنتمي إلى المجال $[\alpha ; \beta+\alpha[$	1) $ENT(x)$ يمثل الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x . أي $ENT(3,14)+2=3+2=5$. 2) $ALEA()$ يمثل عددا عشوائيا y حيث $0 \leq y < 1$. أي $ALEA()*4$ يمثل العدد $4y$ حيث $0 \leq 4y < 4$. ومنه يظهر في الخلية عدد عشوائي ينتمي إلى $[0 ; 4[$. 3) أ) $ENT(ALEA()*4)$ هو الجزء الصحيح للعدد $ALEA()*4$، وبالتالي يظهر في الخلية أحد الأعداد: 0 أو 1 أو 2 أو 3 ب) $ALEA()*4+1$ يمثل عددا عشوائيا ينتمي إلى $[1 ; 5[$، جزؤه الصحيح هو $ENT(ALEA()*4+1)$ وبالتالي يظهر في الخلية أحد الأعداد: 1 أو 2 أو 3 أو 4 .

طريقة

يمكن عرض عدد طبيعي (عشوائي) ينتمي إلى $[1 ; N]$ باستعمال ($ENT(ALEA()*N+1)$.

- محاكاة تجربة بواسطة الطلبيتين ALEA و ENT

ملاحظة: إنّ النتائج المعطاة في الأمثلة الموالية ليست هي بالضرورة التي ستظهر عندما نقوم بتوليد أعداد عشوائية، فالعشوائية بالنسبة لنا تلعب دورها هنا.

مثال1: أنجز محاكاة رمي نرد غير مزيّف 100 مرّة، باستعمال الطلبيتين ALEA و ENT .

تعاليق

- لنتذكر أنّ كلّ النتائج لها نفس الحظوظ للظهور.
- يستحسن أن نعمّم محتوى الخليّة $A1$ إلى الخليّة $A10$ ، ثمّ نعمّم من العمود A إلى العمود J .
- في الشكل(1) استعملنا 100 سطرا وعمود واحد، بينما في الشكل(2) استعملنا 10 أسطر و10 أعمدة.

حلّ

- نصطلح أنّ الأرقام $1.2.3.4.5.6$ تمثل وجوه النرد .
- نحجز في الخليّة $A1$ (أو في أي خلية) الطلبية =ENT(ALEA()*6+1) وننقر على اللمسة ↵ كي يظهر في هذه الخليّة أحد الأرقام $1.2.3.4.5.6$.
- نحدّد الخلية $A1$، ونعمّم محتوى الخليّة $A1$ إلى الخليّة $A100$، فنتحصّل على عيّنة مقاسها 100 (تتكون من الأرقام$1.2.3.4.5.6$).

A14 | fx =ENT(ALEA()*6+1)

	A	B	C
1	3		
2	1		
3	3		
4	5		
5	5		
6	3		
7	3		
8	2		
9	3		
10	1		

الشكل (1)

J10 | fx =ENT(ALEA()*6+1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	6	6	5	4	6	3	4	1	5	5
2	2	5	1	6	2	1	2	6	2	4
3	3	5	1	6	6	4	6	3	2	5
4	1	2	3	6	6	5	2	3	4	6
5	5	5	5	1	1	1	3	6	6	1
6	4	6	4	3	2	1	4	4	2	2
7	4	2	4	6	1	5	4	2	3	5
8	4	5	1	6	2	4	4	5	2	2
9	2	3	6	1	3	6	4	6	6	2
10	3	4	1	2	4	6	4	6	1	5

الشكل (2)

طريقة

نستعمل الطلبيتين ENT و ALEA بهذا الترتيب لعرض أعداد طبيعية بصفة عشوائية.

مثال2: يحتوي كيس على 26 قريصة مرقمة من 1 إلى 26. القريصات لا تظهر ولا يمكن التمييز بينها باللمس. نسحب من الكيس قريصة ونسجل الرقم الذي تحمله، ثمّ نعيدها الكيس. نكرّر هذه العملية 1000 مرّة. أنجز محاكاة لهذه التجربة باستعمال المجدول إكسال .

تعاليق

لاحظ أنه عندما نستعمل مجدولا نستطيع إجراء محاكاة لتجربة بواسطة عيّنة مقاسها كبير نسبيا، و يحدث هذا بسرعة وبأقل تكلفة مقارنة مع استعمال وسائل أخرى.

الشكل المرافق يعرض جزءا من المطلوب فقط.

حلّ

- تمثل كل نتيجة برقم القريصة التي تظهر عند إجراء السحب، فالنتائج الممكنة إذن هي: $1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \ldots ; 26$
- نكتب في الخليّة $A1$: =ENT(ALEA()*26+1) ثم ننقر على اللمسة ↵ فتظهر في $A1$ إحدى النتائج الممكنة .
- نحدّد الخلية$A1$ ونعمّم محتوى الخليّة $A1$ إلى الخليّة $J1$ (نتحصّل على 10 قيم)، ثمّ نعمّم من السطر 1 إلى السطر 100 فنتحصّل على عيّنة مقاسها 1000.

A1 | fx =ENT(ALEA()*26+1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	3	1	7	14	20	8	3	7	2	9
2	26	15	23	14	9	22	8	23	26	12
3	20	22	1	7	24	10	10	16	17	19
4	26	4	7	20	3	13	26	24	8	15
5	14	15	21	23	1	10	20	6	2	10
6	23	13	15	7	17	19	7	1	24	8
7	20	13	22	24	13	6	6	11	25	6
8	25	26	26	6	5	21	3	13	4	8
9	25	12	12	17	8	16	8	8	20	5
10	1	6	17	4	11	4	4	24	14	3
11	24	26	6	9	10	24	23	24	6	8

طريقة

نستعمل الطلبيتين ALEA و ENT

- **مشاهدة توزيع التّواترات بواسطة تمثيل بياني**

أنجز محاكاة رمي نرد 30 مرّة ثم عين تواتر كلّ نتيجة ·مثّل توزيع التّواترات بواسطة مضلّع التّواترات، ثم بواسطة مخطّط بالأعمدة ·

حلّ

تحقيق التّجربة: النتائج الممكنة هي: 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1

- نحجز في الخلية $A2$ =ENT(ALEA()*6+1) ثم ننقر على اللمسة ↵ كي تظهر أحد النتائج الممكنة في $A2$.
- نحدّد $A2$ ثم نعمّم محتوى الخليّة $A2$ إلى الخليّة $E2$.
- عندما نحدّد الخلايا من $A2$ إلى $E2$ ، ونعمّم من $E2$ إلى $E7$ نتحصل على 30 رقما (عيّنة مقاسها 30).
- نحجز في الخلايا من $G2$ إلى $G7$ النتائج الممكنة : 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1 على الترتيب .
- نحجز في الخلية $H2$: =NB.SI($A$2:$E$7;G2) وننقر على اللمسة ↵ كي تُظهر في $H2$ تكرار النتيجة 1 (النّيجة 1 محتواة في $G2$).
- نحدّد $H2$ ثم نعمّم محتوى الخليّة $H2$ إلى الخليّة $H7$ كي نتحصل على تكرار كلّ نتيجة.
- لحساب التواترات : نحجز في الخلية $I2$ =H2/30 وننقر على اللمسة ↵ كي يظهر تواتر النتيجة 1.
- نحدّد $I2$ ثم نعمّم محتوى الخليّة $I2$ إلى الخليّة $I7$ كي نجد تواتر كلّ نتيجة.
- لإنشاء مضلّع التواترات : نحدّد الخلايا من $I2$ حتى $I7$

ثم ننقر على Insertion و بعد ذلك على Graphique... ثم على Courbes ثم على Suivant > و أخيرا على Terminer .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	عيّنة مقاسها 30						النتائج الممكنة	التكرار	التواترات
2	2	2	5	2	5		1	4	0,13
3	1	3	6	5	2		2	8	0,27
4	4	3	1	2	1		3	4	0,13
5	6	4	4	2	4		4	6	0,20
6	5	6	4	1	4		5	5	0,17
7	2	2	3	5	3		6	3	0,10

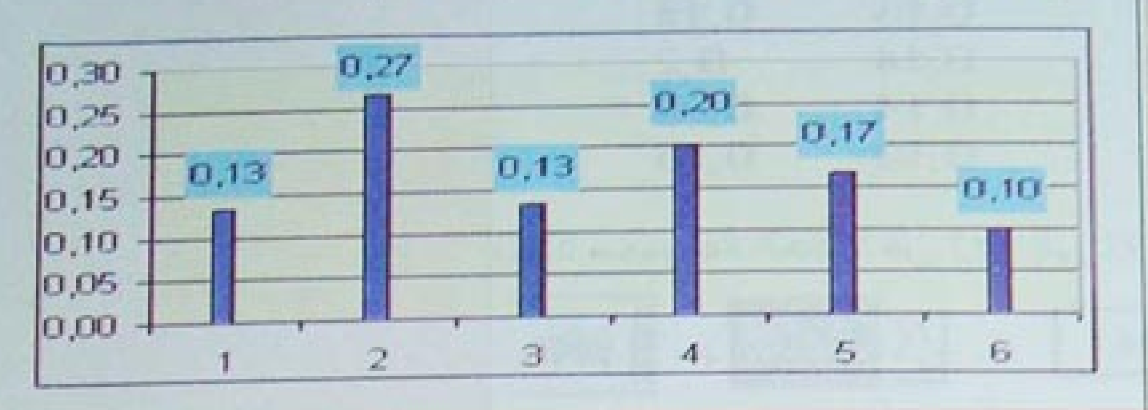
تعاليق

- يمكن الانطلاق من أي خانة أخرى تختلف عن $A2$.
- تشبيه التّجربة: يتمثّل في توليد أعداد طبيعية من المجال $[1;6]$ عشوائيا ·
- النّموذج المختار : محدد سلفا من قبل البرنامج إكسال·
- السّند المادّي : هم الكمبيوتر وبرنامج إكسال مع الطّلبية =ENT(ALEA()*6+1) .

نلاحظ أنّ كتابة $G2$ في الطّلبية : =NB.SI($A$2:$E$7;G2) لم يأت بالشكل $G$2 وهذا حتى نسمح بتغير محتوى $G2$ إلى محتوى $G3$ ثم $G4$... إلى غاية $G7$ عندما نسحب الفأرة من $I2$ إلى $I7$ ؛ بينما $A$2 و $E$7 يسمح بتثبيت محتويات الخلايا من $A2$ إلى $E7$.

تحول $A2$ إلى $A$2 يمكن بالنقر على اللمسة $F4$.

▪ لإنشاء المخطط بالأعمدة للتواترات : نحدّد الخلايا من $I2$ حتى $I7$ ثم نتبع التعليمات الواردة أعلاه عند إنشاء مضلع التواترات غير أننا نحدّد في معالج البيانات اختيار مخطط بالأعمدة.



طريقة

تشبيه التجربة.

تحقيق التجربة باستخدام الطلبيات =ENT(ALEA()*6+1) و =NB.SI($A$2:$E$7;G2) و =H2/30

وفق الإجراءات المشار إليها في الحل.

• تذبذب العينات

أنجز 3 محاكاة مختلفة لرمي نرد 50 مرّة، ثم أنشئ مضلع تواترات كلّ عيّنة في نفس الشكل.
انقر على اللمسة $F9$ عدة مرّات، ماذا تلاحظ؟ اشرح.

حلّ	تعاليق
العيّنة الأولى: نحجز في الخليّة $A1$ =ENT(ALEA()*6+1) ثمّ ننقر على اللمسة ↵ . نحدّد $A1$ ثم نعمّم محتوى الخليّة $A1$ إلى الخليّة $J1$. ثم نعمّم محتوى السطر 1 إلى السطر 5 فنتحصل على عيّنة مقاسها 50 . ننشئ مضلع التواترات. عندما نضغط على اللمسة $F9$ نشاهد على الشاشة عيّنة أخرى مقاسها 50. عندما نضغط على اللمسة $F9$ عدة مرّات نلاحظ كيف تتغير التواترات. **العيّنة الثانية:** نحجز في الخليّة $A7$ =ENT(ALEA()*6+1) ثمّ ننقر على اللمسة ↵ . نحدّد $A7$ ثم نعمّم محتوى الخليّة $A7$ إلى الخليّة $J7$. ثم نعمّم محتوى السطر 7 إلى السطر 11 فنتحصل على عيّنة مقاسها 50 فنتحصل على عيّنة مقاسها 50 ونكرّر العملية السّابقة . **العيّنة الثالثة:** نحجز في الخليّة $A13$ =ENT(ALEA()*6+1) ثمّ ننقر على اللمسة ↵ . نحدّد $A13$ ثم نعمّم محتوى الخليّة $A13$ إلى الخليّة $J13$ ، ونعمّم محتوى السطر 13 إلى السطر 17 فنتحصل على عيّنة مقاسها 50 ونكرّر العملية السّابقة . في العمود L (من $L2$ إلى $L7$) نسجل النتائج الممكنة ونجعل الأعمدة M و N و O مخصصة للتواترات المتعلقة بكل عيّنة .	لاحظ أنّ التواترات مختلفة في كلّ عيّنة رغم أننا ننجز نفس التّجربة في نفس الشروط. نجد مثلا ،التواترات المتعلقة بالعيّنة الأولى كالآتي : نسجل في الخلية $M2$ =NB.SI($A$1:$J$5;L2)/30 ننقر على اللمسة ↵ ثم نعمّم محتوى الخليّة $M2$ إلى الخليّة $M7$.

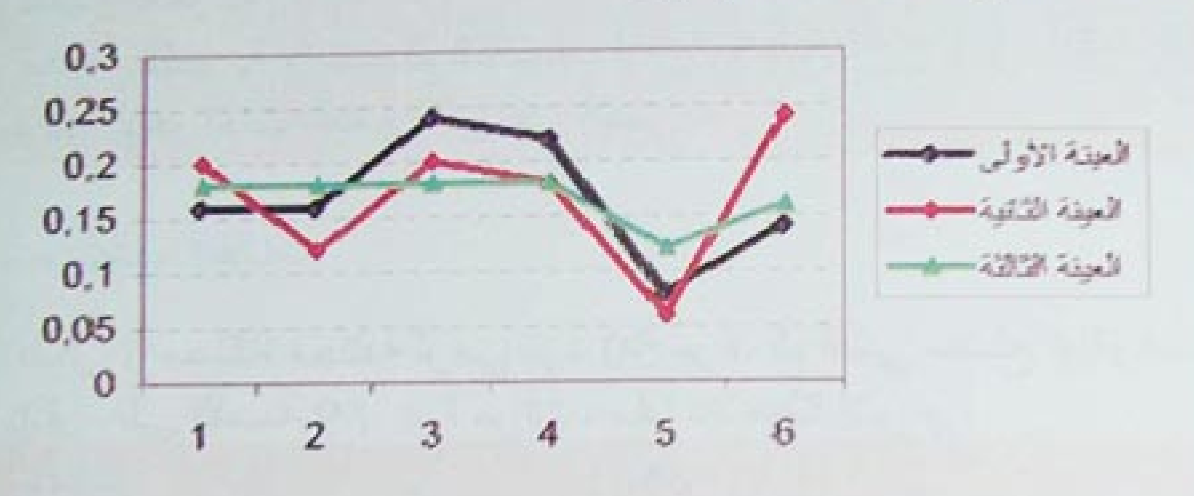


L	M	N	O
النتائج الممكنة	العينة الأولى	العينة الثانية	العينة الثالثة
1	0,18	0,2	0,24
2	0,1	0,18	0,18
3	0,24	0,16	0,14
4	0,14	0,14	0,2
5	0,1	0,14	0,08
6	0,24	0,18	0,16

نحدّد مجموعة الخلايا من $M2$ إلى $O7$ ثم ننقر على Insertion ←

Graphique... ← Courbes ← Suivant > و أخيرا على Terminer

فنتحصل على شكل مثل ما يأتي:



ننقر على اللمسة $F9$ عدة مرّات فنلاحظ تغير مضلعات التواترات مما يعني تغير التواترات في كلّ عيّنة أي هناك تذبذب التواترات.

طريقة

بعد محاكاة التجربة 3 مرّات نستعمل اللمسة $F9$ لمشاهدة تذبذب العينات .

• استقرار التواترات

أنجز محاكاة رمية قطعة نقدية غير مزيّفة 400 مرّة بهدف مشاهدة ميول تذبذب العينات نحو الإستقرار كلما كبر مقاسها.

نهتم بتواتر ظهور النتيجة " ظهر" الذي نرمز له بالعدد 1 (و نرمز للنتيجة "وجه" بالعدد 2).

ننفذ العملية كما يأتي :

- نترك السطرين الأول والثاني من ورقة الحساب للتسمية.
- في العمود A : نسجل رقم الرّمية (من 1 إلى 400) بدءا من الخلية $A3$.
- في العمود B : نسجل نتيجة كل رمي بحجز =ENT(ALEA()*2+1) في الخلية $B3$ ، ثمّ ننقر على اللمسة ↵ نعمّم محتوى الخلية $B3$ إلى الخلية $B402$.
- في العمود C : نحسب عدد المرّات التي ظهرت فيها النتيجة 1 من الرّمية الأولى حتى الرّمية الموافقة وذلك بحجز التكرار المجمّع الصّاعد للنتيجة الممكنة 1 =NB.SI(B$3:B3;"1") في الخليّة $C3$ والنقر على اللمسة ↵ ثم تعميم محتوى الخليّة $C3$ إلى الخليّة $C402$.

لاحظ أنّ الخلية Cn تحتوي على تكرار النتيجة 1 في عيّنة مقاسها عدد الرّميات أي محتوى الخلية An وبالتالي تواتر النتيجة 1 في عيّنة مقاسها n يساوي Cn/A.

- في العمود D : نحسب التّواتر Cn/An من أجل $3 \le n \le 402$ و ذلك بحجز =C3/A3 في الخلية $D3$ والنّقر على اللمسة ↵ ثمّ نعمّم محتوى الخليّة $D3$ إلى الخليّة $D402$ فنتحصّل على تواتر النّتيجة 1 في العينات التي مقاسها أصغر من 400 أو يساويه.

المطلوب هو إنجاز هذه العملية، ثم إنشاء مضلع التّواترات (بعد تحديد الخلايا من $D3$ إلى $D402$).
ماذا تلاحظ على التّواترات عندما يأخذ مقاس العيّنة قيما محصورة في المجالات $[1;50]$ ، $[50;100]$ ، $[100;200]$ ثم $[200;400]$ ؟ماذا تستنتج؟

حلّ	تعاليق
بعد إنجاز العمل المطلوب على الأعمدة A ، B ، C ؛ نحدّد الخلايا من $D3$ إلى $D402$ ثمّ :	
Insertion ← Graphique... ← Nuages de points ← ← Suivant >	حذار من الخلط بين تواتر النّتيجة 1 في التّجربة و التّواتر Cn/An.
• نكتب "عدد الرّميات " في: Axe des abscisses (X) : عدد الرميات	
و "التّواترات" في : Axe des ordonnées (Y) : التواترات ثم Suivant >	
و Terminer ، هكذا يظهر التّمثيل البياني.	
• نضع رأس الزالق على محور الفواصل، وننقر على الجهة اليمنى للفأرة فتظهر : Format de l'axe... ثم نحجز القيم المقابلة Minimum : 0 Maximum : 400 Unité principale : 50 Unité secondaire : 10	
• نضع رأس الزالق على محور الفواصل، وننقر على الجهة اليمنى للفأرة فتظهر Format de l'axe... ثم نحجز القيم المقابلة Minimum : 0 Maximum : 1 Unité principale : 0,1 Unité secondaire : 0,01	

	A	B	C	D
1		تكرار تواترات		
2	رقم الرمية	نتيجة الرمية	تكرار النتيجة "1"	تواتر النتيجة "1"
3	1	2	0	0,00
4	2	2	0	0,00
5	3	1	1	0,33
6	4	2	1	0,25

لاحظ أنّ النقر على اللمسة $F9$ يؤدي إلى إجراء محاكاة جديدة للتجربة، و هو ما يسمح لنا بملاحظة النتائج والتأكد من ظاهرة استقرار العينات .

• نلاحظ أنّ :

في المجال.........	التواترات محصورة ....
$[1;50]$	بين 0 و $0,60$
$[50;100]$	بين $0,50$ و $0,60$
$[100;200]$	بين$0,50$ و $0,60$
$[200;400]$	قريبة من $0,50$

نستنتج أنّ كلما كبر مقاس العيّنة ضاق المجال الذي يحصر التّواتر، ويؤول إلى $0,5$ و هذا يمثل ميول الظاهرة نحو الإستقرار.

• ننقر على $F9$ وفي كلّ مرّة ، نلاحظ أنّ مضلع التّواترات يتغيّر، وبتغيّر التّواترات المسجلة في العمود D.

كما نلاحظ أنّ التّواترات تؤول إلى الإستقرار شيئا فشيئا كما هو الحال في المحاكاة الأولى.

طريقة

نستعمل `=ENT(ALEA()*2+1)` و `=NB SI(B$2:B2;"1")` واللمسة $F9$.

II) استعمال الحاسبة البيانية

(الحاسبة البيانية المستعملة في هذه الفقرة هي TI–83 Plus، غير أنه يمكن استعمال حاسبات أخرى تمتلك نفس الخصائص).

• حجز سلسلة

احجز السّلسلة الإحصائيّة المعطاة في الجدول المقابل باستعمال حاسبة بيانية.

علامات التلاميذ	8,5	10	13	15,5	18
التكرارات	5	1	7	4	3

تعاليق	حلّ

• ننقر على STAT فتظهر الشاشة المقابلة:

```
EDIT CALC TESTS
1:Edit...
2:SortA(
3:SortD(
4:ClrList
5:SetUpEditor
```

▪ نتأكد من أن 1:Edit... قد تمّ اختيارها.

• ننقر على ENTER فتظهر الشاشة المقابلة:

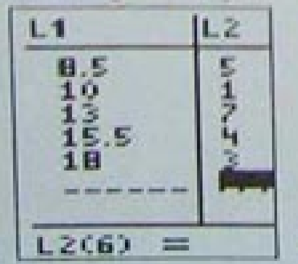
```
L1      L2      L3
------  ------  ------
L1(1)=
```

• نحجز السّلسلة كما يأتي : نسجّل علامات التّلاميذ في القائمة $L1$ والتكرارات في القائمة $L2$.

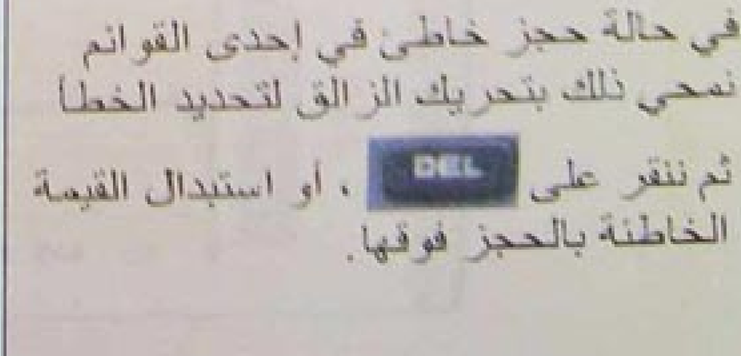
الإنتقال من عدد إلى عدد آخر يتّم بتحريك الزالق بواسطة:



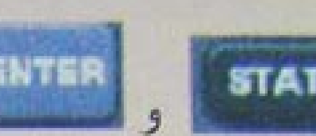
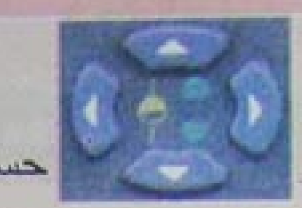
فتصبح الشاشة في النهاية

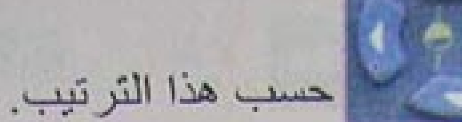


في حالة حجز خاطئ في إحدى القوائم نمحي ذلك بتحريك الزالق لتحديد الخطأ ثم ننقر على DEL ، أو استبدال القيمة الخاطئة بالحجز فوقها.



طريقة

نستعمل اللمسات :  و  و  حسب هذا الترتيب.



- **حساب مؤشّرات سلسلة**

احسب باستعمال حاسبة بيانية كلّ من: الوسط الحسابي، والوسيط، والمدى للسّلسلة الإحصائيّة المعطاة في الفقرة السّابقة.

حلّ	تعاليق

- ننقر على STAT فتظهر الشاشة المقابلة :

```
EDIT CALC TESTS
1:Edit...
2:SortA(
3:SortD(
4:ClrList
5:SetUpEditor
```

- ثم نختار CALC بتحديده بالزالق  كي نشاهد الشاشة المقابلة :

```
EDIT CALC TESTS
1:1-Var Stats
2:2-Var Stats
3:Med-Med
4:LinReg(ax+b)
5:QuadReg
6:CubicReg
7↓QuartReg
```

- ثمّ ننقر على ENTER فيظهر على الشاشة : Stats 1-Var.

نكتب $L2$, $L1$ و يظهر : Stats 1-Var L1,L2 ، ثم ننقر على ENTER

فنحصل على النتائج المقابلة في الشاشة.

```
1-Var Stats
 x̄=12.975
 Σx=259.5
 Σx²=3577.25
 Sx=3.326429254
 σx=3.242202184
↓n=20
```

حيث:

$\bar{x}$ هو الوسط الحسابي ؛ $\sum x$ هو مجموع كلّ العلامات ، n هو التكرار الكلي (أي عدد التلاميذ).

بتحريك الزالق يظهر $Med=13$ وهو الوسيط كما تظهر أكبر قيمة $MaxX$ للسلسلة و أصغر قيمة لها $MinX$ فنحسب المدى الذي يساوي:

```
1-Var Stats
↑Sx=3.326429254
 σx=3.242202184
 n=20
 minX=8.5
 Q1=9.25
↓Med=13
```

```
1-Var Stats
↑n=20
 minX=8.5
 Q1=9.25
 Med=13
 Q3=15.5
 maxX=18
```

$MaxX\text{-}MinX=18\text{-}8.5$

أي $MaxX\text{-}MinX=9.5$

تعاليق

- يمكن حساب المؤشّرات بنفس الحاسبة باستعمال طلبيات أخرى :

ننقر على [ ] ثم STAT ونختار MATH فتظهر الشاشة:

```
NAMES OPS MATH
1:min(
2:max(
3:mean(
4:median(
5:sum(
6:prod(
7↓stdDev(
```

- يشير mean(إلى الوسط الحسابي ،
- يشير median(إلى الوسيط ،... (نجد التفاصيل في دليل الحاسبة) .
- في بعض الحاسبة نجد Moyenne(يشير إلى الوسط الحسابي، Médiane(يشير إلى الوسيط ،...
- المؤشّرات الأخرى التي تعرضها الحاسبة، سوف تدرس في المستقبل.

طريقة

نستعمل STAT و ...1:Edit و CALC و ENTER و ▼ و ▲ بتدرج حسب التعليمات المعطاة في الحل.

رتب السلسلة : 2,6,1,7,3 ترتيبا تصاعديا

تعاليق	حلّ
في بعض الحاسبة نجد طلبية الترتيب التصاعدي هي Tricroi(ترتب السلسلة ترتيبا تنازليا باستعمال SortD(L1) أو باستعمال TriDécroi(في حاسبات أخرى.	• نحجز قيم السلسلة في L1 . • 2nd ← STAT ← OPS ← 1:SortA(← ENTER ثم نكتب SortA(L1) ونقر على ENTER. فيظهر على شاشة الحاسبة Done أو Fait (حسب نوع الحاسبة) أي منجز. للتأكد من أنّ السلسلة مرتبة : STAT ← 1:Edit... ← ENTER فتظهر السلسلة على شاشة الحاسبة مرتبة.

طريقة

نستعمل 2nd و STAT و OPS و 1:SortA(و ENTER

أعرض على شاشة الحاسبة أعدادا عشوائية باستعمال الطلبية Rand أو NbrAléat، وذلك حسب الحاسبة التي تستعملها.

تعاليق	حلّ
عند اختيار PRB والنقر على ENTER يظهر على شاشة بعض الحاسبة NbrAléat. استعمال الطلبية rand ثم النقر على ENTER يولد عددا عشوائيا ينتمي إلى المجال [0 ; 1 [. عندما نختار الطلبية rand ونكتب عددا N : randN ونقر على ENTER يظهر عدد عشوائي ينتمي إلى [0 ; N [	ننقر على MATH ثمّ نحرك الزّالق ◄ حتى PRB ننقر على ENTER فيظهر على الشاشة rand وكل نقر على ENTER يولد عددا عشوائيا. اختيار الطلبية rand ثم النقر 3 مرّات على ENTER يعطي نافذة مشابهة للمقابلة: rand .6679182274 .3219702592 .0721932748 • اختيار الطلبية rand ثمّ كتابة العدد 9 ، ثم النقر 3 مرّات على ENTER يعطي نافذة مشابهة للمقابلة: rand9 8.352556204 8.452860733 7.123558835

تعاليق

نستعمل `rand` ثم ننقر على ENTER للحصول على عدد عشوائي ينتمي إلى [1 : 0]

و `randN` ثم ENTER للحصول على عدد عشوائي ينتمي إلى [N : 0] .

• محاكاة تجربة بواسطة الطلبية *Rand* أو *NbrAléat* وذلك حسب الحاسبة المستعملة.

انجز محاكاة رمي نرد غير مزيف 5 مرات.احسب تواتر الوجه 6 .

تعاليق

يمكن استعمال طرق أخرى لتوليد أعداد عشوائية (طبيعية) تنتمي الى المجال *[1,6]* .

مثال : بالطلبية `int(rand*6+1)`

كلَ نقر على ENTER يولد أحد الأعداد: 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6.

في بعض الحاسبة تكتب الطلبية *seq(randInt(* بالشكل *suite(entAléat(*.

حلّ

نصطلح : كلَ وجه يقابله عدد النقط التّي يحملها .

يمكن عرض *X* عددا طبيعيا (عشوائيا) تنتمي إلى [1;N]

باستعمال الطلبية: *seq(randInt(1,N),x,1,X,1)*

و نحصل على هذه الطلبية كالآتي:



2nd ← STAT ← OPS ← 5:seq(← ENTER ثم

MATH ← PRB ← 5:randInt(← ENTER

و يظهر على الشاشة : *seq(randInt(*

ثم نحجز: *seq(randInt(1,6),x,1,5,1)*

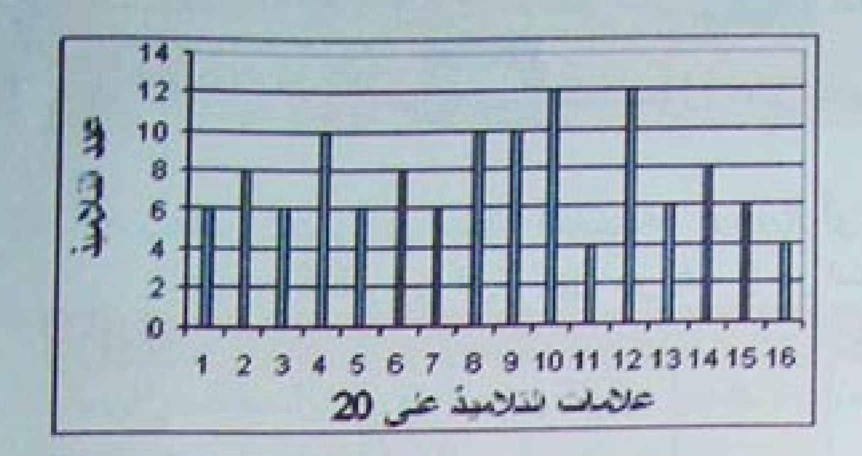
كي نتحصل على عيّنة مقاسها 5 التّي نخزنها في القائمة بـ *L2* باستعمال اللمسات STO ، 2nd ، 2 على الترتيب.

L1	L2
	6
	2
	3
	1
	6

تواتر ظهور الوجه 6 هو $\frac{2}{6}$ أي $\frac{1}{3}$ $(\approx 0,33)$

طريقة

نطبق مراحل محاكاة تجربة و ننجزها حسب ما توفره الحاسبة.



المخطط الآتي يعبر عن العلامات التي تحصلت عليها عينة من تلاميذ مؤسسة في اختبار الرياضيات .

1) احسب المعدل $\overline{x}$ لهؤلاء التلاميذ بتوظيف خاصية من خواص الوسط الحسابي.

2) صنف العلامات وفق فئات طول كل واحدة 4 و أحسب هكذا المعدل $\overline{y}$ لهؤلاء التلاميذ بتوظيف خاصية من خواص الوسط الحسابي.

3) صنف وفق فئات أخرى بهدف اقتراح ملاحظات كالآتي:

دون المستوى $\rightarrow [0;5[$ ؛ غير كاف $\rightarrow [5;10[$ ؛ مقبول $\rightarrow [10;15[$ ؛ جيد $\rightarrow [15;20[$.

3-1) احسب المعدل $\overline{z}$ لهؤلاء التلاميذ في هذه الوضعية.

3-2) اشرح كيف نستعمل في المجدول إكسال الطلبية :

```
=SI(B2<10;"غير كاف";SI(B2<12;"مقبول";SI(B2<16;"جيد";SI(B2<=20;"جيد جدا"))))
```

لاستخراج نتائج التلاميذ على الشكل الآتي :

الملاحظات	العلامات	قائمة التلاميذ
غير كاف	2,5	التلميذ 1
مقبول	11,5	التلميذ2
جيد جدا	17,5	التلميذ3
جيد	14	التلميذ4

4) قارن بين كل المعدلات التي تحصلنا عليها في الأسئلة السابقة . ناقش .

حل

1) الجدو ل الإحصائي للسلسلة المعطاة هو :

العلامات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
التكرار	6	8	6	10	6	8	6	10	10	12	4	12	6	8	6	4

نحسب $\overline{x}$ باستعمال الخاصية : **"حساب الوسط الحسابي انطلاقا من أوساط حسابية جزئية ".**

معدل العلامات من 1 إلى 6 هو $m_1 = \frac{1\times6+2\times8+3\times6+4\times10+5\times6+6\times8}{6+8+6+10+6+8} = \frac{158}{44} = \frac{79}{22}$

معدل العلامات من 7 إلى 11 هو $m_2 = \frac{7\times6+8\times10+9\times10+10\times12+11\times4}{6+10+10+12+4} = \frac{376}{42} = \frac{188}{21}$

معدل العلامات من 12 إلى 16 هو $m_3 = \frac{12\times12+13\times6+14\times8+15\times6+16\times4}{12+6+8+6+4} = \frac{488}{36} = \frac{122}{9}$ إذن

$\overline{x} = \frac{44m_1+42m_2+36m_3}{44+42+36} = \frac{1022}{122} = \frac{511}{61}$ ومنه $\overline{x} \approx 8,38$

2) عندما نرتب العلامات وفق فئات طول كل واحدة 4 ، نجد الفئات : $[0;4[,[4;8[,[8;12[,[12;16[,[16;20[$

يمكن عندئذ التعبير عن السلسلة الإحصائية بالجدول الآتي:

الفئة (العلامة)	$[0;4[$	$[4;8[$	$[8;12[$	$[12;16[$	$[16;20[$
التكرار (عدد التلاميذ)	20	30	36	32	4
مركز الفئة	2	6	10	14	18
(مركز الفئة)-10	8-	4-	0	4	8

نحسب المعدل $\overline{y}$ باستعمال **الخاصية 2:** " $\overline{y+a}=\overline{y}+a$ " (أخذنا هنا $a=-10$)

الوسط الحسابي للسلسلة $(-8;20),(-4;30),(0;36),(4;32),(8;4)$ هو :

$$\overline{y-10}=\frac{(-8)\times 20+(-4)\times 30+0\times 36+4\times 32+8\times 4}{20+30+36+32+4}=\frac{-120}{122}=-\frac{60}{61}$$

بما أن $\overline{y-10}=\overline{y}-10$ فإن $\overline{y}-10=-\frac{60}{61}$ أي $\overline{y}=\frac{550}{61}$ و منه $\overline{y}\approx 9{,}02$

3) (1-3) نعبر عن السلسلة الإحصائية في هذه الوضعية بالجدول الآتي:

الفئة (العلامة)	$[0;5[$	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20[$
التكرار (عدد التلاميذ)	30	40	42	10
مركز الفئة	2,5	7,5	12,5	17,5

نحسب المعدل $\overline{z}$: $\overline{z}=\frac{2{,}5\times 30+7{,}5\times 40+12{,}5\times 42+17{,}5\times 10}{30+40+42+10}=\frac{1075}{122}$ إذن $\overline{z}\approx 8{,}81$

(2-3) إستخراج نتائج التلاميذ باستعمال المجدول *Excel*

- نكتب " قائمة التلاميذ " في الخلية A1 ؛" العلامات" في الخلية B1 ؛ " الملاحظات" في الخلية C1.
- نحجز اسم تلميذ في الخلية A_i وعلامته في الخلية B_i $(i\neq 1)$.
- نحجز في الخلية C2 الطلبية

```
=SI(B2<10;"غير كاف";SI(B2<12;"مقبول";SI(B2<16;"جيد";SI(B2<=20;"جيد جدا"))))
```

ثم ننقر على ENTREE و تظهر على الشاشة الملاحظة الخاصة بالتلميذ الأول في القائمة.

ننشط الخلية C2 و نسحب الفأرة من C2 إلى Cn (عدد التلاميذ هو n ؛ $n\geq 2$) لنتحصل على نتيجة كل تلميذ.

	A	B	C	D	E	F
1	قائمة التلاميذ	العلامات	الملاحظات			
2	التلميذ 1	2,5	غير كاف			
3	التلميذ 2	11,5	مقبول			
4	التلميذ 3	17,5	جيد جدا			
5	التلميذ 4	14	جيد			

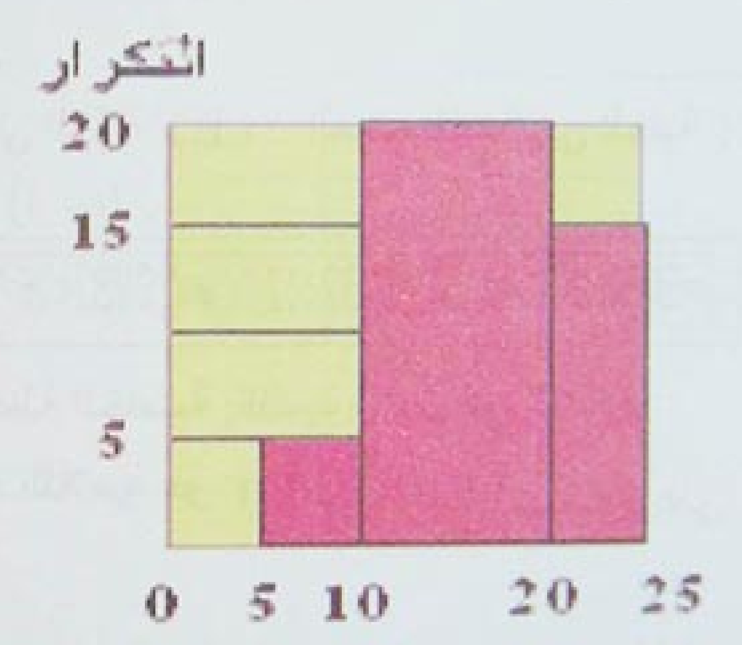
4) $\overline{y}$ و $\overline{z}$ يختلفان عن $\overline{x}$ نظرا لحساب $\overline{y}$ و $\overline{z}$ بتعويض كل فئة بمركزها أي فرضنا أن كل تلاميذ فئة $[a;b[$ تحصلوا على نفس العلامة $\frac{a+b}{2}$ و فقدنا عندئذ معلومات حول توزيع العلامات.

أصحيح أم خاطئ ؟

1. أ) إذا كانت قيم الميزة الإحصائيّة أعدادا صحيحة فإن الميزة متقطعة.
ب) إذا كانت الميزة الإحصائيّة متقطعة فإن قيمها أعداد صحيحة.
جـ) في السلسلة 7-؛3-؛1-؛0؛2؛4؛4
الوسط الحسابي يساوي الوسيط.
د) انطلاقا من الجدول الآتي :

الفئات	التكرار
[5;10[	5
[10;20[	20
[20;25[	15

نستنتج المدرج التكراري الآتي:



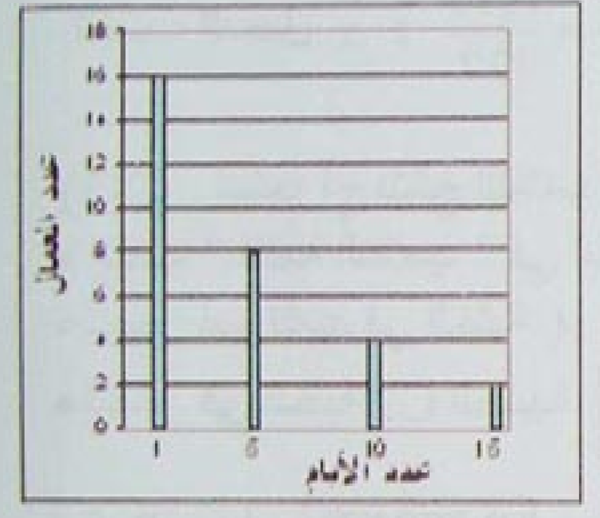
α) مجموع التواترات في كلّ عيّنة يساوي 1.
β) لمحاكاة رمي 3 قطع نقدية ، يمكن إختيار أعداد صحيحة عشوائية بين 0 و 3.
γ) لمحاكاة إختيار أعداد عشوائي من 2 إلى 12، يمكن رمي نردين و إرفاق كلّ رمي بمجموع النتيجتين المحصّل عليها.
λ) لمحاكاة رمي نرد بمجدول ،يمكن استعمال

=1+ent(alea()*6)

ω) التواتر هو التكرار المعبر عنه بنسبة مئوية.
δ) عندما نضرب تواتر قيمة في 100 نجد تكرارها.
ε) لا تتغير التواترات عندما نضرب كلّ التكرارات في نفس العدد .
θ) لا تتغير التواترات عندما نضيف نفس العدد لكل التكرارات .
ρ) التواتر يكون دائما حاصل قسمة عددين موجبين.
τ) رمي قطعة نقدية يؤول إلى سحب قريصة من كيس حيث 50% من القريصات تحمل الكلمة "ظهر" و50% تحمل الكلمة "وجه".

تمارين تطبيقية

2. المخطط بالأعمدة الآتي يمثل عدد أيام العطل المرضية لعمال مؤسسة.



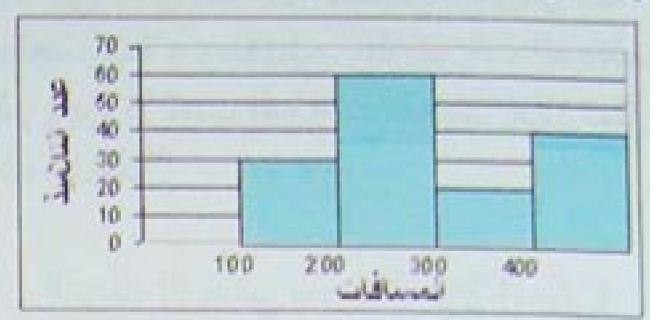
أ) عين الجدول الإحصائي للسلسلة.
ب) ما هو عدد عمال المؤسسة ؟
جـ) ما هو منوال السّلسلة؟

3. نعتبر سلسلة تتعلق بأوزان طرود بريدية.

الأوزان بالكيلوغرام	1	2	3	5	7
عدد الطرود	8	5	4	2	1

أ)هل ميزة هذه السّلسلة كمية أم نوعيّة؟
ب) هل ميزة هذه السّلسلة مستمرة أم متقطعة ؟
جـ) ما هو عدد الطرود ؟
د) ما هو عدد الطرود التّي وزن كلّ منها $3kg$ على الأقل ؟
ر) ما هو عدد الطرود التّي وزن كلّ منها $3kg$ على الأكثر ؟
ط) ما هو الوزن المتوسط لهذه الطرود ؟
ك) احسب مدى هذه السّلسلة .
م) ارسم المخطط بالأعمدة لهذه السّلسلة.

4. المدرج التكراري الآتي يمثل المسافات بين المدرسة ومساكن التلاميذ .



أ) ما هي الفئة المنوالية؟
ب) احسب الوسط الحسابي باستعمال مراكز الفئات.

5. أ) إليك قيمة مقرّبة للعدد π:
3.1415926535897

ما هو تواتر الرّقم 9 ؟
ب) نفس السؤال من أجل القيمة المقرّبة الآتية للعدد π: $3.14159265358979323846 26$

6. كرّرنا نفس التّجربة مرتين وتحصلنا على عينتين مقاس كلّ منها 100.

العيّنة الأولى

النتائج	x	y	z
التواترات	0,2	0,3	0,5

العيّنة الثانية

النتائج	x	y	z
التواترات	0,5	0,1	0,4

احسب الوسط الحسابي ثم عين جدول التكرارات و أنشئ مضلع التواترات بالنسبة إلى كلّ عيّنة.

7. اتمم توزيع التواترات الآتي :

النتائج	x	y	z
التواترات	0,1	0,1	

8. ما هو دور اللمسة $F9$ عندما نستعمل مجدول؟

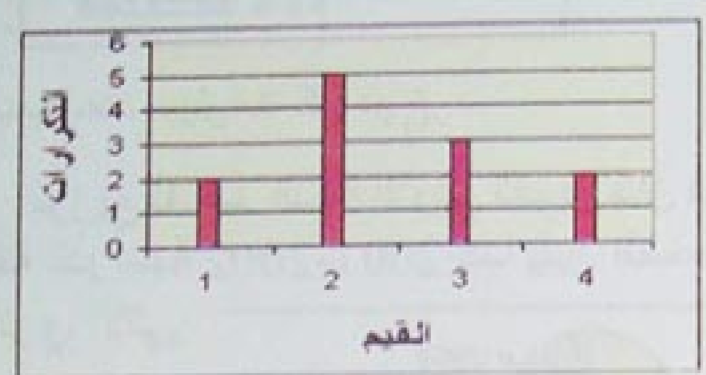
9. ما معنى الطلبية `=NB.SI(D15:D45;"لا")` عندما نستعمل مجدول؟

10. ما معنى الطلبية `=SI(B10=1;"هو";"ليس هو")` عندما نستعمل مجدول؟

11. ما معنى الطلبية `rand6` عندما نستعمل الحاسبة البيانية *TI-83Plus*.

12. ما معنى الطلبية `randInt(4,6)` عندما نستعمل الحاسبة البيانية *TI-83Plus*.

13. يعطى المخطط بالأعمدة الآتي. أنشئ مضلع التواترات .



14. 30% من القريصات الموجودة داخل كيس، بيضاء . قال مولود: " عندما نضرب عدد هذه القريصات البيضاء في 2، النسبة المئوية المعطاة تتغير و تصبح 60%". هل توافق مولود؟

15. أجري استفتاء في بلد مجزء إلى منطقتين : المنطقة الشمالية والمنطقة الجنوبية، وكانت النتائج كما يلي:

	المنطقة الشمالية	المنطقة الجنوبية
عدد الناخبين	4074728	2345788
النسب المئوية للمصوتين بنعم	47%	54 %

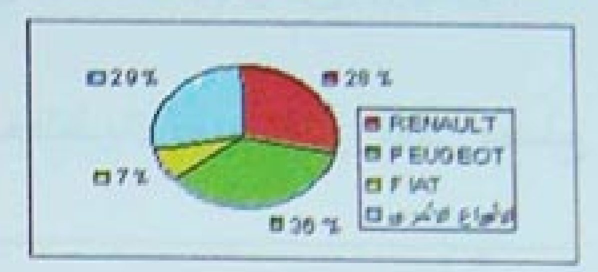
ما هي نتيجة هذا الاستفتاء؟

16. قدّم مدير ثانوية نتائج البكالوريا في مؤسسته:

الشعب	عدد التلاميذ المسجلين	نسبة النجاح
آدب	60	20%
علوم الطبيعة والحياة	110	52%
علوم دقيقة	20	90%

ما هي نسبة النجاح في هذه الثانوية؟

17. عدد السّيارات السّياحية في الجزائر كان 1739286 في 2002/12/31.
المخطّط الدائري الآتي يبين توزيع هذه السّيارات حسب النوع.
(المصدر : الديوان الوطني للإحصائيات)



احسب عدد سيارات كلّ نوع.

18. توزيع تلاميذ السّنة الأولى ثانوي كان في السّنة الدراسية 2002-2001 كما يبين المخطّط الدائري الآتي:

(المصدر: وزارة التربية الوطنية)
احسب النسبة المئوية لتلاميذ كلّ جذع مشترك.

19. عدد السّيارات السّياحية في الجزائر كان 1739286. الجدول الآتي يبين توزيع هذه السّيارات حسب أعمارها.

السّنوات	عدد السّيارات
أقل من 5 سنوات	108846
[5 ;10 [	128475
[10 ;15 [	287085
[15 ; 20 [	336021
أكثر من 20 سنة	878859

(المصدر : الديوان الوطني للإحصائيات)
ارسم المدرج التكراري والمخطّط الدائري لهذه السّلسلة.

20. سجّلنا قامات 250 شخصا :

التكرارات	القامات t (cm)
12	$150 \le t < 160$
33	$160 \le t < 165$
45	$165 \le t < 170$
50	$170 \le t < 175$
61	$175 \le t < 180$
26	$180 \le t < 185$
17	$185 \le t < 190$
6	$190 \le t < 195$

1) عين جدول التكرارات المجمّعة الصّاعدة وجدول التكرارات المجمّعة النّازلة.
2) انشئ ، في نفس الشكل، مضلّع التّواترات المجمّعة الصّاعدة ، ومضلع التّواترات المجمّعة النّازلة، ثم عين ترتيب نقطة تقاطعهما. ماذا تمثل فاصلة هذه النقطة؟

21. سجل الدرك الوطني سرعة 120سيارة

السّرعة (km/h)	[0;30[	[30;45[	[45;60[	[60;120[
التّكرار	40	30	38	12

انشئ مدرج التكرارات.

22. الجدول الآتي يتعلق بالأجور التي يتقاضاها 70 عاملا بالدينار في اليوم.

الأجور	[500;550[	[550;700[	[700;1000[
عدد العمال	20	40	10

أنشئ مدرج التكرارات.

23. نعتبر الجدول الإحصائي الآتي:

الفئات	التّكرار
[0;150[	120
[150;300[	160
[300;350[	90
[350;400[	80
[400;500[	60

انشئ المدرج التكراري لهذه السّلسلة.

مؤشّرات سلسلة إحصائيّة

24. استعمل الرّمز Σ
1) اكتب المجاميع الآتية باستعمال الرّمز Σ :

$$2^3+3^3+4^3+5^3$$
$$3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7$$
$$5+9+13+17$$

2) احسب المجموعين :

$$\sum_{k=0}^{4}(3k-2) \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{3}\frac{2}{3k(k+1)}$$

25. احسب المدى e والوسط الحسابي $\overline{x}$ و الوسيط Med و المنوال Mod، وذلك من أجل كلّ سلسلة مما يلي:
- السّلسلة أ: 4،4،6،6،7،9،5 .
- السّلسلة ب: 9،14،8،4،5 .
- السّلسلة جـ: 12،9،5،9،8،9،12،8 .

26. أصحيح أم خاطئ ؟ علل.
نعتبر علامات تلميذ في 8 مواد تعليمية.
1) العلامة الوسيطية تفوق العلامة المتوسطة.
2) العلامة المنوالية تفوق كلّ العلامات.
3) العلامة المنوالية تفوق العلامتين، الوسيطية والمتوسطة.
4) لا يتغير المعدّل عندما نضيف 3 نقط لعلامة ونطرح 3 نقط لعلامة أخرى.

27. نعتبر السّلسلة :

9	7	0	8	5	4	9	7	0	0	5

انشئ مضلع التكرارات المجمّعة الصّاعدة واستنتج الوسيط.

28. الجدول الآتي يمثل السّرعات التي سجلتها الشرطة بأحد الطرق السّريعة.

السّرعات (km/s)	[70;80[	[80;90[	[90;100[
عدد السّيارات	2	10	7

السّرعات (km/s)	[100;110[	[110;120[	[120;130[
عدد السّيارات	12	8	6

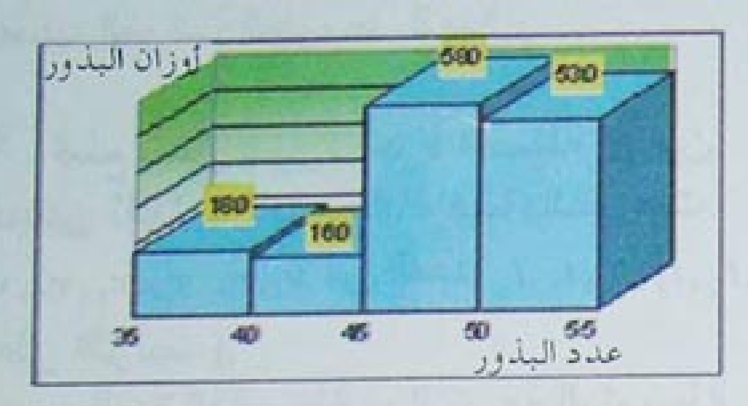
1) عين الفئة المنوالية، والوسيط.
2) تفاصيل هذه المعطيات هي :

80	85	80	80	85	80	75	70
90	98	95	90	80	85	80	85
105	100	108	105	100	95	95	98
115	100	108	105	100	100	108	108
120	110	115	110	118	115	110	118
			125	125	120	125	124

عين عندئذ المنوال، والوسيط.

29. أ) جد سلسلة خمسة أعداد وسطها الحسابي 9 ووسيطها 9، ومداها 12.
ب) جد سلسلة خمسة أعداد وسطه الحسابي يساوي وسيطها ويساوي مداها.

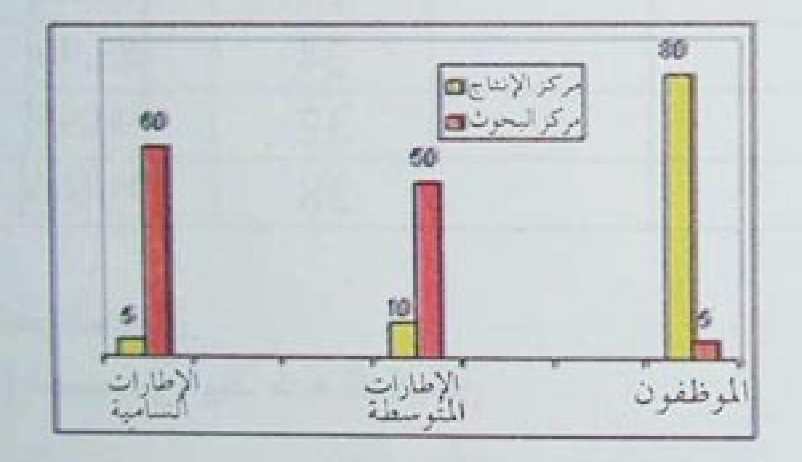
30. المدرج التكراري الآتي يمثل سلسلة أوزان بذور فاصولياء بالسّنتيغرام.



اتمم الجدول الآتي ثم احسب الوسط الحسابي.

أوزان البذور	[35;40[	[40;45[	[45;50[	[50;55[
التكرار				

31. مؤسسة تتكون من مديريتين : مديرية البحوث ومديرية الإنتاج.
المخطط الآتي يمثل توزيع العمال حسب رتبهم.



الأجور الشهرية لهؤلاء العمال موزعة حسب الجدول الآتي:

الرّتب	الإطارات السّامية	الإطارات المتوسطة	الموظفون
الأجور (DA)	50000	40000	20000

أ) عين الوسط الحسابي و المنوال في كلّ مديرية.
ب) في أي مديرية يتقاضى العمال أحسن أجور؟ علل إجابتك.

32. تتكون مؤسسة من 745 عاملا من بينهم 56 إطارا. المرتب الشهري المتوسط هو 15000 DA

بالنسبة إلى العمال و 25000 DA بالنسبة إلى الإطارات.

أ) ما هو المرتب المتوسط للعمال الذين ليسوا إطارات؟

ب) ارتُكِب خطأ في حساب المرتب المتوسط للإطارات الذي هو في الحقيقة $25400DA$.
احسب المرتب المتوسط للعمال.

33. قطع سائق سيارة أجرة المسافة d بين مدينتين ثلاث مرات ذهابا و ايابا بالسرعات $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ في المدد $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ (على الترتيب).
احسب المدة المتوسطة، والسرعة المتوسطة.

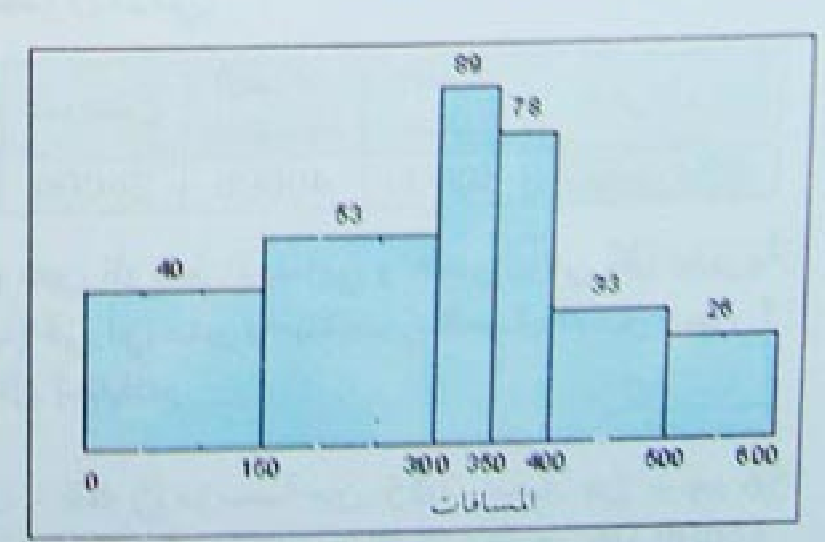
34. سجلت مؤسسة لكراء السيارات، في إطار متابعتها لحضيرتها، أن 100 سيارة قطعت عددا من الكيلومترات يبينه الجدول الآتي:

عدد الكيلومترات	عدد السيارات	التكرار المجمع الصاعد	التكرار المجمع النازل
[80;85[	16		
[85;90[	24		
[90;95[	32		
[95;100[	28		

أ) اتمم الجدول.

ب) احسب وسيط هذه السلسلة.

35. المدرج التكراري الآتي يمثل المسافات بالمتر بين مدرسة ومساكن تلاميذ.



اتمم الجدول الآتي :

الفئات	التكرار	ارتفاع المستطيل	التكرار المجمع الصاعد
[0;150[	120	40	
[150;300[		53	
[300;350[		89	
[350;400[	78	78	
[400;500[		33	
[500;600[		26	

36. معدل الأعمار لمئة شخص هو 30سنة.

1)هل يمكنك استنتاج عدد الأشخاص؟علل.

2) برهن بالخلف أنّ وسيط الأعمار لا يفوق 60 سنة.

37. الجدولان الآتيان يعبران عن درجات الحرارة المسجلة في مدينتين " س " و " ع" خلال 2003 .

المدينة " س "						
درجات الحرارة (°C))	9	9	11	13	15	18
	21	22	21	17	13	11

المدينة "ع "						
درجات الحرارة (°C))	8	9	10	12	16	19
	23	21	20	15	12	10

1)احسب درجة الحرارة المتوسطة، ودرجة الحرارة الوسيطية، و المدى لكل مدينة .

2) ما هي المؤشرات (الوسيط-المدى أو الوسط الحسابي-المدى) الأحسن تمثيلا لكل سلسلة من السلسلتين.

38. احسب الوسط الحسابي للأعداد :
4.13874978978386 ؛ 7.23874978978386 ؛ 8.93874978978386 ؛ 3.13874978978386 .

39. هل يمكن أن يتحصل كلّ تلميذ من تلاميذ قسم على علامة تفوق معدّل القسم؟ اشرح.

40. جدول الآتي يعبّر عن قامات تلاميذ قسمين " أ " و " ب ".

	القسم " أ "			
القامات بالسنتيمتر	150	158	170	175
عدد التلاميذ	7	8	10	6

	القسم " ب "			
القامات بالسنتيمتر	152	160	165	170
عدد التلاميذ	5	8	7	6

1) عين القامة الوسيطية $MedA$ في القسم " أ " و القامة الوسيطية $MedB$ في القسم " ب ".
2) هل يمكن تعيين الوسيط Med للقسمين إنطلاقا من $MedA$ و $MedB$؟
احسب عدد الأشخاص الذين قاماتهم أكبر أو تساوي $175cm$.

41. نعتبر سلسلة 11 عددا كلها تنتمي إلى المجال $[0,8]$.
هل يمكن أن يكون الوسط الحسابي 2 و الوسيط 4؟

42. عدد أطفال عائلة هو 7. عين عمر الطفل الأكبر اذا علمت أنّ:
العمر المنوالي : 5 سنوات ؛ العمر الوسيطي: 7 سنوات ؛ العمر المتوسط :8 سنوات و هو عمر التوأمان.

43. عيّن سلسلة 5 أعداد علما أنّ الوسط الحسابي هو 40 والوسيط هو 20 والمدى هو 100.

44. السّلسلة الآتية تمثل قامات أشخاص بالسّنتيمتر .

170	160	160	158	181	185	178	181
165	160	178	158	179	160	181	179
162	178	169	159	178	165	175	159
169	169	175	169	165	166	176	180
180	175	165	175	165	178	168	178
158	169	169	162	170	166	175	179
179	179	179	163	163	165	160	163
160	180	176	163	163	166	170	160
179	161	160	163	170	165	169	170
160	168	166	168	164	178	178	156

1) استعمل مجدول إكسال كي تمثل بيانيا هذه السّلسلة و كي تحسب وسطها الحسابي و وسيطها و منوالها والمدى .
2) نفس الأسئلة باستعمال حاسبة بيانية.
3) باستعمال مجدول إكسل:
- لاحظ كيف تتغير مؤشرات الموقع عندما نغير قيم من السّلسلة.
- احسب عدد الأشخاص الذين قاماتهم $175cm$

45. سجّلنا المعدلات الفصلية لتلاميذ قسم نهائي:
$9,5$؛$12,75$؛$10,75$؛$16,75$؛$8,45$ ؛$9,75$ ؛ $11,33$
باستعمال مجدول،استخرج نتائج هؤلاء التّلاميذ موضحا:
"ينتقل إلى القسم الأعلى" إذا كان المعدّل أكبر أو يساوي 10 و"يعيد السّنة" في الحالات الأخرى.

خواص الوسط الحسابي

46. قام رياضي في رمي الجلة بخمس محاولات و تحصل على النتائج الآتية: $8m$ ،$8m$ ،$9m$،$7m$،$9m$.

احسب ذهنيا الوسط الحسابي.

47. نعتبر مكعباً حرفه a (بالسّنتيمتر)؛ يرمز S لمساحته و V لحجمه.
1) اتمم الجدول الآتي :

a	1	2	3	4	5	6	7
S							
V							

ثم احسب الحرف المتوسط.
2) هل المساحة المتوسطة تساوي مربع الحرف المتوسط؟
3) هل الحجم المتوسط يساوي مكعب الحرف المتوسط؟

48. معدل 5 علامات لتلميذهو 11 و علاماته الأولى كانت 7؛ 11؛ 12؛ 10.
ما هي العلامة الخامسة ؟

49. أ) احسب المعدّل $\overline{x}$ للأعداد 7؛5؛3؛9؛3؛5.

ب) احسب المعدّل $\overline{y}$ الذي تتحصل عليه عندما نطرح 3 من كلّ عدد من الأعداد السّابقة . جد علاقة بين $\overline{x}$ و $\overline{y}$.

جـ) احسب المعدّل $\overline{z}$ الذي تتحصل عليه عندما تضرب في 10 كلّ عدد من الأعداد السّابقة . جد علاقة بين $\overline{x}$ و $\overline{z}$.

50. احسب الوسط الحسابي للأعداد :
$3,897202$ ؛ $3,897201$; $3,897204$ ؛ $3,897203$.

51. تحصل تلميذ، في الفصل الأول، على العلامات الآتية : $11,9, 10,11,9,10$.
أ) احسب المعدّل $\overline{x}$ لهذا التلميذ.
ب) لوحظ في الفصل الثاني تحسين كلّ علامة من علامات الفصل الأول بـ % 20.
احسب عندئذ المعدّل $\overline{y}$.
جد علاقة بين $\overline{x}$ و $\overline{y}$.

52. سجل أوزان و قامات 12 رياضيا و أعطيت النتائج على الشكل (x,y) حيث x هي القامة بالسّنتيمتر و y هو الوزن بالكيلو غرام.
$(172;69)$،$(178;70)$،$(174;72)$،$(176;65)$;
$(174;65)$،$(176;63)$،$(175;70)$،$(176;64)$
$(175;72)$;$(174;68)$;$(174;70)$;$(178;68)$.
أ) احسب القامة المتوسطة $\overline{x}$ عندما نأخذ القامة $175cm$ كمرجع .
ب) احسب الوزن المتوسطة $\overline{y}$ عندما نأخذ القامة $65kg$ كمرجع . جد علاقة بين $\overline{x}$ و $\overline{y}$
جـ) انشئ في معلم متعامد و متجانس كلّ النقط $M(x,y)$ و النقطة $A(\overline{x},\overline{y})$.

توزيع التّواترات

53. أ) كيف نتحصل على أعداد عشوائية تنتمي إلى : $[0;10]$ ؟ $[1;13]$ ؟ $[5;17]$ ؟
باستعمال حاسبة بيانية.
ب) نفس السّؤال عندما نستعمل مجدولا .

54. عدد تلاميذ مدرسة هو 1500، نريد تقدير العدد x للتلاميذ الذين يحملون نظارات . نختار 40 تلميذا عشوائيا ونلاحظ أنّ 10 منهم يحملون نظارات.
ماذا يمكن أن نستنتج فيما يخص العدد x.

55. كتبت جريدة في صفحتها الأولى
600 شخص من بين1000 يختارون المترشح"س" حسب الإحصائيات الأخيرة .
هل يمكن التّصريح أنّ يفوز "س" في الإنتخابات؟

56. الحاسبة البيانية يوفر أعدادا عشرية (تتكون من 10 أرقام ولا نعتبر الصفر قبل الفاصلة) تنتمي إلى المجال $[0;1[$ بواسطة rand
عند سحب 8 أعداد عشوائية؛تتحصل عندئذ على80 رقم . أحسب تواتر الرّقم 7.
قارن بالتّواترات التّي تحصل عليها زملاؤك الذين أنجزوا نفس التّجربة.

تذبذب العينات _ المحاكاة

57. كلّ زميل من زملائك يطلب من 10 أشخاص إعطاء رقم هن 0 إلى 7.
أ) اجمع كلّ المعلومات و عين جدول التّواترات.
ب) أنجز محاكاة لهذه التّجربة بالحاسبة البيانية .
جـ) أنجز محاكاة هذه التّجربة باستعمال مجدول و انشئ مضلع التّواترات .

58. نسحب قريصة من كيس يحتوي على 4 قريصات حمراء و 6 سوداء .
أ) أنجز 20 سحبا ثم عين تواتر ظهور قريصة حمراء.
ب) كرّر العملية 5 مرّات و سجل في كلّ مرّة تواتر ظهور قريصة حمراء.
(يمكن القيام بهذه التّجارب مع زملائك) .
اتمم الجدول الآتي :

العملية	الأولى	الثانية	الثّالثة	الرّابعة
تواتر ظهور قريصة حمراء				

أنشئ مضلع التّواترات . لاحظ تغير التّواترات (في عينات مقاسها 20) .
جـ) استعمل النتائج السابقة لإتمام الجدول الآتي:

مقاس العيّنة	20	60	80	100
تواتر ظهور قريصة حمراء				

أنشئ مضلع التّواترات. لاحظ تغير هذه التّواترات في عينات مقاساتها مختلفة .
جد حصرا لتواتر ظهور قريصة حمراء.

59. نرمي نردين 100 مرّة و نسجل في كلّ مرّة مجموع النتيجتين .
1) ما هي النتائج الممكنة؟
2) أنجز محاكاة لهذه التّجربة باستعمال مجدول.
نكتب في الخليّة $A2$:
=ENT(ALEA()*6+1)+ENT(ALEA()*6+1)
كي نتحصل على عدد طبيعي عشوائي من 2 إلى 12. نسحب الفأرة من $A2$ إلى $A101$. نكتب النتائج الممكنة في العمود B (من $B2$ إلى $B12$) .
نكتب في الخليّة $C2$ =NB.SI($A$2:$A$101;B2)/100
كي نتحصل على تواتر النتيجة الممكنة 2(من $A2$ إلى $A101$) ؛ ثم نسحب الفأرة من $C2$ إلى $C12$.

	A	B	C
1	عينة مقاسها100	النتائج الممكنة	التواتر
2	6	2	0,03
3	8	3	0,08
4	6	4	0,07

اعرض على الشاشة مضلع التواترات.
أنقر عدة مرّات على اللمسة $F9$، ماذا تشاهد؟ إشرح.

60. الجدول الآتي يمثل توزيع تواترات عيّنة .

القيم	6	7	9	10
التواترات	0,2	f	g	0,3

ماذا يمكن أن نستنتج فيما يخص الوسط الحسابي إذا علمت أنّ المنوال يساوي 7؟

61. الجدول الآتي يمثل توزيع تواترات من أجل عيّنة .

القيم	6	7	8	9
التواترات	0,4	f	g	0,3

ماذا يمكن ان نستنتج فيما يخص الوسط الحسابي إذا علمت أنّ الوسيط هو 5؟

62. نستعمل حاسبة بيانية لأخذ عددين x و y من $[0,1[$ بطريقة عشوائية، ثمّ نحسب العدد c حيث: $c = x^2 + y^2$
أ) تأكد أنّ c ينتمي إما إلى $[0,1[$ إما إلى $[0,2[$.
ب) أسحب عيّنة مقاسها 20،اتمم الجدول :

	$0 \leq c < 1$	$1 \leq c < 2$

جـ) استعمل مجدولا لإتمام الجدول السّابق من أجل عيّنة مقاسها 1000.

63. الأحوال الجوية في بلد إفتراضي هي كالآتي:
في كلّ يوم : لدينا 3حظوظ على 7 كي يكون هذا اليوم ممطرا و 4 حظوظ على 7 كي يكون مشمسا.
ننجز محاكاة لهذه الوضعية باستعمال كيس يحتوي على قريصات زرقاء (تمثل المطر) وعلى قريصات صفراء (تمثل الشمس).
لمعرفة الأحوال الجوية في الأيام السّبعة المقبلة، نسحب 7 قريصات على التوالي و مع الإعادة قبل السحب الموالي (نسحب قريصة و نسجل لونها ثمّ نعيدها داخل الكيس، نكرّر هذه العملية7 مرّات).
أ) ما هو عدد القريصات الزرقاء و عدد القريصات الصفراء التي يجب وضعها داخل الكيس لإنجاز محاكاة مقبولة؟
ب) أنجز 20 محاكاة و احسب التّواتر المتوسط للأيام الممطرة و قان النتيجة مع معطيات النص.

64. كيس يحتوي على 60 قريصة بيضاء و 40 قريصة حمراء .نسحب قريصة بإعادة.
أ) استعمل مجدولا لمحاكاة هذه التّجربة من أجل عيّنة مقاسها100 .
نتحصل على أعداد طبيعية عشوائية x تنتمي إلى المجال $[1,100]$ بواسطة ALEA و ENT و نصطلح :
إذا كان $x \leq 60$: القريصة بيضاء
و إذا كان $x > 60$: القريصة حمراء.
ب) كرّر هذه المحاكاة 5 مرّات و سجل في كلّ مرّة تواتر ظهور القريصة البيضاء.
ماذا تلاحظ؟

مسائل

65. طلب من أشخاص في مدينتين " أ" و" ب" عدد السّاعات التي يستغرقونها في مشاهدة التلفزة أسبوعيا فكانت النتائج كالآتي :
بالنسبة إلى المدينة " أ " :
15.18.11.11.3.6.22.21.10.17.8.24.24.25.9.9
. 16.16.17.9.12.13.17.17.17.9.20.15.20
بالنسبة إلى المدينة "ب " :

16.11.30.15.14.12.8.6.4.30.18.38.20.9.27
.1.5.15 .9.9.11.10.7.13.0.30.15.26

1) مثل كلّ سلسلة في جدول إحصائي.
2)احسب المدى و الوسيط و الوسط الحسابي لكل سلسلة.
3) نصنف في كلّ سلسلة المعطيات وفق فئات طول كلّ واحدة 7. انشئ المدرج التكراري لكل سلسلة.
4) استعمل نتائج الأسئلة السّابقة لمقارنة السلسلتين أعلاه.
5) نجمع السّلسلتين في سلسلة واحدة فنتحصّل على سلسلة جديدة يطلب تعيين مداها و وسيطها و وسطها الحسابي.
6) هل توجد علاقة تربط بين وسيط السّلسلة الجديدة و وسيطي السّلسلتين السّبقتين؟
7) هل الوسط الحسابي للسلسلتين السّابقتين يساوي الوسط الحسابي للسلسلة الجديدة؟
8) اشرح كيف نحسب الوسط الحسابي للساسلة الجديدة باستعمال نتائج السؤال 2).

66. مؤسسة إنتاجية تتكون من 41 رجل و 31 إمرأة . الجدولان الآتيان يعبران عن المرتبات الشهرية بآلاف الدنانير.

مرتبات الرّجال				
15	15	15	15	15
15	15	15	18	18
18	18	18	18	18
18	21	21	21	21
21	25	25	25	25
25	25	25	25	25
25	25	25	25	25
25	25	30	30	30
30				

مرتبات النساء				
15	15	15	15	15
15	15	15	18	18
18	18	18	18	18
18	21	21	21	25
25	25	25	25	25
25	30	30	30	30
30				

1) اتمم الجدول الآتي:

	كلّ العمال	النساء	الرّجال
الوسط الحسابي			
الوسيط			
أكبر مرتب			
أصغر مرتب			
المدى			
المرتب المنوالي			

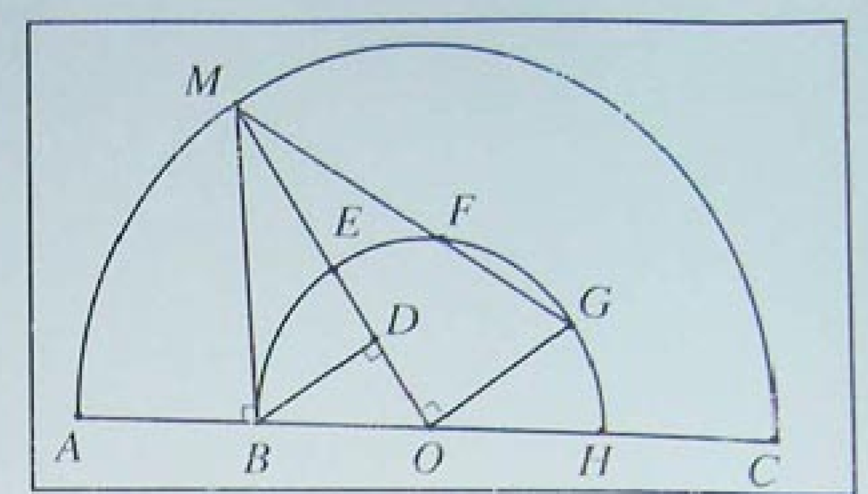
2) اتمم الجدول الآتي :

الأجور	[15;19[	[19;23[	[23;27[	[27;30[
عدد الرّجال				
عدد النساء				

3)اقترح مخطّطا يسمح بمقارنة مرتبات النساء مع مرتبات الرّجال.
4) لتخفيف الفوارق بين مرتبات الجنسين، اقترح رفع مرتبات النساء بنسبة 2 %.
احسب الوسيط و الوسط الحسابي في هذه الوضعية.
نفس السّؤال عندما يرتفع مرتب كلّ عاملة بالمبلغ $1000\ DA$.

67. الوسط الحسابي للعددين a و b هو العدد $\bar{x}$ حيث $\bar{x}=\dfrac{a+b}{2}$.
الوسط الهندسي للعددين الموجبين a و b هو العدد g حيث $g=\sqrt{ab}$.
الوسط التّوافقي للعددين a و b غير المعدومين هو العدد h حيث $\dfrac{2}{h}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.
الوسط التربيعي للعددين a و b هو العدد q حيث $q=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.
1) قارن بين الأعداد $\bar{x}$ و g و h و q .
2) نعتبر الشكل :





احسب الوسط الحسابي و الوسط الهندسي و الوسط التوافقي و الوسط التربيعي للعددين AB و BC بدلالة أطوال قطع مستقيمة أحد طرفيها هو M.

68. تعتبر مجتمع العائلات التي لها 4 أطفال.
نرمز بالعدد 1 إلى "بنت" وبالعدد 0 إلى "ولد".
مثال : الرباعية 0-0-0-1 تعبّر عن عائلة لها 3 أولاد و بنت.
لاحظ أنّ عدد البنات في عائلة x-y-z-t هو $x+y+z+t$.
نسمي عائلة من النوع $F(n)$ عائلة لها n بنتا.
نريد إنجاز محاكاة حول عيّنة مقاسها 1500 (أي 1500 عائلة لها 4 أطفال) وذلك لتقدير تواتر العائلات التي لها n بنت. سنستعمل لذلك مجدولا.

1) استعمل $ALEA$ و ENT، لتعرض على الشاشة 1500 عدد طبيعي عشوائي من المجال $[0,1]$.

	A	B	C	D
1	عينة مقاسها 1500			
2	0	0	0	1
3	1	1	1	0
4	1	0	1	1
5	1	0	0	0

لاحظ: 1-0-0-0 تمثل العائلة الأولى.

2) نحجز في الخلية $E2$: `=SOMME(A2:D2)` كي نجد عدد البنات في العائلة الأولى (1-0-0-0) ثم نسحب الفأرة من $E2$ إلى $E1501$.

3) نسجل في الخانات $G2$، $G3$، $G4$، $G5$، $G6$ أنواع العائلات $F(n)$ (0،1،2،3،4).

4) نحجز في الخلية $H2$ التعليمة:

`=NB.SI($E$2:$E$1501;G2)`

ثمّ نسحب الفأرة من $H2$ إلى $H6$ كي نتحصل على التكرارات.

5) اشرح كيف نتحصّل على التواترات في العمود I.

6) انشئ مضلع التواترات.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	عينة مقاسها 1500				عدد البنات في كل عائلة	F(n)	أنواع العائلات	التكرار	التواتر
2	0	0	0	1	1		0	97	0,06
3	1	1	1	0	3		1	363	0,24
4	1	0	1	1	3		2	564	0,38
5	1	0	0	0	1		3	365	0,24

إرشاد: حدّد الخلايا من $I2$ إلى $I6$

7) انقر اللمسة $F9$ عدة مرّات، ماذا تلاحظ؟ اشرح.

8) f_n هو تواتر العائلات التي لها n بنتا.
قارن بين f_0 و f_1 بعد مشاهدة عدة عينات مستعملا في ذلك النقر على اللمسة $F9$.
نفس السؤال فيما يخص f_2 و f_4.

69. ننجز محاكاة رمي قطعة نقدية عادية بواسطة الطلبية $random$ في الحاسبة البيانية. ولأجل ذلك نصطلح على أنّ كل رقم زوجي يمثل "وجه" وكل رقم فردي يمثل "ظهر".
نسحب 10 أعداد عشوائية:

```
.966098337    .6766138529
.5317665961   .0872529785
.7950768798   .7944726606
.2754338103   .5039563297
.1176852286   .1676196127
```

(عندما يكون الرّقم الأخير للعدد العشوائي هو 0، الحاسبة تعرض 9 أرقام بعد الفاصلة)

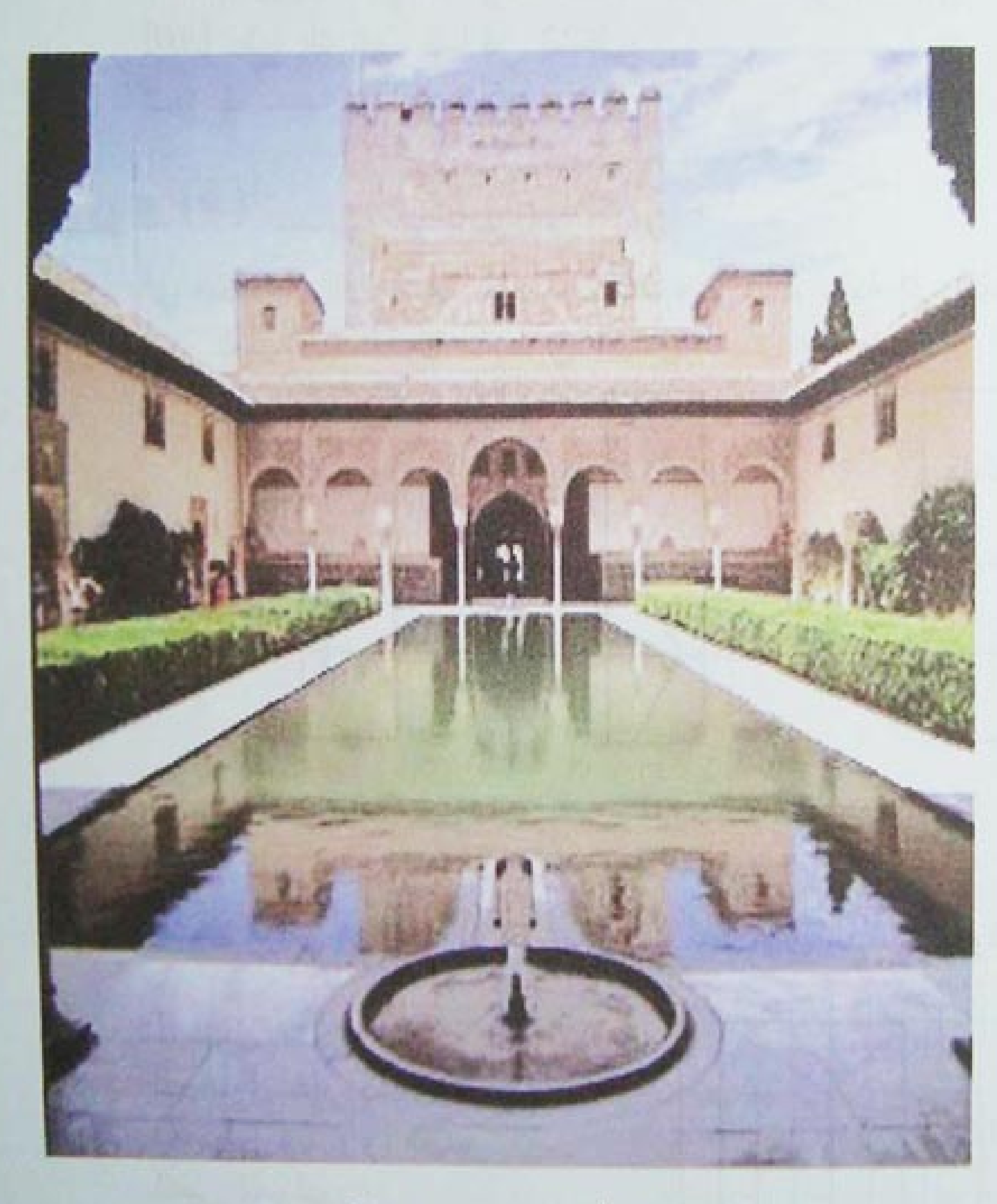
أ) عين جدول التكرارات للنتيجتين " وجه " و " ظهر" .

ب) نسحب 20 عددا عشوائيا و نهتم بتكرار 3 وجوه متتابعة (مثلا: في العدد العشوائي : $0,1224580673$
نسجل نتيجتين "وجه-وجه-وجه" و هما 4-2-2 و 8-0-6). عين جدول التكرارات.

الهندسة الفضائية

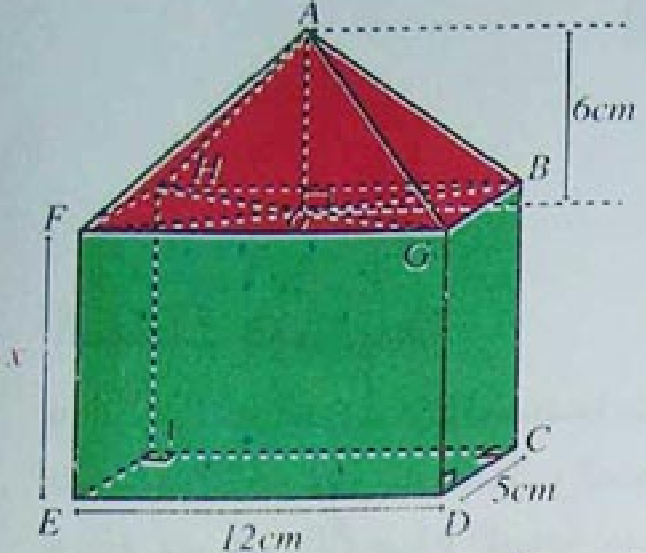
الكفاءات المستهدفة

- التعامل مع المجسمات(تجسيدها يدويا وتمثيلها).
- حساب الأطوال والمساحات والحجوم.
- التعرف على الأوضاع النسبية لمستقيمين.
- التعرف على الأوضاع النسبية لمستقيم ومستو.
- التعرف على الأوضاع النسبية لمستويين.



قصر الحمراء بغرناطة

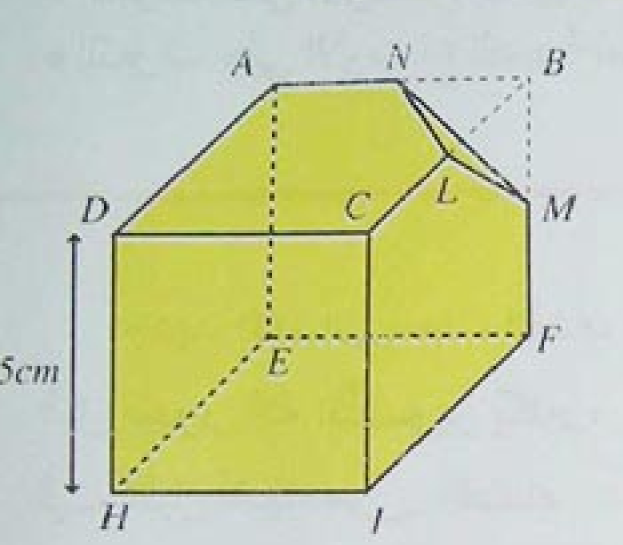
اجتهد الإنسان منذ القدم، قبل ظهور آلة التّصوير بكثير، في تمثيل أشياء من الفضاء على سطوح مستوية، وبمرور الزّمن استعمل تقنيات رسم تعتمد على بعض المفاهيم الهندسيّة البسيطة. استمدت في البداية من علم البصريّات وعلمائه العرب واليونانيين، ثمّ تطوّرت لتدخل في شتّى ميادين الرّسم والتّمثيلات الهندسيّة.تقنية «التّمثيل الفنى» أشهر تقنية وأكثرها،استعمالا خاصّة من قبل الرّسامين منذ بداية القرن 16، وهي تقنية تعتمد على ظلّ المجسّم الواقع على مستو عندما يسلّط على هذا المجسّم ضوء مصدره منبع ضوئي نقطي ثمّ تبنى الرّياضيّون هذا المجال في بداية القرن السّابع عشر فطوّروه ووضعوا له قواعد وقوانين.



نشاط 1. حساب الأبعاد في الفضاء

أ) الشكل المقابل يمثّل مخطّطا لمجسّم مكوّن من متوازي مستطيلات أبعاده $5cm$ و $12cm$ و x وهرم ارتفاعه $AO=6cm$ حيث O تقاطع $[FB]$ و $[HG]$.
من أجل أيّة قيمة للمجهول x يكون حجم هذا المجسّم يساوي $660cm^3$ ؟

ب) بيّن أنّ أحرف الهرم $[AF]$ و $[AG]$ و $[AB]$ و $[AH]$ متساوية، واحسب قيسها بتقريب 0.1.

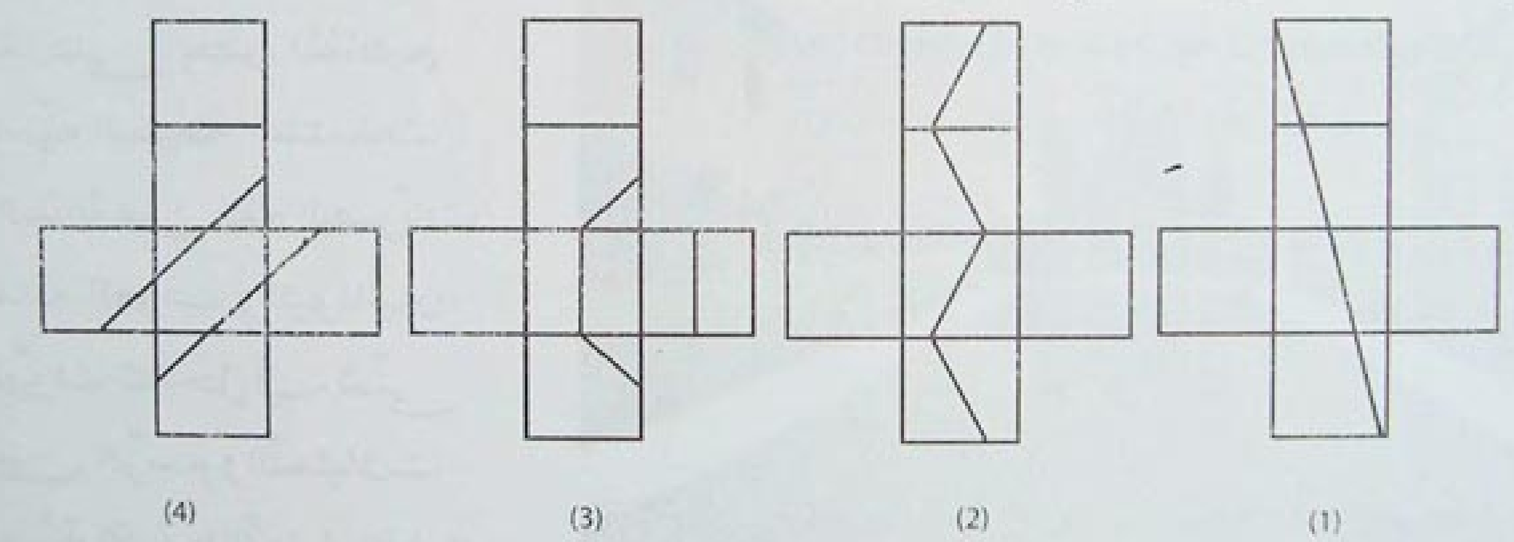


نشاط 2. تصميم مجسّم (1)

مجسّم على شكل مكعّب طول حرفه $5cm$ ينقصه هرم $BMLN$ حيث L و M و N منتصفات $[BC]$ و $[BF]$ و $[AB]$ على التّرتيب كما في الشّكل.
أنجز تصميما لهذا المجسّم.

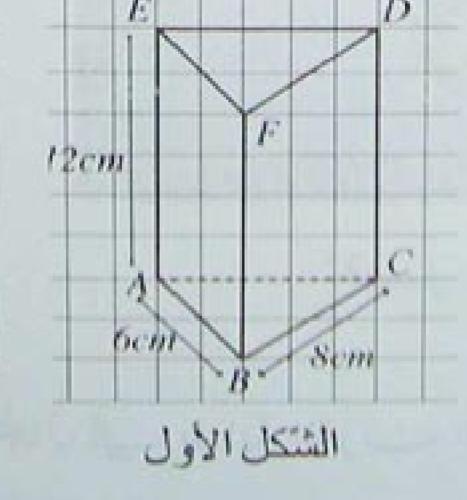
نشاط 3. (*) تصميم مجسّم (2)

أي التصاميم الآتية هو تصميم لمكعّب مرسوم عليه أثر تقاطع مستو مع هذا المكعّب.
أنجز تمثيلا بالمنظور متساوي القياس للشكل المناسب.



نشاط 4. المنظور المتساوي القياس

الشكل الثاني هو بداية لتمثيل بالمنظور متساوي القياس للموشور القائم الممثل بالشّكل الأول.



الشكل الأول

B E F D

الشكل الثاني

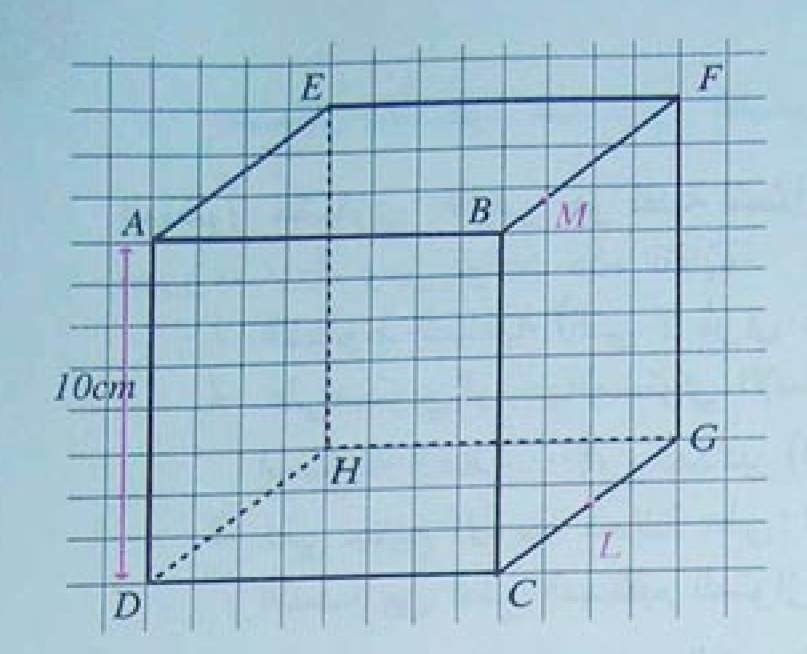
أ) أكمل الشكل الثاني للحصول على تمثيل بالمنظور متساوي القياس لنفس الموشور.

ب) احسب مساحته الكلية وحجمه.

(*) أولمبياد بلجيكا 2000 بتصرّف



نشاط 5. الأوضاع النسبية لمستقيمين



الشكل المقابل هو لمكعب طول حرفه $10cm$ مرسوم بالمنظور المتساوي القياس، النقطتان M و L هما تقاطع $[BF]$ و $[CG]$ مع مستقيمات رصف الورقة.
باستعمال بيانات الشكل أجب عن الأسئلة الآتية:

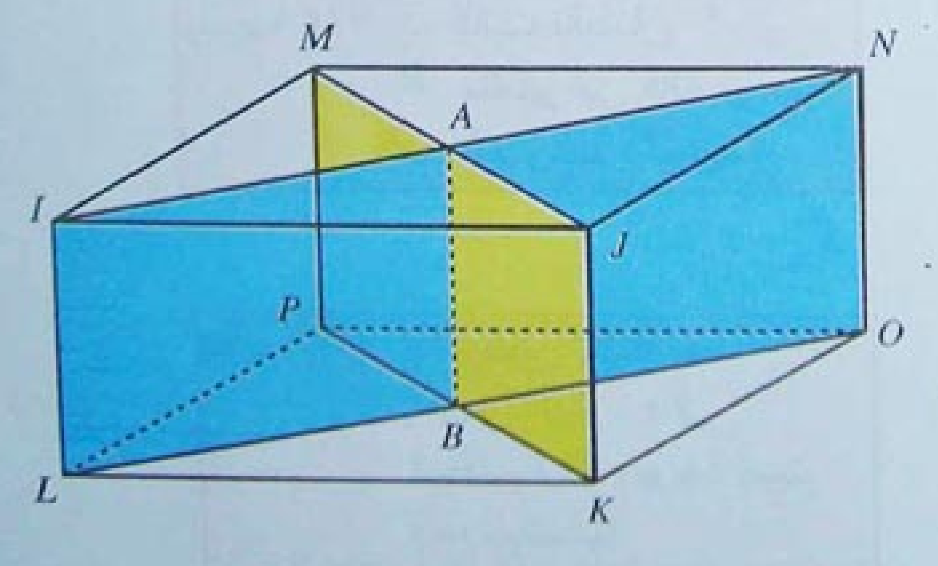
1. اذكر المستقيمات التي كلّ منها عمودي على (FG).
2. اذكر المستقيمات التي كلّ منها يوازي (FG).
3. اذكر مستقيمين غير متقاطعين وغير متوازيين.
4. هل المستقيمان (EB) و (HB) متعامدان ؟
5. ما نوع الرّباعي $(EBCH)$ ؟
6. عيّن القيسين BM و CL واحسب ML.

نشاط 6. الأوضاع النسبية لمستقيم ومستو

باستعمال الشكل الوارد في النشاط السّابق أجب عن الأسئلة الآتية:

1. ما هو وضع المستقيم (AB) والمستوي $(BCGF)$ ؟
2. ما هو وضع المستقيم (EB) والمستوي $(AFGD)$ ؟
3. ما هو وضع المستقيم (EH) والمستوي $(AFGD)$ ؟
4. ما هو تقاطع المستقيم (HB) والمستوي $(AFGD)$ ؟

نشاط 7. الأوضاع النسبية لمستويين



الشكل $LKOPIJNM$ هو تمثيل لمتوازي مستطيلات بالمنظور متساوي القياس.
لاحظ وأجب عن الأسئلة الآتية:

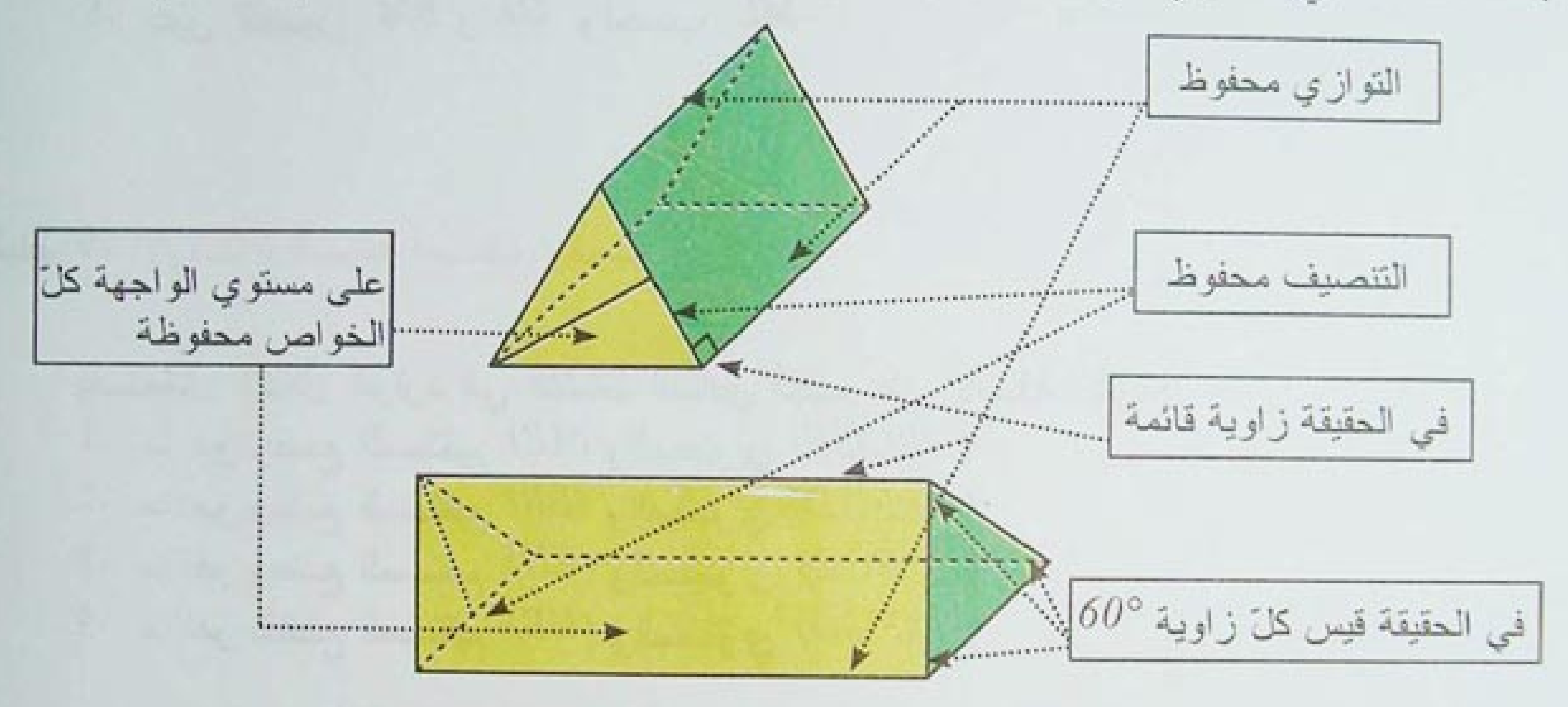
1. اذكر مستويين متوازيين ؟
2. اذكر مستويين متعامدين ؟
3. ما هو الوضع النسبي للمستويين $(NOLI)$ و $(MJKP)$ ؟

1. التمثيل بالمنظور متساوي القياس

المنظور متساوي القياس هو تقنية لتمثيل أشياء من الفضاء على سطوح مستوية (ورقة الكرّاس، سبورة، ...)، ومن قواعد هذه التقنيّة:

1. الخطوط المخفية (التي لا تُرى عند تصوّر رؤية المجسّم) نرسمها بخطوط متقطّعة.
2. على مستوي الواجهة(مستوي الإسقاط) نحافظ على كلّ الخواص (التّوازي، التّعامد، التّنصيف، استقامية النقط، ...)، والمقادير (الزّوايا، المسافات، ...).
3. على جميع الأوجه نحافظ على: استقامية النقط،والتّوازي، ومنتصف قطعة مستقيم، وكذا النّسب بين قطع المستقيم المتوازية.

مثال: تمثيل موشور قائم قاعدته مثلث متقايس الأضلاع مرسوم عليه منصّف إحدى زوايا القاعدة، مرّة بأخذ القاعدة في مستوي الواجهة، ومرّة أخرى بأخذ أحد الأسطح الجانبية في مستوي الواجهة.



ملاحظة: المستوي فى المنظور متساوي القياس يمثّل بمتوازي أضلاع.

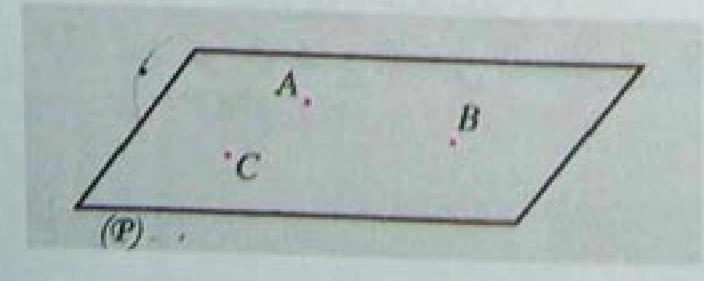
2. المستقيم و المستوي في الفضاء

بديهية (1): إذا كانت نقطتان A و B متمايزتين فإنه يوجد مستقيم وحيد يشملهما.

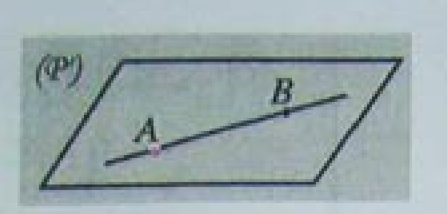


- النقطتان A و B تعيّنان مستقيما وحيدا، نرمز له بـ (AB) أو (BA).

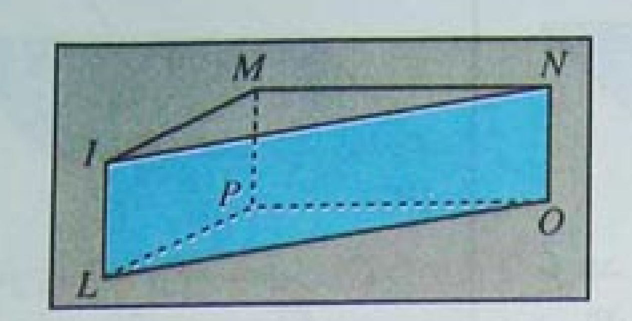
بديهية (2): إذا لم تكن ثلاث نقط A و B و C في استقامية فإنه يوجد مستو وحيد يشملها.



- النقط A و B و C تعيّن مستوٍ وحيد، نرمز له بـ (ABC) أو بـ (P).
- نمثّل المستوي في المنظور متساوي القياس بمتوازي أضلاع.



بديهية (3): إذا شمل مستو نقطتين متمايزتين A و B فإنّه يشمل كلّ نقط المستقيم (AB).



نتيجة: يتعيّن المستوى
1. إمّا بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.
2. وإمّا بمستقيم ونقطة لا تنتمي إلى هذا المستقيم.
3. وإمّا بمستقيمين متمايزين متقاطعين أو متوازيين.

- كلّ من:
  - النّقط N و I و L
  - المستقيم (NI) والنقطة O
  - المستقيمان المتوازيان (OL) و (NI)
  - المستقيمان المتقاطعان (OL) و (IL)

  تعيّن نفس المستوي $(ONIL)$.

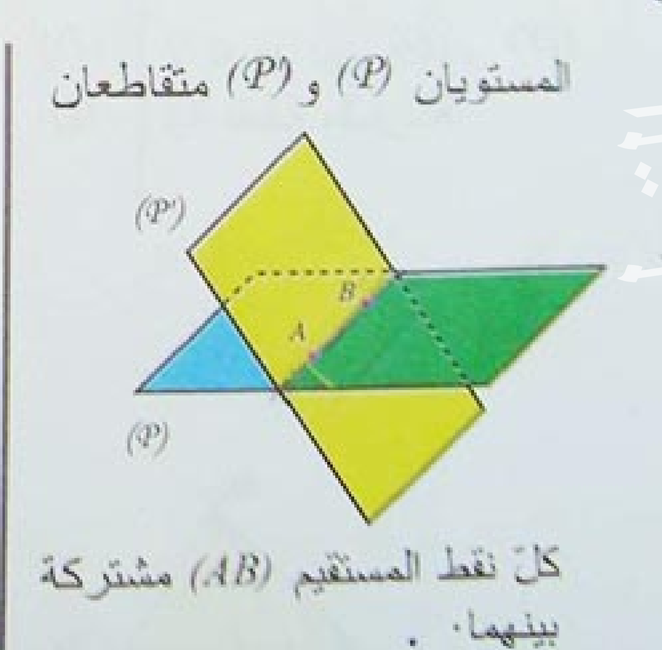
ملاحظة: كلّ خواص ونتائج الهندسة المستوية تبقى صحيحة في أي مستو من الفضاء.

3. الأوضاع النسبية لمستويين ، لمستقيم ومستو ، لمستقيمين

- الأوضاع النسبية لمستويين

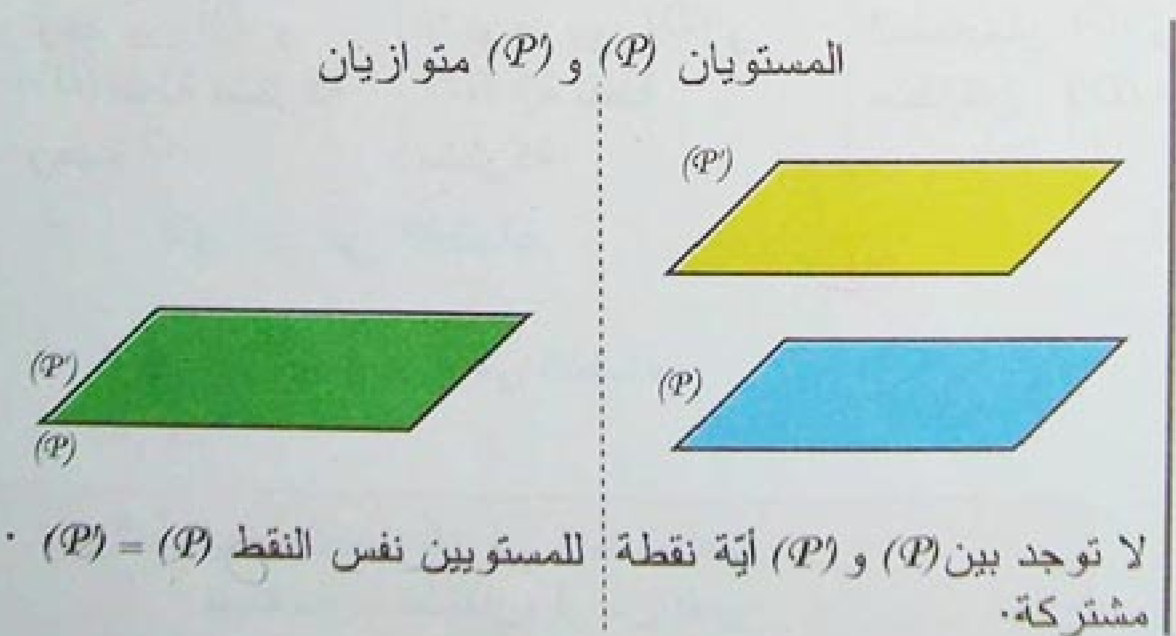
كلّ مستويين من الفضاء هما: إما متقاطعان وإما متوازيان.

المستويان (P) و (P') متقاطعان



كلّ نقط المستقيم (AB) مشتركة بينهما.

المستويان (P) و (P') متوازيان



لا توجد بين (P) و (P') أيّة نقطة مشتركة.

للمستويين نفس النقط $(P) = (P')$.

- الأوضاع النسبية لمستقيم ومستو

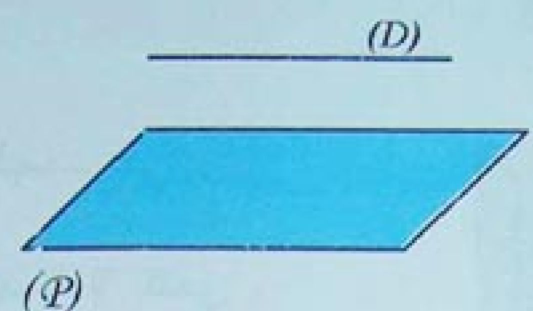
كلّ مستقيم ومستو من الفضاء هما: إما متقاطعان وإما متوازيان.



المستوي $(\mathcal{P})$ والمستقيم (D) متقاطعان

للمستوي $(\mathcal{P})$ والمستقيم (D) نقطة مشتركة وحيدة O.

المستوي $(\mathcal{P})$ والمستقيم (D) متوازيان



لا توجد أيّة نقطة مشتركة بين $(\mathcal{P})$ و (D)

كلّ نقط المستقيم تنتمي إلى المستوي. $(\mathcal{P})$ يحتوي على (D)

• الأوضاع النسبية لمستقيمين

كلّ مستقيمين من الفضاء هما:
— إما متقاطعان } فهما من مستو واحد.
— وإما متوازيان }
— وإما ليسا من مستو واحد.

(D) و (D') متقاطعان

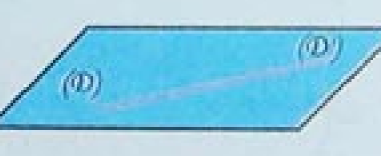


توجد بين (D) و (D') نقطة مشتركة وحيدة O.

(D) و (D') متوازيان



لا توجد بين (D) و (D') أيّة نقطة مشتركة.



المستقيمان (D) و (D') متطابقان $(D) = (D')$.

(D) و (D') ليسا من مستو واحد

لا توجد بين (D) و (D') أيّة نقطة مشتركة.

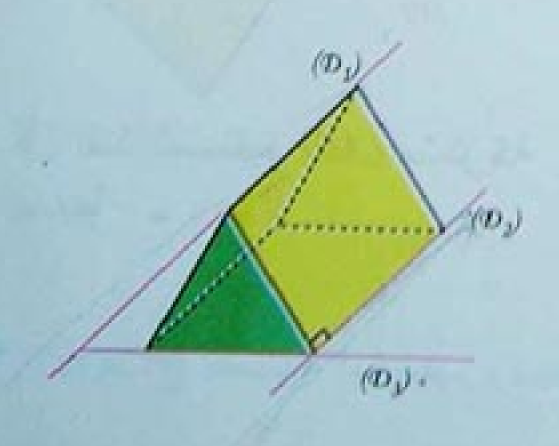
4. التوازي في الفضاء



• المستقيمات المتوازية في الفضاء

تعريف1

المستقيمان المتوازيان في الفضاء هما مستقيمان متطابقان، أو من نفس المستوي وغير متقاطعين.



مثال: الشكل المقابل لموشور قائم قاعدته مثلث، نلاحظ فيه أنّ: المستقيمين (D_1) و (D_2) متوازيان، والمستقيمين (D_2) و (D_3) متقاطعان، بينما المستقيمان (D_1) و (D_3) ليسا من مستو واحد.

1. يوجد مستقيم وحيد يشمل نقطة معلومة ويوازى مستقيما معلوما.

2. إذا قطع مستو أحد مستقيمين متوازيين فإنّه يقطع الآخر.

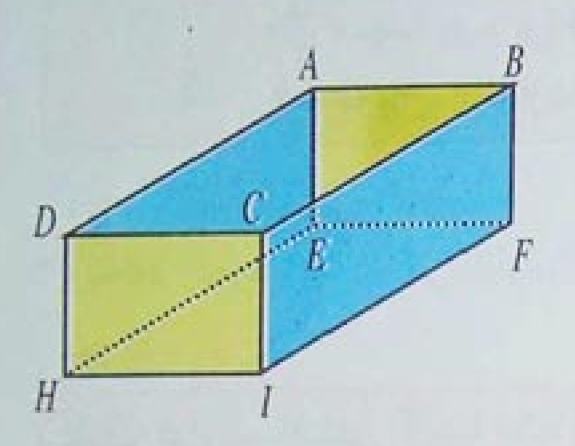
3. المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان.



- المستويات المتوازية

تعريف 2

المستويان المتوازيين هما مستويان متطابقان، أومنفصلان (لا توجد بينهما أيّة نقطة مشتركة).



مثال: الشكل المقابل لمتوازي مستطيلات، نلاحظ فيه أنّ: المستويين $(BCIF)$ و $(ADHE)$ متوازيان، والمستويين $(ABFE)$ و $(DCIH)$ متوازيان، وكذلك $(ABCD)$ و $(EFIH)$.

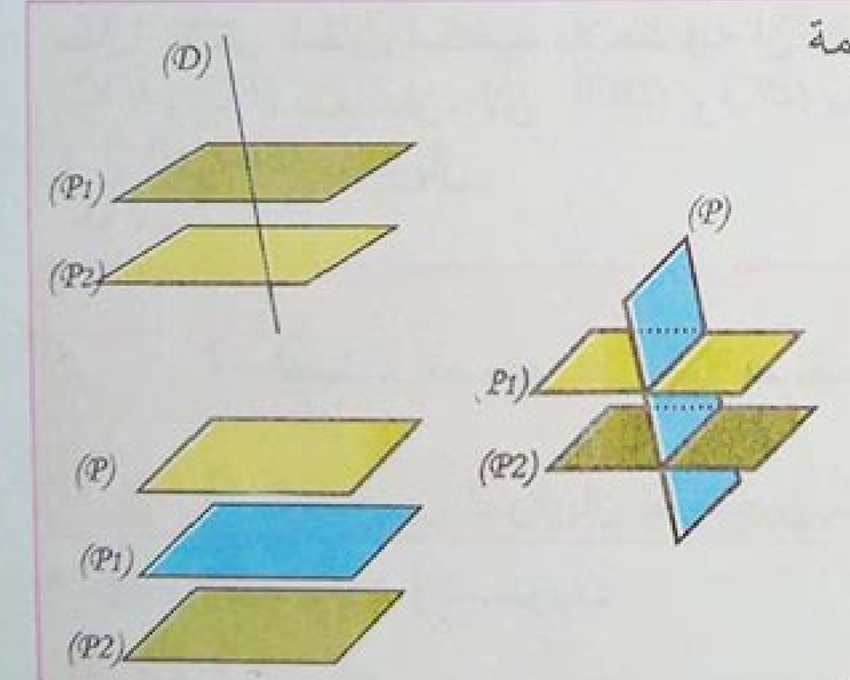
خواص

1. يوجد مستو وحيد يشمل نقطة معلومة ويوازى مستويا معلوما.

2. إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنّه يقطع الآخر.

3. إذا قطع مستو أحد مستويين متوازيين فإنّه يقطع الآخر، ويكون مستقيما التقاطع متوازيان.

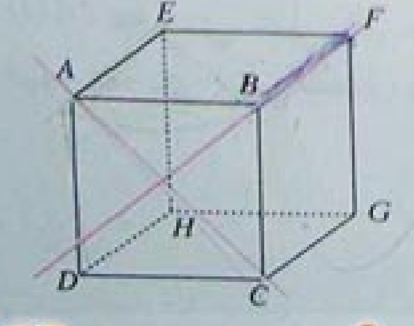
4. المستويان الموازيان لثالث متوازيان.



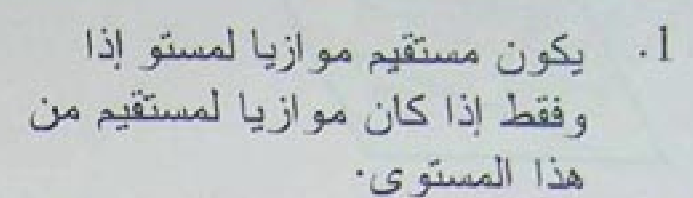
- المستقيمات والمستويات المتوازية

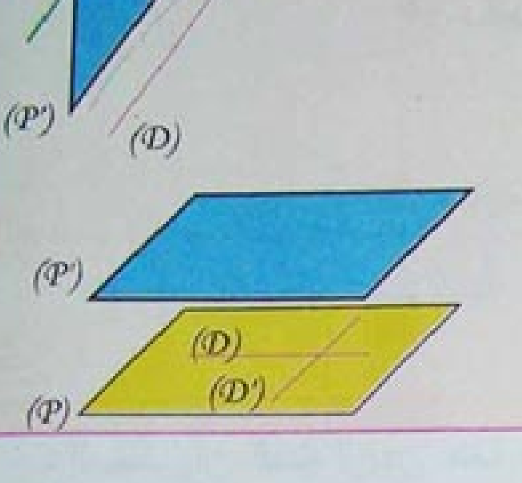
تعريف 3

يكون مستقيم ومستو متوازيين إذا كانا منفصلين (لا توجد بينهما أيّة نقطة مشتركة)، أو كان المستوي يحتوي المستقيم.



مثال: الشكل المقابل لمكعّب، نلاحظ فيه أنّ: المستقيم (AC) يوازي كلا من المستويين $(EFGH)$ و $(ABCD)$، وكذلك المستقيم (BF) يوازي كلا من المستويات $(BFGC)$ و $(BFEA)$ و $(AEHD)$ و $(HDCG)$.





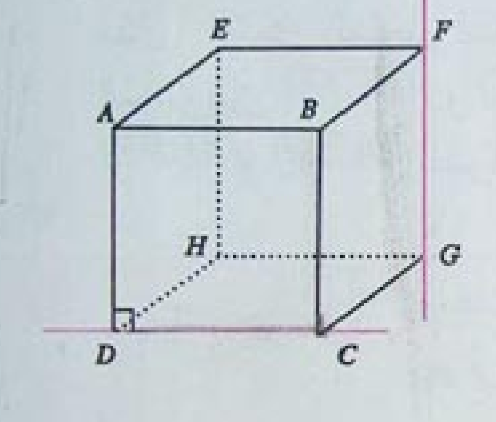
1. يكون مستقيم موازيا لمستو إذا وفقط إذا كان موازيا لمستقيم من هذا المستوى.
2. إذا كان مستقيم يوازى أحد مستويين متوازيين فإنه يوازى المستوى الآخر.
3. إذا كان مستقيم يوازى مستويين متقاطعين فإنه يوازى مستقيم تقاطعهما.
4. يتوازى مستويان إذا وفقط إذا احتوى أحدهما على مستقيمين متقاطعين كلّ منهما يوازى المستوى الآخر.
5. المستويان الموازيان لثالث متوازيان.

5. التعامد في الفضاء

- تعامد المستقيمات في الفضاء

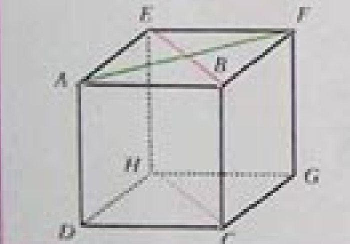
تعريف 4

نقول عن مستقيمين أنّهما متعامدان إذا كان المستقيمان الموازيان لهما من نفس النّقطة متعامدين.



مثال: الشكل المقابل لمكعّب، نلاحظ فيه أنّ: المستقيمين (DC) و(FG) متعامدان، لأن (DC) و (BC) متعامدان في النّقطة C و (BC) و(FG) متوازيان.

خواص

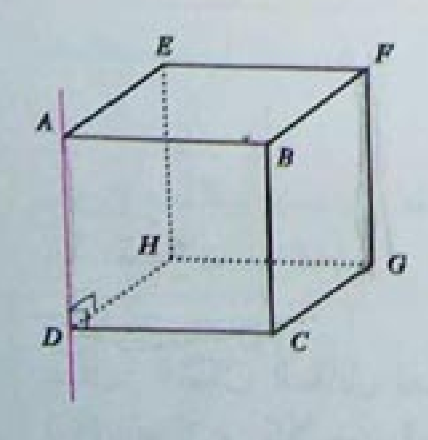


1. المستقيم العمودى على أحد مستقيمين متوازيين عمودى على الآخر.
2. المستقيمان الموازيان لمستقيمين متعامدين متعامدان.

- تعامد المستقيمات والمستويات

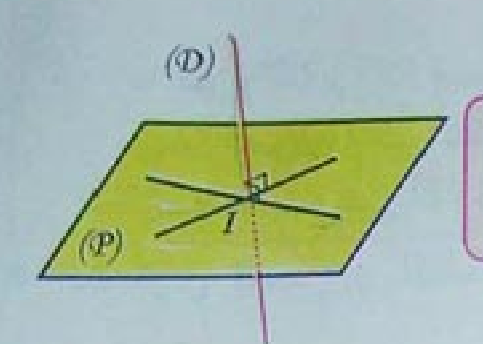
تعريف 5

نقول عن مستقيم أنه عمودي على مستو إذا كان هذا المستقيم عموديا على كلّ مستقيمات هذا المستوى.



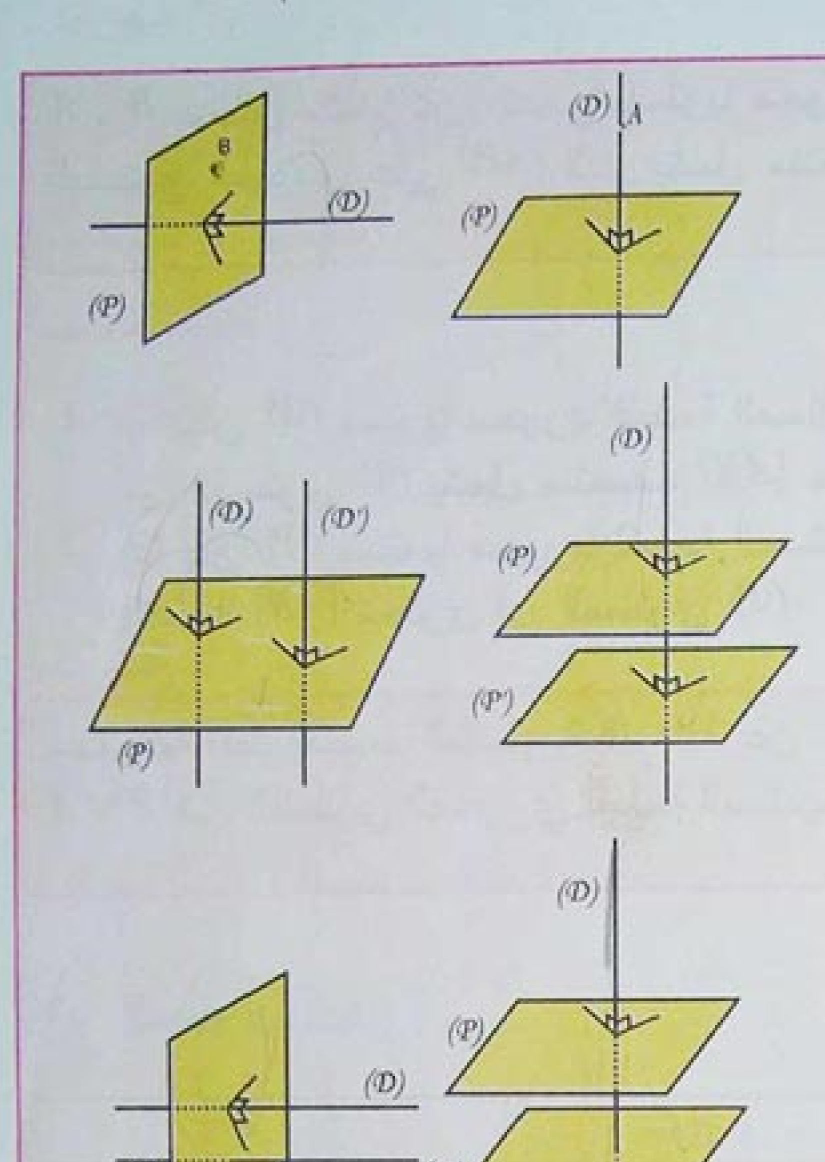
مثال: الشكل المقابل لمكعّب، نلاحظ فيه أنّ: المستقيم (AD) عمودي على كلّ من المستقيمين (DC) و (DH) ، فهو عمودي على مستويهما $(DCGH)$.

مبرهنة 1

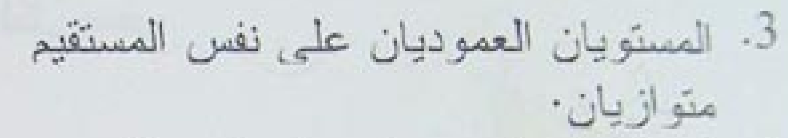


إذا كان مستقيم عموديا على مستقيمين متقاطعين من مستو فإنّه عمودي على كلّ مستقيمات هذا المستوي.

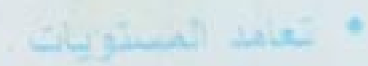
خواص



1. يوجد مستقيم وحيد يشمل نقطة معلومة ويعامد مستويا معلوما.
2. يوجد مستو وحيد يشمل نقطة معلومة ويعامد مستقيما معلوما.



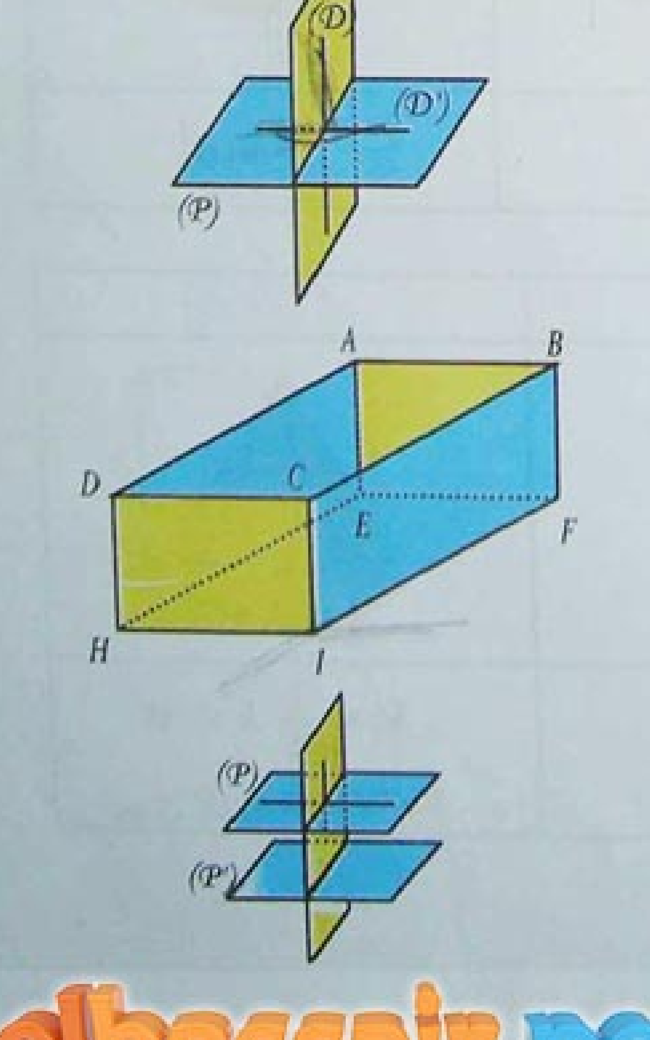
3. المستويان العموديان على نفس المستقيم متوازيان.
4. المستقيمان العموديان على نفس المستوى متوازيان.
5. المستقيم العمودى على أحد مستويين متوازيين عمودى على الآخر.
6. المستوى العمودى على أحد مستقيمين متوازيين عمودى على الآخر.



• تعامد المستويات

تعريف 6

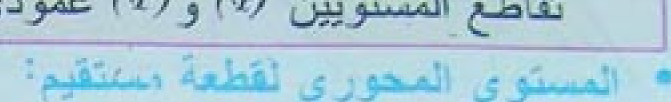
نقول عن مستويين أنهما متعامدان إذا شمل أحدهما مستقيما عموديا على الآخر



مثال: الشكل المقابل لمتوازي مستطيلات، على سبيل المثال نلاحظ فيه أن: كلا من المستويات $(ABCD)$ و$(CIFB)$ و $(EHIF)$ و$(ADHE)$ عمودي على المستوي $(DCIH)$.

خواص

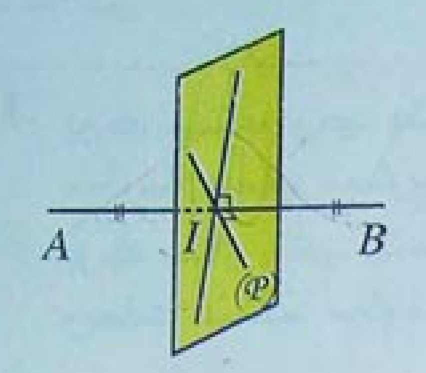
1. المستوى العمودى على أحد مستويين متوازيين عمودي على الآخر.



2. إذا كان $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$ مستويين متقاطعين وكان كلّ منهما عموديا على مستو ثالث $(\mathcal{Q})$ فإنّ مستقيم تقاطع المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$ عمودي على المستوي $(\mathcal{Q})$.

• **المستوي المحوري لقطعة مستقيم:**

تعريف 7

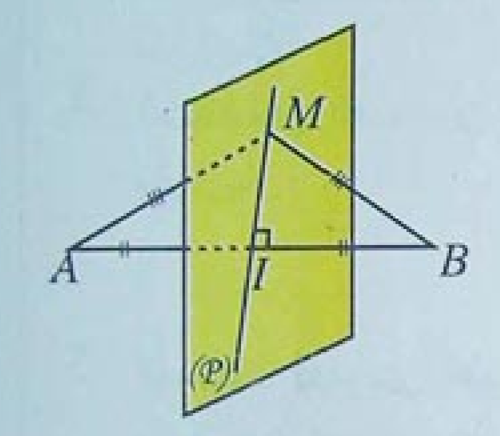


A ، B نقطتان متمايزتان، نسمى **مستويا محوريا** للقطعة $[AB]$ المستوي العمودي على (AB) الذي يشمل منتصف $[AB]$.

ملاحظتان:

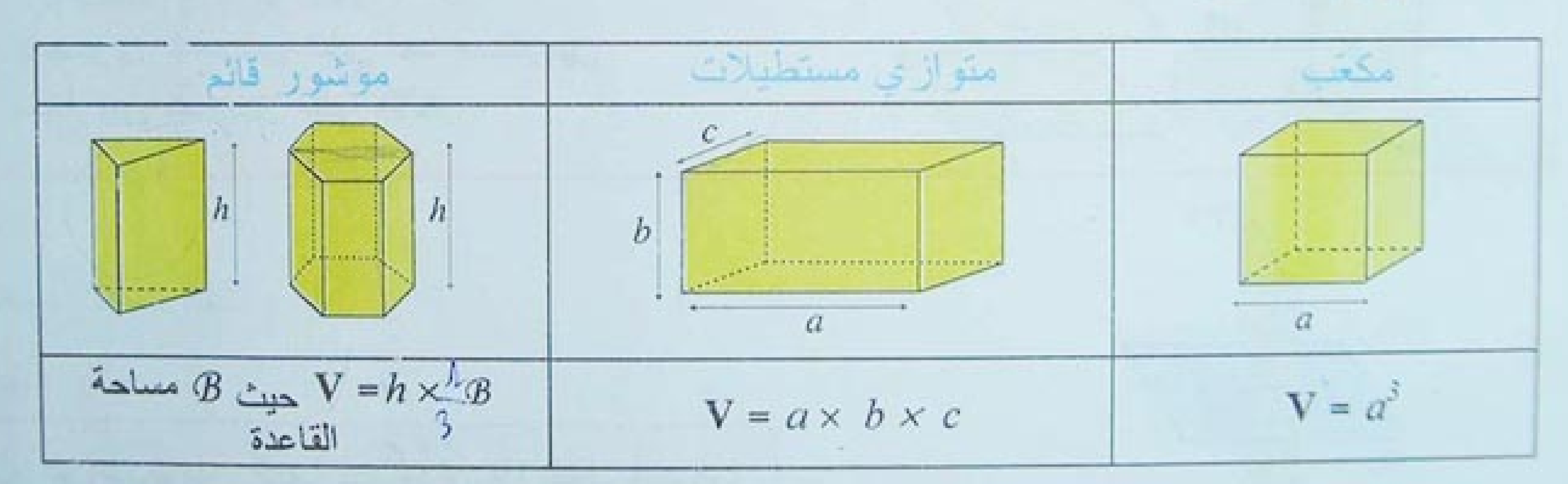
1. إذا كان $(\mathcal{P})$ مستويا محوريا لقطعة المستقيم $[AB]$، فكلّ مستقيم من المستوي $(\mathcal{P})$ يشمل منتصف $[AB]$ هو محور للقطعة $[AB]$.
2. إذا كان $(\mathcal{P})$ مستويا محوريا لقطعة المستقيم $[AB]$، فكلّ محور للقطعة $[AB]$ محتوى في المستوي $(\mathcal{P})$.

مبرهنة 2



مجموعة نقط الفضاء المتساوية المسافة عن نقطتين متمايزتين A ، B هي المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.

6. الحجوم (تذكير)



موشور قائم	متوازي مستطيلات	مكعب
$V = h \times \mathcal{B}$ حيث $\mathcal{B}$ مساحة القاعدة	$V = a \times b \times c$	$V = a^3$

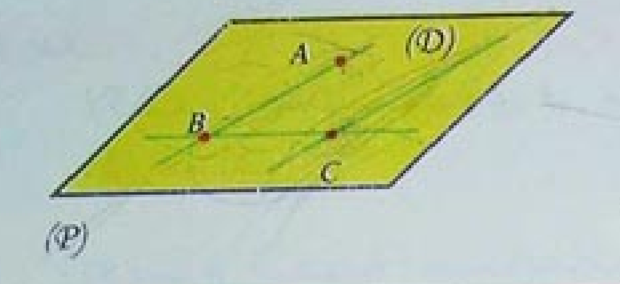
اسطوانة دوران	مخروط	هرم
$V = \pi \times r^2 \times h$	$V = \frac{1}{3} h \times \mathcal{B}$ حيث $\mathcal{B}$ مساحة القاعدة	$V = \frac{1}{3} h \times \mathcal{B}$ حيث $\mathcal{B}$ مساحة القاعدة



طرائق وتمارين محلولة

1. المستقيمات والمستوي في الفضاء

• تعيين مستو



بيّن أنّ المستوي يتعيّن

1. إمّا بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.
2. وإمّا بمستقيم ونقطة لا تنتمي إلى هذا المستقيم.
3. وإمّا بمستقيمين متمايزين متقاطعين أو متوازيين.

حلّ

نعتبر ثلاث نقط ليست في استقامية A و B و C.

1. إنها تعيّن مستويا وحيدا حسب البديهية رقم (2) نسميّه (P).
2. النقطتان A و B تعيّنان مستقيما وحيدا حسب البديهية (1) نسميّه (AB) وهو محتوى في المستوي (P) حسب البديهية (3)، والنقطة C لا تنتمي إلى (AB). المستوي (P) يعيّن بالمستقيم (AB) والنقطة C.
3. المستقيمان (AB) و (BC) متقاطعان ومحتويان في المستوي (P)، المستوي (P) يعيّن بالمستقيمين (AB) و (BC).

يوجد في المستوي (P) مستقيم وحيد (D) يشمل النقطة C ويوازي المستقيم (AB). المستوي (P) يعيّن بالمستقيمين (AB) و (D).

تعاليق

• يوجد مستو وحيد يشمل ثلاث نقط A و B و C ليست في استقامية.

• يوجد مستقيم وحيد يشمل نقطتين متمايزتين A و B.

• إذا اشترك مستقيم ومستو في نقطتين فإنّ المستوي يحتوي المستقيم.

طريقة

لتعيين مستو يكفي أن نذكر منه

1. ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

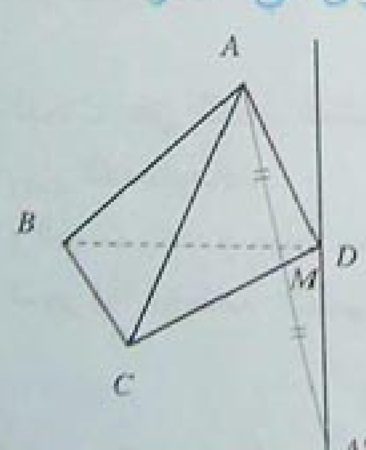
أو

2. مستقيما ونقطة لا تنتمي إلى هذا المستقيم.

أو

3. مستقيمين متمايزين متقاطعين أو متوازيين.

• تمثيل بالمنظور المتساوي القياس، مستقيمان غير متقاطعين، مستقيم محتوى في مستو



A و B و C و D أربع نقط بحيث النقطة A لا تنتمي إلى المستوي (BDC). النقطة A' هي نظيرة النقطة A بالنسبة إلى (CD)، ممثلة في الشكل المقابل.

1. هل الوجه (ADC) يقع في مستوي الواجهة ؟ برّر جوابك.
2. بيّن أنّ المستقيمين (AC) و (BD) غير متقاطعين.
3. بيّن أنّ المستقيم $(A'D)$ محتوى في المستوي (ACD).

حلّ

1. الوجه (ADC) لا يقع في مستوي الواجهة ، لأنّ الزّاوية AMD في الحقيقة قائمة وهي ممثلة بزاوية غير قائمة.
2. لو كان المستقيمان (AC) و (BD) متقاطعين، لعيّنا مستويا (حسب النتيجة أعلاه) يشمل النقط الأربع A و B و C و D، وهذا يناقض الفرض، ومنه المستقيمان (AC) و (BD) غير متقاطعين.

تعاليق

• في التّمثيل بالمنظور المتساوي القياس على مستوي الواجهة كلّ الخواص والمقادير محفوظة.



3. المستوي (ACD) يحتوي على النقطة D، يكفي إذن إثبات أنّ النقطة A' تنتمي إلى المستوي (ACD): المستقيمان (AA') و (CD) متقاطعان فهما يعيّنان مستويا وحيدا هو المستوي (ACD)، لأنّ المستوي (ACD) يشمل (CD)، ومنه النقطة A' تنتمي إلى المستوي (ACD). وبالتّالي فالمستوي (ACD) يشمل المستقيم $(A'D)$.

طريقة

لإثبات أنّ مستقيما محتوى في مستو يكفي إثبات أنّ المستوى يحتوى نقطتين متمايزتين من هذا المستقيم.

2. الأوضاع النسبية: مستقيمات ومستويات

الشكل المقابل هو لمتوازي مستطيلات $ABCDEFGH$ ، النقطتان M و N منتصفا القطعتين $[AB]$ و $[BF]$ على الترتيب .

1. حدّد الوضع النّسبي للمستقيم والمستوي في كلّ حالة وبرّر جوابك:
أ) (EN) و (ABC) ب) (MN) و (HDC) جـ) (MN) و (AEF)
2. حدّد الوضع النّسبي للمستقيمين في كلّ حالة وبرّر جوابك:
أ) (EF) و (MN) ب) (AE) و (FB) جـ) (EB) و (DC)
3. حدّد الوضع النّسبي للمستويين في كلّ حالة وبرّر جوابك:
أ) (ABC) و (EFH) ب) (ADC) و (ADE) جـ) (ABF) و (HMN)

حلّ

1. أ) المستقيم (EN) والمستوي (ABC) متقاطعان، لأنّ المستقيمين (EN) و (AB) من نفس المستوي وغير متوازيين فهما متقاطعان، ونقطة تقاطعهما تنتمي إلى المستوي (ABC) لأنها تنتمي إلى المستقيم (AB)، لكنّ المستوي (ABC) لا يشمل المستقيم (EN) لأنّه لا يشمل النقطتين E و N. ومنه المستوي (ABC) يشترك مع (EN) في نقطة ولا يشمله، فهما متقاطعان.
ب) المستقيم (MN) والمستوي (HDC) متوازيان، لأنّ المستقيم (MN) محتوى في المستوي (AEB) الوجه المقابل للوجه (HDC) في متوازي المستطيلات، وبالتّالي لا توجد أيّة نقطة مشتركة بين المستقيم (MN) والمستوي (HDC).
جـ) المستقيم (MN) محتوى في المستوي (AEF)، لأنّ النقطتين M و N تنتميان إلى المستوي (AEF).
2. أ) المستقيمان (EF) و (MN) من نفس المستوي وغير متوازيين فهما متقاطعان.
ب) المستقيمان (AE) و (FB) متوازيان، لأنهما حاملا ضلعين متقابلين في متوازي مستطيلات.
جـ) المستقيمان (EB) و (DC) ليسا من نفس المستوي، لأنّ المستقيم (DC) لا يشمل النقطة B ، فهو يعيّن معها مستويا (BCD) يقطعه المستقيم (EB) في النقطة B لأنّ النقطة E لا تنتمي إلى المستوي (BCD).

تعاليق

- المستقيمان غير المتوازيين على الرّسم غير متوازيين في الحقيقة.
- المستقيمان غير المتعامدين على الرّسم ليس بالضرورة غير متعامدين في الحقيقة.
- البحث عن النقط المشتركة بين المستقيمات والمستويات وسيلة مساعدة لمعرفة الوضع النّسبي لها.
- كلّ خواص ونتائج الهندسة المستوية تبقى صحيحة في أي مستو من الفضاء.

3. أ) المستويان (ABC) و (EFH) متوازيان، لأنهما وجهان متقابلان لمتوازي مستطيلات (لا توجد بينهما أيّة نقطة مشتركة).

ب) المستويان (ADC) و (ADE) متقاطعان، لأنهما يشتركان في النقطتين A و D وهما غير منطبقين (توجد نقطة تنتمي إلى أحدهما ولا تنتمي إلى الآخر).
يتقاطع المستويان (ADC) و (ADE) في المستقيم (AD).

جـ) المستويان (ABF) و (HMN) متقاطعان، لأنهما يشتركان في النقطتين N و M وهما غير منطبقين (توجد نقطة تنتمي إلى أحدهما ولا تنتمي إلى الآخر). يتقاطع المستويان (ABF) و (HMN) في المستقيم (MN).

طرائق

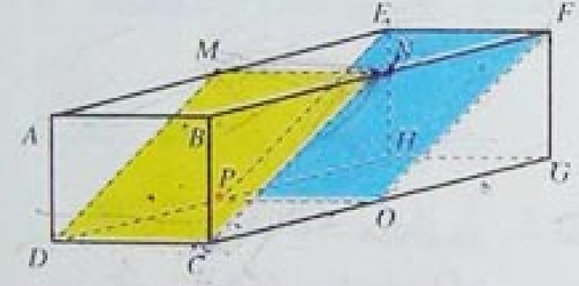
- لإثبات أنّ مستقيما غير محتوى في مستو يكفي إثبات أنّ المستوى لا يشمل نقطة على الأقل من هذا المستقيم.
- لإثبات أنّ مستقيمين متقاطعان في الفضاء يكفي إثبات أنّهما من نفس المستوى وغير متوازيين.
- لإثبات أنّ مستويين متقاطعان يكفي إثبات أنّهما غير متطابقين ويشتركان في نقطة. عندئذ نستنتج أنّهما متقاطعان في مستقيم يشمل هذه النقطة.

3. التّوازي: مستقيمات ومستويات

• كيف نبيّن أنّ مستقيمات أومستويات متوازية

الشّكل المقابل هو لمتوازي مستطيلات $ABCDEFGH$ ، النقط M و N و O و P منتصفات القطع $[AE]$ و $[BF]$ و $[CG]$ و $[DH]$ على التّرتيب.

1) بين أنّ المستقيم (MN) يوازي المستوي $(DCGH)$.
2) بين أنّ النقط M و N و C و D هي من نفس المستوي
3) بين أنّ المستويين (MNC) و (EFO) متوازيان.



حلّ

1. المستقيم (MN) محتوى في الوجه $(ABEF)$ الموازي للوجه $(DCGH)$، ومنه لا يوجد أيّة نقطة مشتركة بين (MN) والمستوي $(DCGH)$، فهما متوازيان.

2. لدينا: $(MN) // (AB)$ لأنّ $ABNM$ مستطيل، و $(AB) // (DC)$ لأنّ $ABCD$ مستطيل، ومنه $(MN) // (DC)$.
وبالتّالي النقط M و N و C و D تنتمي إلى نفس المستوي $(MNDC)$.

3. – المستقيمان (MN) و (NC) متقاطعان وهما من المستوي (MNC).
– و $(MN) // (EF)$ لأنّ $MNFE$ مستطيل، ومنه (MN) يوازي المستوي (EFO).
– و $(NC) // (OF)$ لأنّ $NCOF$ متوازي أضلاع، ومنه (NC) يوازي المستوي (EFO).
بما أنّ المستقيمين (MN) و (NC) متقاطعان وكل منهما يوازي المستوي (EFO)، فإنّ المستويين (MNC) و (EFO) متوازيان.

تعاليق

- يكون مستقيم يوازي مستو إذا لم يشترك معه في أيّة نقطة، أو كان هذا المستقيم يوازي مستقيما من المستوي.
- كلّ وجهين متقابلين في متوازي المستطيلات يمثلان مستويين متوازيين.

طرائق

- لإثبات أنّ أربع نقط مثل M و N و C و D هي من نفس المستوى يكفي إثبات أنّها تنتمي إلى مستقيمين متوازيين.
- لإثبات أنّ مستويين متوازيان نثبت أنّ أحدهما يحتوي مستقيمين متقاطعين كلّ منهما يوازي المستوي الآخر.

• كيف نبيّن وحدانيّة وجود مستقيم

بيّن أنّه يوجد في الفضاء مستقيم وحيد يشمل نقطة معلومة ويوازي مستقيما معلوما.

تعاليق

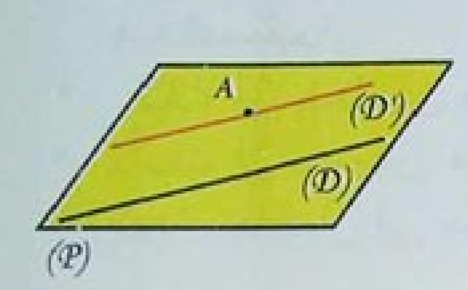
- الفرض: (D) مستقيم و A نقطة معلومان.
- المطلوب: وجود مستقيم وحيد (D') يشمل A ويوازي (D).

حلّ

نميّز حالتين:

أ) إذا كانت النقطة A تنتمي إلى المستقيم (D).
فإنّ المستقيم الوحيد الذي يشمل A ويوازي (D) هو المستقيم (D) نفسه.

ب) إذا كانت النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (D)، فإنّ (D) و A يعيّنان مستويا وحيدا (P)، في المستوي (P) يوجد مستقيم وحيد (D') يشمل A ويوازي (D).



طريقة

• نوظف خواص ونتائج الهندسة المستوية لأنّها تبقى صحيحة في أي مستو من الفضاء.

4- التعامد: مستقيمات ومستويات

• مستقيم عمودي على مستو

$ABCDEFGH$ مكعّب، L نقطة من $[AB]$، و (Δ) مستقيم عمودي على (LC) ويشمل D.

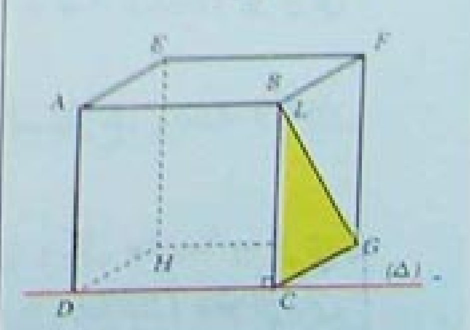
1. بيّن أنّ (Δ) عمودي على المستوي (LCG).
2. عيّن المستقيم (Δ) و المستوي (LCG) في كلّ من الحالتين:

أ) L تنطبق على A

ب) L تنطبق على B

تعاليق

- المستقيمان المتعامدان في الفضاء ليسا بالضرورة متقاطعين.



حلّ

لنبيّن أنّ المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (LCG).

1. بما أنّ (Δ) عمودي على (LC)، لتبيين أن (Δ) عمودي على المستوي (LCG) يكفي أنّ نبيّن أنّ (Δ) عمودي على مستقيم من المستوي (LCG) يقطع (LC).

لدينا المستقيم (CG) عمودي على كلّ من المستقيمين (DC) و (BC)، ومنه فهو عمودي على مستويهما $(ABCD)$، وبالتّالي فهو عمودي على كلّ مستقيم من المستوي $(ABCD)$، أي (CG) عمودي على (Δ).
بما أنّ (Δ) عمودي على كلّ من (LC) و (CG) فهو عمودي على مستويهما (LCG)



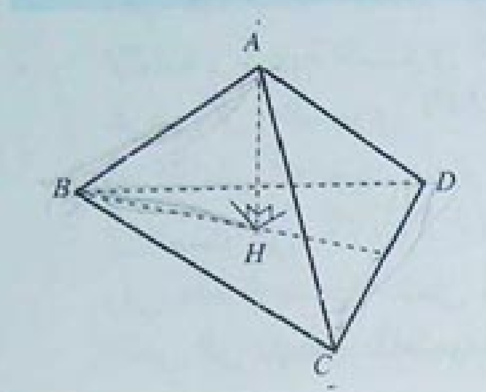
.2

أ) لما تنطبق النقطة L على النقطة A فإنّ
$(LCG)=(ACGE)$ و $(\Delta) = (DB)$

ب) لما تنطبق النقطة L على النقطة B فإنّ
$(LCG)=(BCGF)$ و $(\Delta) = (DC)$

طريقة

- لتبيين أنّ مستقيما عمودي على مستو نبيّن أنّه عمودي على مستقيمين متقاطعين في هذا المستوي.



- **مستقيم عمودي على مستقيم**

$ABDC$ رباعي وجوه حيث (AB) عمودي على (CD). (AH) الارتفاع المتعلّق بالقاعدة BCD. بيّن أنّ (CD) و (BH) متعامدان.

تعاليق	حلّ
• المستقيمان المتعامدان من نفس المستوى متقاطعان.	نبيّن أنّ المستقيم (CD) عمودي على المستوي (ABH). لدينا (AH) عمودي على المستوي (BCD)، فهو عمودي على كلّ مستقيم فيه، ومنه (AH) عمودي على (CD)، و (AB) عمودي على (CD) فرضا. ومنه (CD) عمودي على مستقيمين متقاطعين (AH) و (AB) فهو عمودي على مستويهما (ABH). وبالتالي (CD) عمودي على (BH).

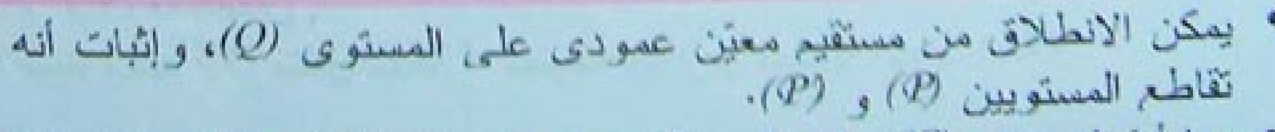
طريقة

- لتبيين أنّ مستقيمين متعامدان يمكن أنّ نبيّن أنّ أحدهما عمودي على مستو يحتوي على الثّاني.

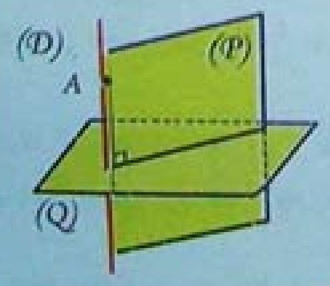
- بيّن أنه: إذا كان $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$ مستويان متقاطعين، وكان كلّ منهما عموديا على مستو ثالث $(\mathcal{Q})$، فإنّ (D) مستقيم تقاطع المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$ عمودي على المستوى $(\mathcal{Q})$.

تعاليق	حلّ
• المستويان المشتركان في نقطة هما إما متطابقان، وإما متقاطعان في مستقيم يشمل هذه النقطة.	لتكن A نقطة مشتركة بين المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$. المستقيم (D) الذي يشمل النقطة A ويعامد المستوي $(\mathcal{Q})$ محتوى في المستوي $(\mathcal{P})$ كما أنّه محتوى في المستوي $(\mathcal{P}')$ وهو مستقيم تقاطع المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$. ومنه فإنّ (D) عمودي على $(\mathcal{Q})$. 

طريقة



- يمكن الانطلاق من مستقيم معيّن عمودي على المستوى $(\mathcal{Q})$، وإثبات أنه تقاطع المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$.
- بما أنّ المستوى $(\mathcal{P})$ والمستقيم (D) عموديان على $(\mathcal{Q})$، و (D) يشمل نقطة من $(\mathcal{P})$، فإنّ (D) محتوى في $(\mathcal{P})$.



تعلـم الـبرهـنـة

الهدف: اكتساب كيفية للبرهان على الوجود والوحدانية واستعمال البرهان بالخلف.

مسألة: (P) مستو و A نقطة معلومان. بيّن أنه يوجد مستو وحيد (P') يشمل النقطة A ويوازي المستوي (P)

عناصر تفكير حول الحل:

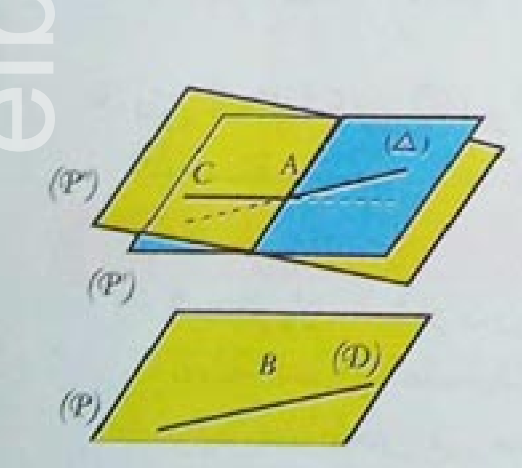
- المعطيات: (P) مستو و A نقطة معلومان .
- المطلوب: نميّز في المطلوب عنصرين: 1. نبيّن أنه يوجد مستو (P') يشمل A ويوازي (P)
  2. نبيّن وحدانية هذا المستوي.
- لإثبات وجود المستوي (P')
  نفكر في تعيين المستوي (P') بإحدى الطرائق المقدمة في الفقرة 2 من الدرس.
  وفي هذه الحالة الأنسب هو تعيينه بمستقيمين متقاطعين.
- لإثبات وحدانية المستوي (P')
  نفرض أنّ المستوي (P') ليس وحيدا، ونبين أنّ هذا يؤدي إلى تناقض.
  أي نفرض أنه يوجد مستو آخر (P'') يحقق نفس شروط المستوي (P') (يشمل A ويوازي (P))، ثمّ نبيّن أن المستويين (P') و (P'') متطابقان، أو أنّ هذا الفرض يؤدي إلى تناقض.
  وفي هذه الوضعية سنبيّن أنّ المستويين (P') و (P'') متطابقان، وذلك بتبيين أنهما مشتركان في نقطة لا تنتمي إلى مستقيم تقاطعهما.

• برهان:

نميّز حالتين:

أ) إذا كانت النقطة A تنتمي إلى المستوي (P)، فإنّ المستوي الوحيد الذي يشمل A ويوازي (P) هو المستوي (P) نفسه.

ب) إذا كانت النقطة A لا تنتمي إلى المستوي (P).



- نثبت أولا أنه يوجد مستو يشمل A ويوازي (P).
  بالفعل: ليكن (D) و (D') مستقيمين من (P) متقاطعين في النقطة B.
  المستقيمان (Δ) و (Δ') اللذان يشملان النقطة A والموازيان للمستقيمين (D) و (D') على الترتيب يعيّنان مستويا (P') يوازي (P).
- لإثبات وحدانية المستوي (P').
  نفرض أنه يوجد مستو (P'') يشمل A ويوازي (P) لتكن C <u>نقطة من (P'') لا تنتمي إلى مستقيم تقاطع المستويين (P') و (P'')</u>، ولتكن B نقطة من (P).
  - لدينا من ناحية المستوي (ABC) يقطع المستويين (P) و (P'') في مستقيمين متوازيين (AC) وآخر يشمل النقطة B نسميّه (D).
  - ومن ناحية أخرى المستوي المعيّن بالمستقيم (D) والنقطة A وهوالمستوي (ABC) نفسه يقطع المستويين (P) و (P') في مستقيمين متوازيين (D) وآخر يشمل النقطة A نسميّه (Δ).

أصبح في المستوي (ABC) مستقيمان (Δ) و (AC) يوازيان نفس المستقيم (D) ويشملان نفس النقطة A، فهما متطابقان .

ومنه <u>النقطة C تنتمي إلى (P')</u>.

وبالتالي المستويان (P') و (P'') متطابقان .

نستخلص ممّا سبق أنه: يوجد مستو وحيد (P') يشمل النقطة A معلومة ويوازي مستويا معلوما (P).

خلاصة

لإثبات الوحدانيّة نفرض أنه يوجد عنصران يحققان نفس الشروط (أو الخواص)، ثمّ نبيّن أنّ هذين العنصرين متساويان، أو أنّ هذا الفرض يؤدي إلى تناقض.

إعادة استثمار

(P) مستوي و A نقطة معلومان. بيّن أنه يوجد مستو وحيد (P') يشمل النقطة A ويعامد المستوي (P).

حــــلّ مسألة إدماجيــــة

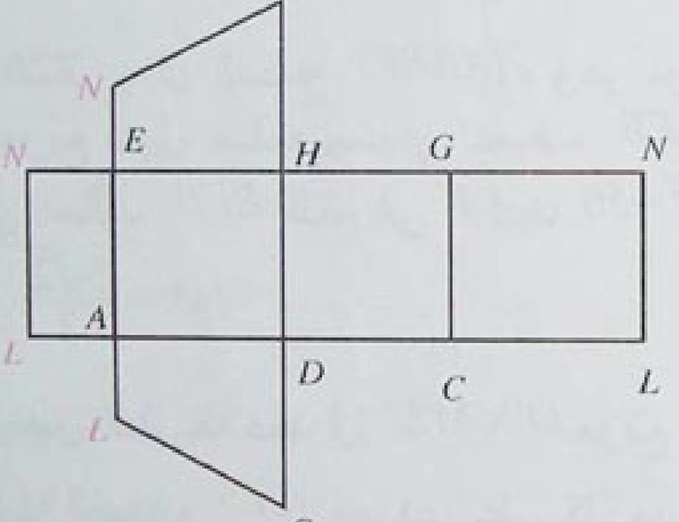
المسألة المعالجة مؤلفة من جزأين:

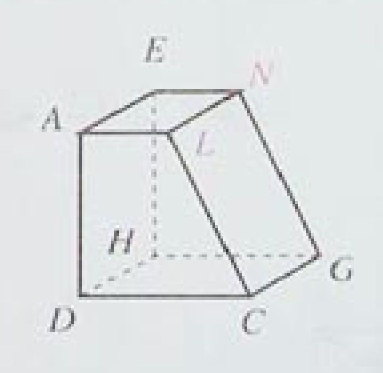
الجزء الأول: $ABCDEFGH$ مكعّب طول حرفه $5cm$، النقط L و M و N و O و L' و M' و N' و O' منتصفات أحرفه $[AB]$ و $[BF]$ و $[FE]$ و $[EA]$ و $[DC]$ و $[CG]$ و $[GH]$ و $[HD]$ على الترتيب.

1. ما نوع المجسّم $ALCDENGH$ ؟ برّر جوابك.
2. ارسم تمثيلا بالمنظور متساوي القياس وتصميما للمجسّم $ALCDENGH$.
3. عيّن تقاطع المستوى (LNM') مع كلّ وجه من أوجه المكعّب.
4. النقطتان I و J منتصفا القطعتين $[FG]$ و $[BC]$ على الترتيب، بين أنّ المستويين $(DJIH)$ و (LNM') متعامدان، وعيّن تقاطعهما.
5. ما نوع المجسّم $LMONL'M'N'O'$ ؟ احسب حجمه.
6. بيّن أنّ المستقيمات (AG) و (EC) و (FD) و (BH) و (LN') و (MO') و (NL') و (OM') متقاطعة في نقطة واحدة.

حلّ

1. المجسّم $ALCDENGH$ هو موشور قائم قاعدته $ALCD$ شبه منحرف قائم، لأنّ كلا من $ALCD$ و $ENGH$ شبه منحرف قائم، ومستوياهما متوازيان (سطحان متقابلان في مكعّب)، وكلّ منهما عمودي على المستويات $(AENL)$ و $(NGCL)$ و $(ENGH)$ و $(AEHD)$.
2. تمثيل وتصميم المجسّم $ALCDENGH$.

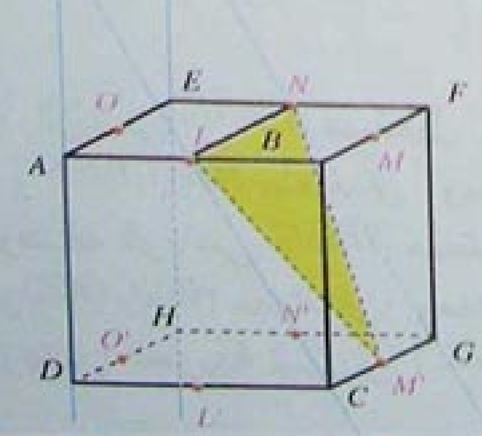




3. تقاطع المستوي (LNM') مع كلّ وجه من أوجه المكعّب:

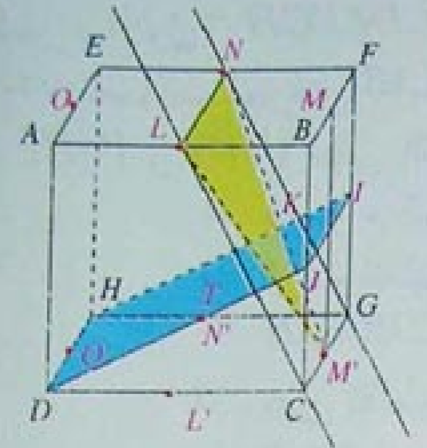
المستويان (LNM') و $(ABFE)$ يشتركان في النقطتين L و N وغير متطابقين فهما متقاطعان في المستقيم (LN).

ا. لدينا $(LN)//(CG)$ لأنّ $(LN)//(BF)$ ($LNFB$ مستطيل) و $(BF)//(CG)$ ($BFGC$ مربّع)، ومنه النقطتان C و G تنتميان إلى المستوي (LNM').



- المستويان (LNM') و $(DCGH)$ يشتركان في النقطتين C و G وغير متطابقين فهما متقاطعان في المستقيم (CG).
- المستويان (LNM') و $(BCGF)$ يشتركان في النقطتين C و G وغير متطابقين فهما متقاطعان في المستقيم (CG).
- المستويان (LNM') و $(ABCD)$ يشتركان في النقطتين L و C وغير منطبقين فهما متقاطعان في المستقيم (LC).
- المستويان (LNM') و $(EFGH)$ يشتركان في النقطتين N و G وغير متطابقين فهما متقاطعان في المستقيم (NG).

ب. المستقيمان (AD) و (LC) من المستوي $(ABCD)$ وغير متوازيين، لتكن S نقطة تقاطعهما. المستقيمان (NG) و (EH) من المستوي $(EFGH)$ وغير متوازيين، لتكن R نقطة تقاطعهما. النقطتان S و R تنتميان إلى كلّ من المستويين (LNM') و $(ADHE)$ غير المتطابقين، ومنه فالمستويان (LNM') و $(ADHE)$ متقاطعان في المستقيم (SR).

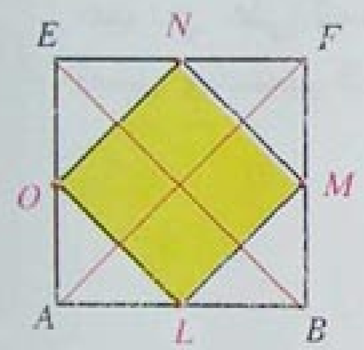


4. لإثبات أنّ المستويين (LNM') و $(DJIH)$ متعامدان يكفي إثبات أنّ المستقيم (DJ) عمودي على المستوي (LNM') ومن أجل ذلك سنبيّن أنّ (DJ) عمودي على كلّ من (LC) و (CG) من المستوي (LNM'):

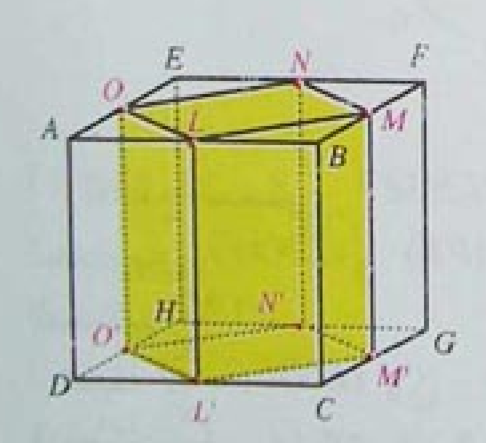
➢ نسمّي T نقطة تقاطع (DJ) و (LC).
من $LB=JC$ و $BC=CD$ نستنتج أنّ المثلثين LBC و JCD متقايسان ومنه $\widehat{BLC}=\widehat{CJD}$ و $\widehat{BCL}=\widehat{CDJ}$.
وبما أنّ $\widehat{BLC}+\widehat{BCL}=90°$ فإنّ $\widehat{CJD}+\widehat{BCL}=90°$ ومنه المثلث CTJ قائم في T ، أي أنّ (DJ) عمودي على (LC).

➢ المستقيم (CG) عمودي على كلّ من (CB) و (CD) فهو عمودي على مستويهما $(ABCD)$، وبالتالي فهو عمودي على كلّ مستقيم في هذا المستوي، ومنه (CG) عمودي على (DJ).
ومنه (DJ) عمودي على كلّ من (LC) و (CG) فهو عمودي على المستوي (LNM') ومنه المستويان (LNM') و $(DJIH)$ متعامدان.

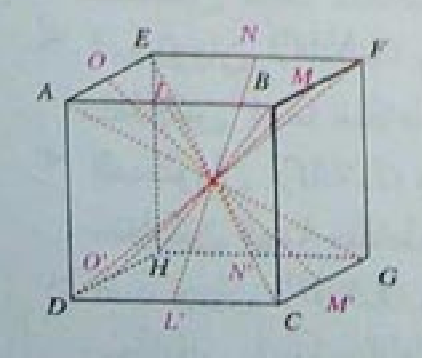
➢ تقاطع المستويين (LNM') و $(DJIH)$: النقطة T تقاطع (DJ) و (LC) تنتمي إلى كلّ من المستويين (LNM') و $(DJIH)$، وكذلك النقطة V تقاطع (HI) و (NG)، ومنه المستويان (LNM') و $(DJIH)$ متقاطعان في المستقيم (TV).



5. الشكل يمثّل السطح $(ABEF)$ ، وهو مربّع. بتطبيق نظرية مستقيم المنتصفين مربّع طول ضلعه يساوي نصف EB.
في المثلث EFB القائم في F لدينا $EB^2=EF^2+BF^2=50$ ومنه $EB=5\sqrt{2}$
و $MN=\frac{5\sqrt{2}}{2}$



وبنفس الطّريقة نجد أنّ $O'N'M'L'$ مربّع طول ضلعه $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
لدينا المستقيم (LL') عمودي على كلّ من المستقيمين $(L'N')$ و $(L'C)$
ومنه فإنّ كلا من المستويين $(LL'M'M)$ و $(LL'O'O)$ عمودي على المستوي $(O'L'M'N')$.
وبما أنّ المستويين $(OLMN)$ و $(O'L'M'N')$ متوازيان فإنّ المجسّم $LMONL'M'N'O'$ موشور قائم قاعدته مربّع
حجم الموشور $LMONL'M'N'O'$ يساوي:
$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}\times 5 = 62.5\ cm^3$$

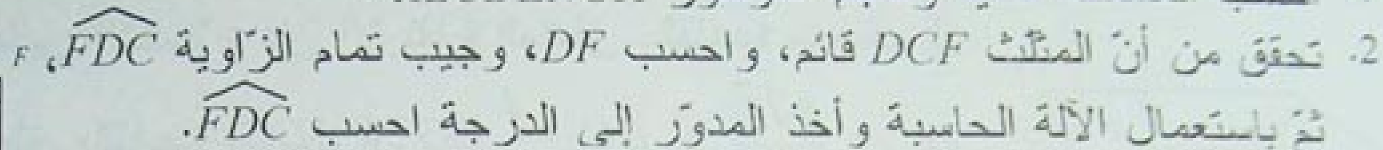


6. الرّباعي $ADGF$ مستطيل لأنّ $(AD)//(FG)$ و $AD=FG$
و (AD)،(DG) متعامدان. ومنه قطراه $[AG]$ و $[FD]$ متناصفان ...(1)
وكذلك الرّباعي $AEGC$ مستطيل لأنّ $(AE)//(CG)$ و $AE=CG$
و (AE)،(EG) متعامدان. ومنه قطراه $[AG]$ و $[EC]$ متناصفان ...(2)
وبنفس الطريقة نبيّن أنّ $[EC]$ و $[HB]$ لهما نفس المنتصف ...(3)

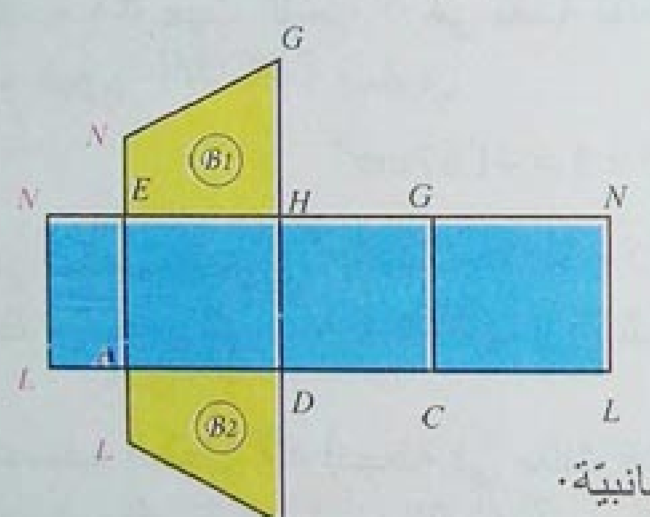


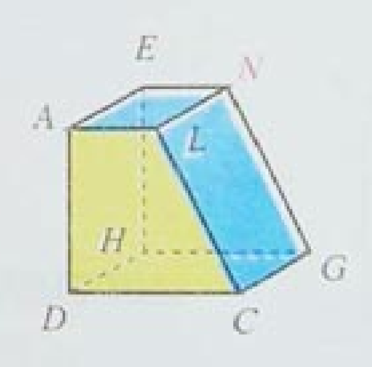
من (1) و(2) و(3) نجد أنّ [AG] و [FD] و [EG] و [HB] لها نفس المنتصف... (4)
الرّباعي AOGM' متوازي أضلاع، لأنّ (GM')//(AO) و AO=GM' ومنه قطراه [AG] و [OM']
متناصفان ...(5)
وبنفس الطريقة نبيّن أنّ [AG] و [LN'] لهما نفس المنتصف و [HB] و [MO'] لهما نفس المنتصف
و[FD] و [NL'] لهما نفس المنتصف و...(6)
من (4) و (5) و (6) نجد أنّ [AG] و [FD] و [EG] و [HB] و [LN'] و [MO'] و [NL'] و [OM']
لها نفس المنتصف وهو مركز المكعّب ... (4)

الجزء الثّاني: ABCDEFGH مكعّب طول حرفه 5cm، النقط L و M و N و O منتصفات أحرفه
[AB] و [BF] و [FE] و [EA] على التّرتيب.

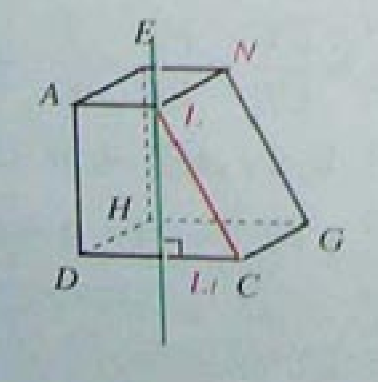
1. احسب المساحة الكلية وحجم الموشور ALCDENGH ؟
2. تحقق من أنّ المثلث DCF قائم، واحسب DF، وجيب تمام الزّاوية $\widehat{FDC}$،

ثمّ باستعمال الآلة الحاسبة وأخذ المدوّر إلى الدرجة احسب $\widehat{FDC}$.
3. بيّن أنّ المثلث EDG متقايس الأضلاع، واحسب مساحته.
4. لتكن النّقطة R تقاطع المستقيمين (OM) و (NL) ما نوع المجسّم RDCGH؟ احسب حجمه، وقارنه بحجم المكعّب.
5. T نقطة من [CF] حيث $CT = \frac{2}{5}CF$ ، احسب الطّول AT.

حلّ
1. الموشور القائم ALCDENGH قاعدته شبه منحرف قائم ADCL ، وارتفاعه AE



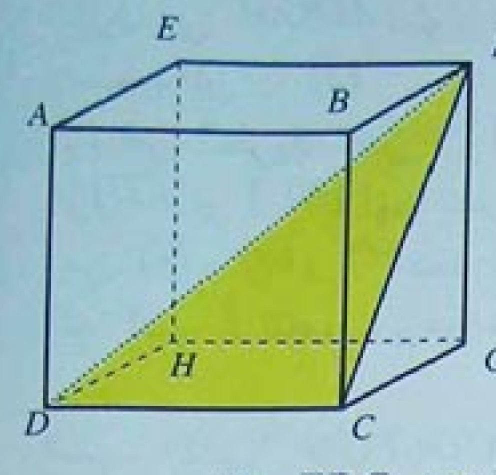


المساحة الكلية تساوي مجموع مساحتي القاعدتين والمساحة الجانبيّة.
مجموع مساحتي القاعدتين تساوي : $S_1 = 2\times \frac{(2,5+5)\times 5}{2}=37.5cm^2$
لحساب المساحة الجانبيّة نحسب أولا الطول LC:
الموازي للمستقيم(AD) و يقطع (DC) في نقطة نسمّيها L_1. المثلث LL_1C قائم في L_1 وفيه $LL_1=5\ cm$
و $CL_1=2,5\ cm$ ومنه:
$LC^2=L_1C^2+L_1L^2=(2,5)^2+(5)^2=31,25$ ومنه $LC=5,6\ cm$
المساحة الجانبية: $S_2=5\times(2,5+5+5+5,6)=90,5cm^2$
ومنه المساحة الكلية هي: $S=S_1+S_2=37,5+90,5=98\ cm^2$



حجم الموشور القائم يساوي جداء مساحة قاعدته وارتفاعه
مساحة القاعدة $S=\frac{(5+2,5)\times 5}{2}=18,75\ cm^2$ ، ومنه الحجم يساوي
$V=18,75\times 5=93,75\ cm^3$

2. المثلث DCF قائم في C لأنّ المستقيم (DC) عمودي على المستوي $(BCGF)$ فهو عمودي على (CF).



حساب DF:

$$DF^2=DC^2+CF^2=DC^2+(CG^2+GF^2)=75$$

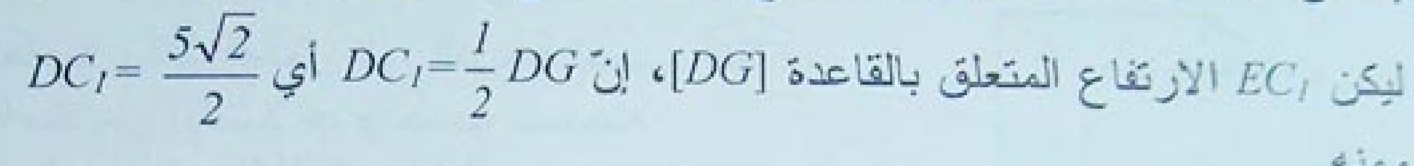
ومنه $DF = 8,66\ cm$

ومنه $\cos\widehat{FDC}=\dfrac{DC}{DF}=\dfrac{5}{8,66}\approx 0,577$

وباستعمال الآلة الحاسبة وأخذ مدوّر النّاتج إلى الدّرجة نجد $\widehat{FDC}=55°$

3. أضلاع المثلث EDG هي أقطار في مربّعات متقايسة فهي متقايسة، ومن المثلث EDG متقايس الأضلاع.

بما أنّ المثلث EDG متقايس الأضلاع فإنّ الارتفاع المتعلق بالقاعدة منصّف لها.

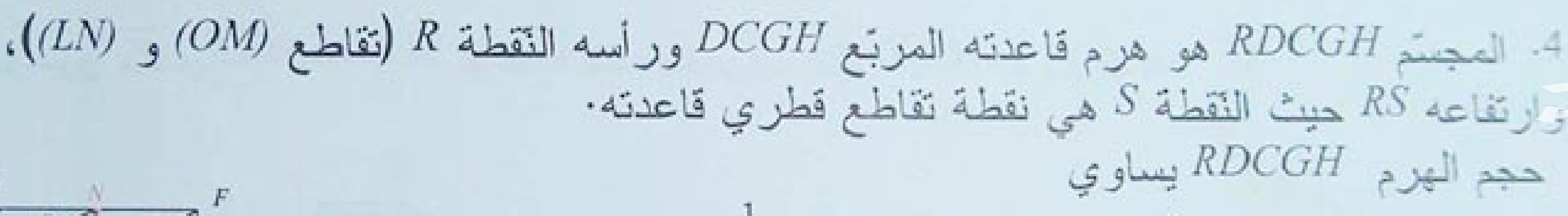


ليكن EC_1 الارتفاع المتعلق بالقاعدة $[DG]$، إنّ $DC_1=\dfrac{1}{2}DG$ أي $DC_1=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

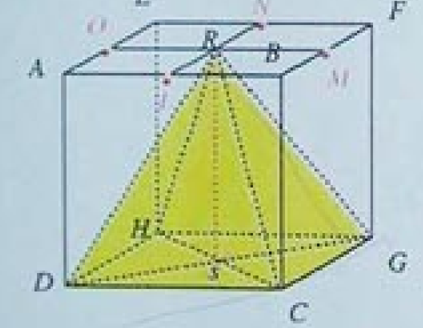
ومنه

$$EC_1=\sqrt{ED^2-DC_1^2}=\sqrt{50-\frac{25}{2}}=5\sqrt{\frac{3}{2}}$$

ومنه مساحة المثلث EDG تساوي $S=\dfrac{1}{2}\times 5\sqrt{\dfrac{3}{2}}\times 5\sqrt{2}=12,5\sqrt{3}\approx 21,65\ cm^2$



4. المجسّم $RDCGH$ هو هرم قاعدته المربّع $DCGH$ ورأسه النّقطة R (تقاطع (OM) و (LN))، وارتفاعه RS حيث النّقطة S هي نقطة تقاطع قطري قاعدته.



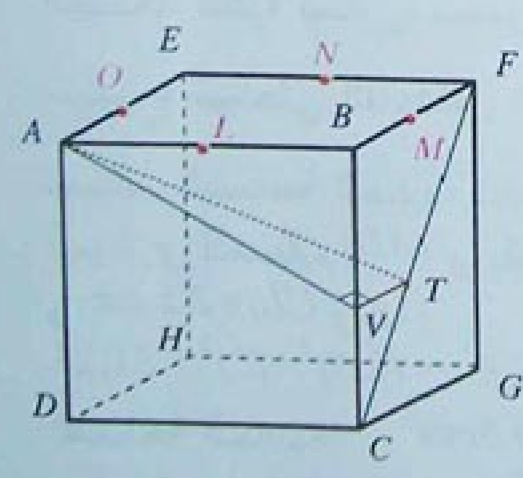
حجم الهرم $RDCGH$ يساوي

$$V=\frac{1}{3}\times 5\times 5\times 5=41,67\ cm^3$$

حجم المكعّب يساوي $V'=5\times 5\times 5=125\ cm^3$

نلاحظ أنّ حجم الهرم $RDCGH$ يساوي ثلث حجم المكعّب $ABCDEFGH$

5. لحساب الطّول AT (نجعله في مثلث قائم على سبيل المثال).



نرسم المستقيم الذي يشمل النّقطة T ويوازي (BF) فيقطع $[BC]$ في نقطة نسمّيها V.

إنّ المثلث AVT قائم في V لأنّ $(VT)//(BF)$ و (BF) عمودي على المستوي $(ABCD)$.

يكفي عندئذ حساب VT و BV بتطبيق نظرية طالس في المثلث BCF، وحساب AV من المثلث القائم ABV.

حساب VT و BV:

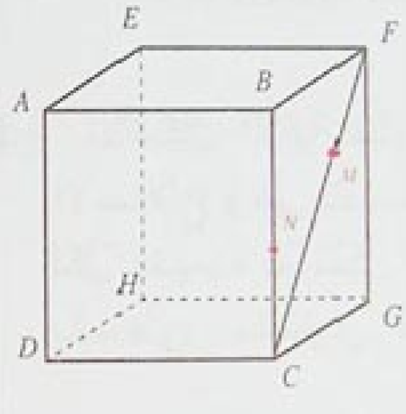
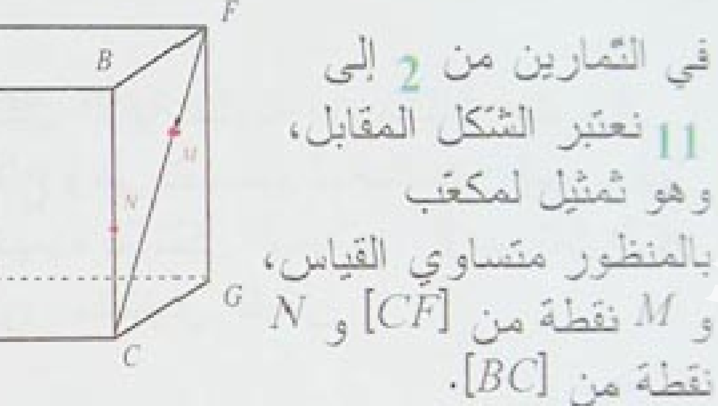
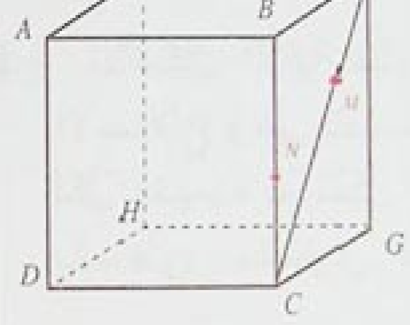
لدينا $\dfrac{CT}{CF}=\dfrac{CV}{CB}=\dfrac{VT}{BF}=\dfrac{2}{5}$ ومنه $VT=\dfrac{2}{5}BF=2cm$ و $CV=\dfrac{2}{5}CB=2cm$

ومنه $VB=4cm$، ولدينا $AV^2=AB^2+VB^2=41$ ، أي $AV=\sqrt{41}\ cm$ وبالتّالي

$AT^2=AV^2+VT^2=41+4=45$ ومنه $AT=6,71\ cm$

أصحيح أم خاطئ ؟

1. في تمثيل المجسّمات باستعمال المنظور متساوي القياس:
   - أ. المستقيمان المتوازيان على الرّسم يمثّلان في الحقيقة مستقيمين متوازيين.
   - ب. المستقيمان المتقاطعان على الرّسم يمثّلان دوما مستقيمين متقاطعين في الحقيقة.
   - ج. الزّاوية القائمة على الرّسم تمثّل دوما زاوية قائمة في الحقيقة.
   - د. الدّائرة على الرّسم تمثّل دوما دائرة في الحقيقة.

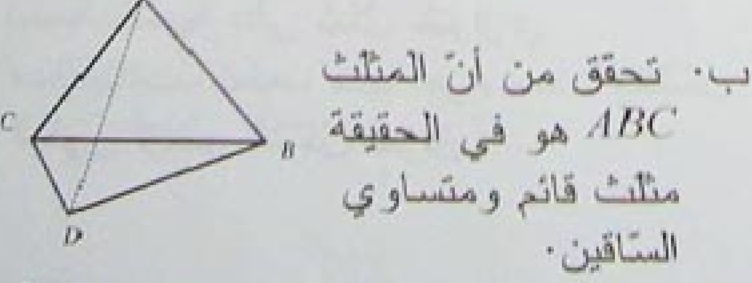
في التّمارين من 2 إلى 11 نعتبر الشّكل المقابل، وهو تمثيل لمكعّب بالمنظور متساوي القياس، و M نقطة من $[CF]$ و N نقطة من $[BC]$.

2. النّاظر والنّقطة A يقعان فوق المستوي (DCGH).
3. السطح $ABCD$ يقع في مستو الواجهة.
4. المستقيم (MN) غير محتوى في المستوي (BGF).
5. النّقط M، F، B والنقط N، C، G تعيّن نفس المستوي.
6. المستقيمان (MN) و (DE) متوازيان.
7. المستقيمان (AF) و (AD) متعامدان.
8. المستقيم (MN) يقطع المستوي $(HGEF)$.
9. المستقيم (MN) عمودي على المستوي $(HGEF)$.
10. المستويان (DBE) و (HCF) متوازيان.
11. المستويان (EBH) و (AFG) متعامدان.
12. كلّ مستقيمين موازيين لنفس المستوي متوازيان.
13. يمكن لمستقيمين عموديين على نفس المستقيم ألا يكونا من نفس المستوي.
14. إذا كان مستويان متوازيين تماما، فكل مستقيم من أحدهما يوازي المستوي الآخر.
15. من نقطة معلومة في الفضاء يمكن رسم:
   - أ. مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم.
   - ب. مستقيم وحيد يوازي مستقيما معلوما.
   - ج. مستقيم وحيد يوازي مستويا معلوما.
   - د. مستو وحيد عمودي على مستو معلوما.
16. إذا كانت A، B، C، D أربع نقط ليست من نفس المستوي، و M نقطة من $[AB]$ و N نقطة من $[AC]$ كما في الشّكل فإنّ:
   - أ. المستقيم (AC) يقطع المستقيم (BD).
   - ب. المستقيم (MN) يقطع المستقيم (CD).
   - ج. المستقيم (MN) محتوى في المستوي (ABC)
   - د. المستقيم (MN) يقطع المستوي (BCD) في النّقطة S.

التمثيل بالمنظور متساوي القياس

17. الشّكل المقابل هو تمثيل بالمنظور متساوي القياس لجزء مقطوع من مكعّب طول حرفه $6cm$، ارسم تمثيلا للجزء الآخر.

18. $ABCD$ رباعي وجوه حيث الوجه (ABC) يقع في مستوي الواجهة (انظر الشّكل المرفق)
   - أ. بيّن أنّ النّاظر يقع تحت المستوي (BCD) والنّقطة تقع A وفق $[BC]$.



   - ب. تحقق من أنّ المثلث ABC هو في الحقيقة مثلث قائم ومتساوي السّاقين.
   - ج. ارسم تمثيلا لنفس المجسّم باعتبار النّاظر والنّقطة A يقعان فوق المستوي(BCD).



19 $ABCD$ رباعي وجوه منتظم (أحرفه متقايسة)، النقطة I منتصف $[AD]$ (انظر الشكل المقابل).

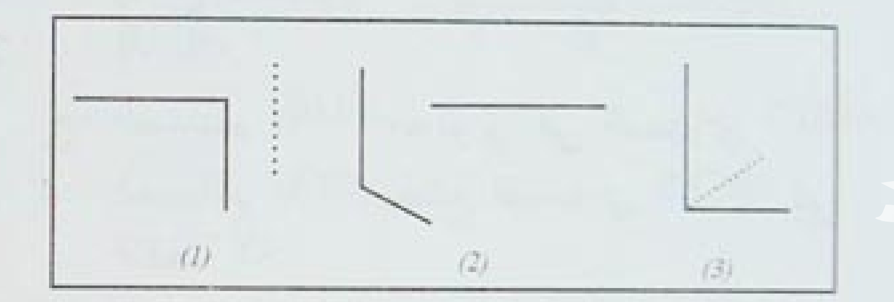
أ. تحقق من أنّ الوجه (ABC) يقع في مستوي الواجهة.

ب. انقل الشكل وارسم المستقيم (Δ) الذي يوازي (BD) الذي يشمل I

ج. علّم النقطتين M و N منتصفي $[BC]$ و $[CD]$ على الترتيب
ماذا يمثّل كلّ من:

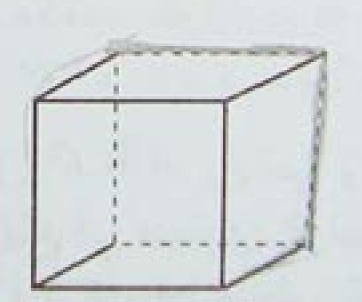
1. المستقيم (AM) بالنسبة للمثلث ABC
2. المستقيم (AN) بالنسبة للمثلث ACD.

20 كلّ من الأشكال الآتية هو بداية لتمثيل متوازي مستطيلات بالمنظور متساوي القياس. أنقل الشكل وأكمله.

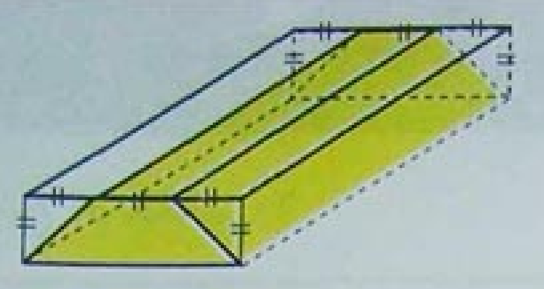


21 الشكلان مرسومان باستعمال تقنية المنظور متساوي القياس، اكتشف الأخطاء المرتكبة في كلّ منهما.

رباعي وجوه منتظم — مكعّب



22 قطعة خشبية على شكل متوازي مستطيلات، قطعنا منها جزء ممثلا بالشكل الملوّن (انظر الشكل المرفق).



أ. أي مجسّم يمثّله الجزء المقطوع ؟

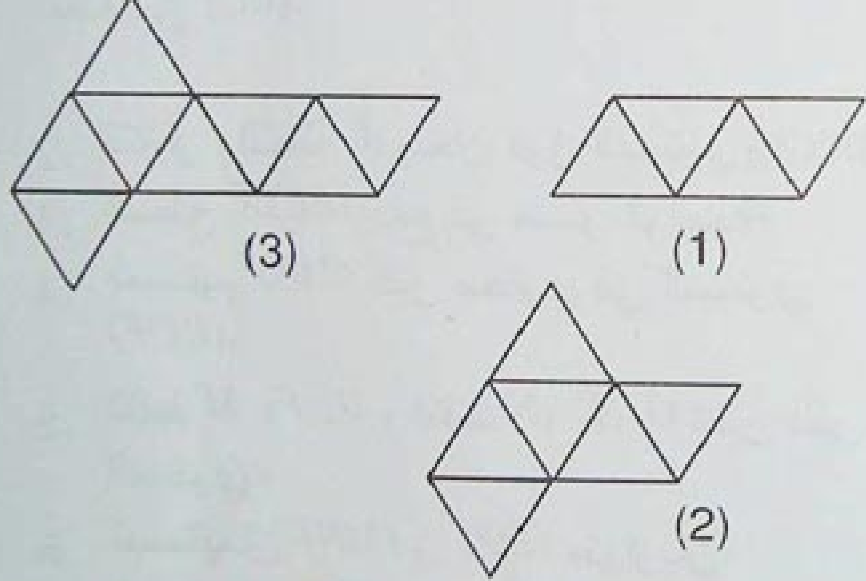
ب. أي جزء منه يقع في مستوي الواجهة.

ج. أنجز تمثيلا للجزء المقطوع وتصميما له.

23 أ. باستعمال تقنية المنظور متساوي القياس ارسم تمثيلا لهرم منتظم $ABCDEFG$ رأسه A، وطول حرفه $6cm$، وقاعدته سداسي منتظم طول ضلعه $2cm$، وبحيث يقع أحد أسطحه الجانبية في مستوي الواجهة.

ب. علّم النقط I ، J ، K ، L ، M ، N منتصفات أحرفه، ما نوع المجسّم $BCDEFGIJKLMN$ ؟

24 الأشكال الآتية مكوّنة من مثلّثات متقايسة الأضلاع وهي تصاميم لمجسّمات. أنجز مثيلا لكلّ منهما، ثمّ شكل المجسّم وارسم تمثيلا له بالمنظور متساوي القياس.



الأوضاع النسبية لكل من مستويين، مستقيمين، مستقيم ومستو

25 الشكل المقابل هو تمثيل بالمنظور متساوي القياس لمتوازي مستطيلات $ABCDEFGH$.
M نقطة من $[BC]$ و N نقطة من $[BF]$.
أذكر الوضع النسبي – مع تبرير الجواب – لكلّ من:

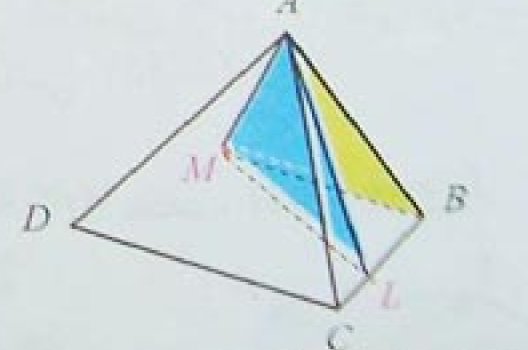
أ. المستقيم (MN) والمستوي (BCF).
ب. المستقيم (MN) والمستوي $(ABFE)$.
ج. المستقيم (MN) والمستوي $(ADHE)$.
د. المستقيم (MN) والمستقيم (CG).
هـ. المستقيم (EB) والمستقيم (HC).
و. المستوي (NBM) والمستوي (BEH).
ز. المستوي (NBM) والمستوي (AEH).

26 باستعمال معطيات الشكل الوارد في التمرين السابق، بيّن أنّ المستقيمين (MN) و (AB) ليسا من نفس المستوي.

27 نفس سؤال التمرين السابق بالنسبة إلى المستقيمين (MN) و (EF).

28 باستعمال معطيات الشكل الوارد في التمرين رقم25، عيّن تقاطع المستقيم (MN) مع كلّ من:
أ. المستوي (ABE).
ب. المستوي (DCH).
ج. المستوي (EFG).

29 الشكل $ABCD$ يمثّل رباعي وجوه، و L نقطة من $[BC]$، و M نقطة من المستوي (ADC).
أ. أنجز مثيلا للشكل المعطى.
ب. أنشئ تقاطع المستويين (BDC) و (ABM).
ج. أنشئ تقاطع المستويين (BDC) و (ALM).



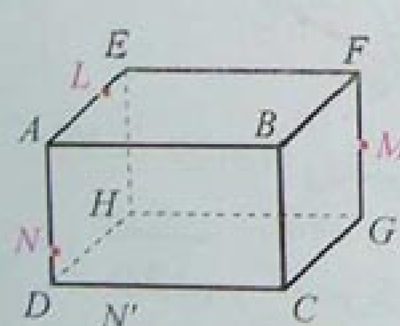
30 باستعمال معطيات الشكل الوارد في التمرين رقم25، عيّن تقاطع المستوي (ANM) مع كلّ وجه من أوجه المجسّم $ABCDEFGH$.

31 A، B، C، D، E خمس نقط من الفضاء حيث كلّ أربع منها ليست من نفس المستوي.
ما هو عدد المستويات وعدد المستقيمات التي تعيّنها هذه النقط.

32 A، B، C، D أربع نقط ليست من نفس المستوي، L نقطة من $[AB]$ و S نقطة من $[AC]$.
أ. بيّن أنّ المستويين (DBS) و (DCL) متقاطعان في مستقيم يشمل النقطة D، ثمّ عيّن تقاطعهما.
ب. بيّن أنّ المستويين (DSL) و (DBC) متقاطعان في مستقيم يشمل النقطة D، ثمّ عيّن تقاطعهما.

33 $ABCD$ رباعي وجوه، والنقطتان L و M منتصفا $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب، و N نقطة من $[AD]$ حيث $AD=6AN$ ، ارسم شكلا مناسبا، ثمّ أجب عن الأسئلة الآتية:
أ. هل المستقيم (ML) يقطع المستوي (BCD). برّر جوابك.
ب. أنشئ تقاطع المستوي (NML) مع كلّ وجه من أوجه رباعي الوجوه $ABCD$.

34 $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات. L نقطة من $[AE]$، و M نقطة من $[FG]$ ، و N نقطة من $[AD]$ كما في الشكل.
أنجز مثيلا لهذا الشكل، وأنشئ تقاطع المستوي (LMN) ومتوازي المستطيلات $ABCDEFGH$.



35 $ABCD$ رباعي وجوه، و L منتصف $[AB]$، و M مركز ثقل المثلث ADC (نقطة تلاقي متوسطاته).
أ. أنجز شكلا مناسبا، وبيّن أنّ المستقيم (LM) يقطع المستوي (BCD).
ب. أنشئ النقطة E تقاطع المستقيم (LM) والمستوي (BCD)، وبين أنّ الرّباعي $DBCE$ متوازي أضلاع.

.36 ABC مثلث، و (P) مستوي لا يوازي المستوي (ABC)، المستقيمات (AB)، (AC)، (BC) تقطع المستوي (P) في النقط C'، B'، A' على الترتيب. بيّن أنّ النقط C'، B'، A' في استقامية.

.37 $ABCDEFGH$ مكعّب، النقط M، N، J، منتصفات القطع $[EF]$، $[AE]$، $[DC]$ على الترتيب .أنشئ تقاطع المستوي (MNJ) مع المكعّب $ABCDEFGH$ ، وبين أنّه سداسي منتظم.

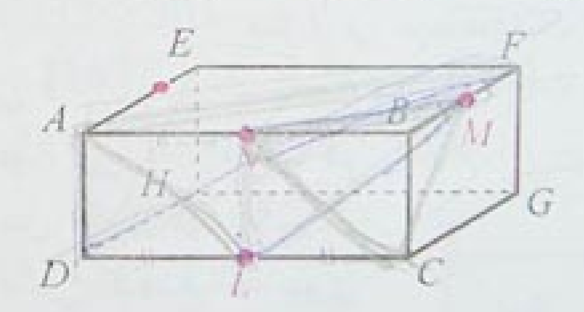
التوازي: مستقيمان ، مستويان ، مستقيم ومستو

.38 الشكل أدناه هو تمثيل بالمنظور متساوي القياس لمتوازي مستطيلات $ABCDEFGH$ ، النقط M، N، L منتصفات أضلاعه $[BF]$ ، $[AB]$ ، $[DC]$. بيّن أنّ:

أ. المستقيم (MN) يوازي المستقيم (DG).

ب. المستوي (NLM) يوازي المستوي (ADF).

ج. المستقيم (AL) يوازى المستوى (MNC).



.39 $ABCD$ رباعي وجوه، F مركز ثقل المثلث ABC، و G مركز ثقل المثلث ABD، و H مركز ثقل المثلث ADC.

أ. أنجز شكلا مناسبا، وبيّن أنّ المستقيم (HF) يوازي المستوي (BCD).

ب. بيّن أنّ المستويين (BCD) و (FGH) متوازيان.

.40 $ABCD$ رباعي وجوه، النقط E و F و G و H و I و J منتصفات أحرفه $[AB]$ و $[BC]$ و $[CD]$ و $[AD]$ و $[AC]$ و $[BD]$.

أ. بيّن أنّ كلا من المستقيمات (EI) و (IH) و (EH) يوازي المستوي (BCD).

ب. بين أنّ القطع $[IJ]$، $[FH]$، $[EG]$ لها نفس المنتصف.

.41 بيّن أنّه إذا كانت النقط E و F و G و H و I و J منتصفات أحرف رباعي وجوه منتظم فإنها رؤوس سداسي وجوه منتظم.

.42 ارسم رباعي وجوه $ABCD$ ، وعلّم نقطة M من $[AB]$، وليكن (P) المستوي الذي يشمل النقطة M ويوازي المستوي (BCD). أنشئ تقاطع المستوي (P) ورباعي الوجوه $ABCD$.

.43 (P) و (P') مستويان متوازيان، A، B، C ثلاث نقط متمايزة من المستوي (P) و D، E، H ثلاث نقط متمايزة من المستوي (P') حيث $(BC)//(DH)$، والمستويان (EBC) و (ADH) متقاطعان.

أ. أنجز شكلا مناسبا.

ب. بيّن أنّ مستقيم تقاطع المستويين (EBC) و (ADH) يوازي كلا من المستويين (P) و (P').

.44 $ABCDE$ هرم قاعدته مربّع $BCDE$ ، (P) مستوي يشمل المستقيم (DC) ويقطع $[AB]$ و $[AE]$ في النقطتين M و N على الترتيب. ما نوع الرّباعي $DCMN$ ؟

.45 $ABCDEFGH$ مكعّب (انظر الشكل)،

أ. بيّن أنّ المستويين (BGE) و (ACH) متوازيان.

ب. بيّن أن المستويين (BGE) و (ACH) يقسّمان $[DF]$ إلى ثلاث قطع متقايسة.



46. $ABCDEFGH$ مكعّب، L، M، N نقط من أحرفه $[BF]$، $[BC]$، $[AD]$ على التّرتيب حيث $AN = BM = BL$.

أ. بيّن أنّ المستويين (LMN) و $(CDEF)$ متوازيان.

ب. ماذا يحدث عندما تتطابق النّقطتان L و F ؟

تعامد: مستقيمان ، مستقيم ومستو ، مستويان

47. $ABCD$ رباعي وجوه حيث $AD = DC$ و $AB = BC$ ، M منتصف $[AC]$.

أ. بيّن أنّ المستقيم (AC) عمودي على المستوي (BDM).

ب. استنتج أنّ المستقيم (AC) عمودي على المستقيم (BD).

48. $ABCD$ رباعي وجوه منتظم، M منتصف $[CD]$.

أ. بيّن أنّ المستقيم (CD) عمودي على المستوي (ABM).

ب. ما هي مجموعة نقط الفضاء المتساوية المسافة عن طرفي قطعة المستقيم $[CD]$؟

49. $ABCDEFGH$ مكعّب، M، N منتصفا $[BF]$، $[DH]$ على التّر

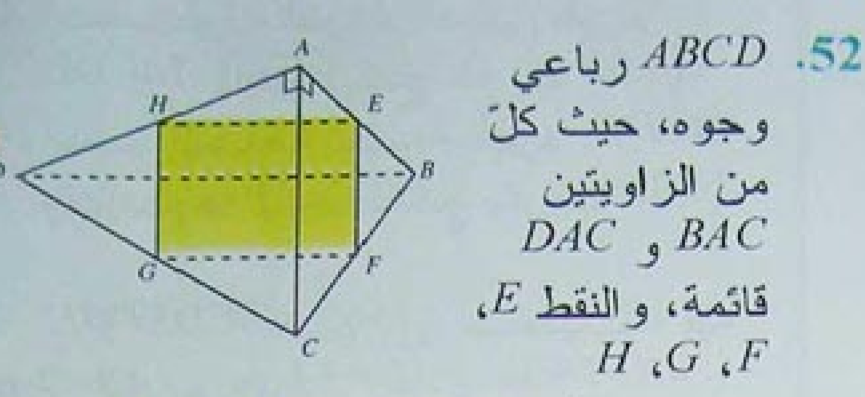
أ. بين أنّ النقط E، M، C، N تنتمي إلى نفس المستوي.

ب. بيّن أنّ المستقيمين (MN) و (EC) متعامدان. (إرشاد: يمكن الاستفادة من الرّباعي $EMCN$)

50. بيّن أنّ كلّ وجهين مشتركين في رأس من رؤوس مكعّب متعامدان.

51. الشّكل المقابل هو تمثيل بالمنظور متساوي القياس لمكعّب $ABCDEFGH$.
بيّن أنّ المستقيم (DF) عمودي على المستوي (BGE)، وعيّن نقطة تقاطعهما.

52. $ABCD$ رباعي وجوه، حيث كلّ من الزاويتين BAC و DAC قائمة، والنقط E، F، G، H منتصفات أحرفه $[AB]$، $[BC]$، $[CD]$، $[DA]$ على التّرتيب.



أ. بيّن أنّ الرّباعي $EFGH$ مستطيل.

ب. متى يكون الرّباعي $EFGH$ مربّعا ؟

53. الشرط الكافي لكي يكون مستقيم عموديا على مستو .
اثبت أنه إذا كان مستقيم عموديا على مستقيمين متقاطعين من مستو فإنّه عمودي على كلّ مستقيمات هذا المستوي (أي عمودي على المستوي).

54. ABC مثلث متساوي السّاقين رأسه الأساسي A، D نقطة من المستقيم العمودي على المستوي (ABC) ويشمل النّقطة A ، M منتصف $[BC]$.

أ. بيّن أنّ المستقيمين (MD) و (BC) متعامدان.

ب. استنتج طبيعة المثلث BCD.

أطوال ، مساحات ، حجوم

55. هرم $ABCDEFG$ رأسه A ، أحرفه الجانبية متقايسة وطول كلّ منها $6cm$، وقاعدته سداسي منتظم طول ضلعه $2cm$. أرسم قاعدته بدقة و أحسب مساحته الكلية وحجمه (تعطى النتائج بالتّدوير إلى $0,01$).

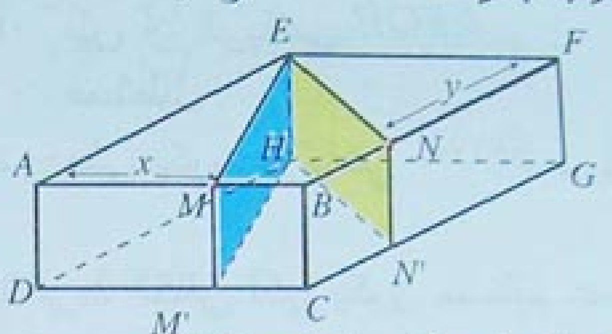
56. $ABCDE$ هرم ارتفاعه $8cm$ وقاعدته $BCDE$ مربّع طول ضلعه $4cm$، ورأسه A ينتمي إلى العمودي على المستوي $(BCDE)$ الذي يشمل مركز المربّع.

ا. بيّن أنّ الأحرف الجانبية للهرم متقايسة.

ب. احسب طول الحرف الجانبي للهرم $ABCDE$ (أعط النتائج بتقريب $0,01$).

ج. احسب المساحة الجانبية للهرم $ABCDE$ وكذا حجمه (أعط النتائج بتقريب $0,01$).

57. $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، فيه $AB=9cm$ و $AD=3,5cm$ و $AF=18cm$، ولتكن M و N نقطتان من $[AB]$ و $[BF]$ على الترتيب بحيث: $AM=x$ و $FN=y$



أ. بيّن أنّ المقطع الذي يكوّنه كلّ من المستويين (ENH) و (EMH) مع متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ هو مستطيل.

ب. عيّن قيمة كلّ من x و y التي من أجلها يقسّم المستويان (ENH) و (EMH) متوازي المستطيلات إلى ثلاثة أجزاء متساوية الحجم.

58. اسطوانة دوران (C) ارتفاعها $10cm$ ونصف قطر قاعدتها $5cm$، يقطعها مستو (P) يوازي محورها حيث المسافة بين مركز القاعدة والمستوي (P) تساوي $3cm$.

أ. ارسم شكلا مناسبا بالمنظور متساوي القياس بحيث يقطع المستوي (P) في مستوي الواجهة.

ب. بيّن أنّ المقطع الذي يحدثه المستوي (P) في الاسطوانة (C) هو مستطيل، واحسب مساحته.

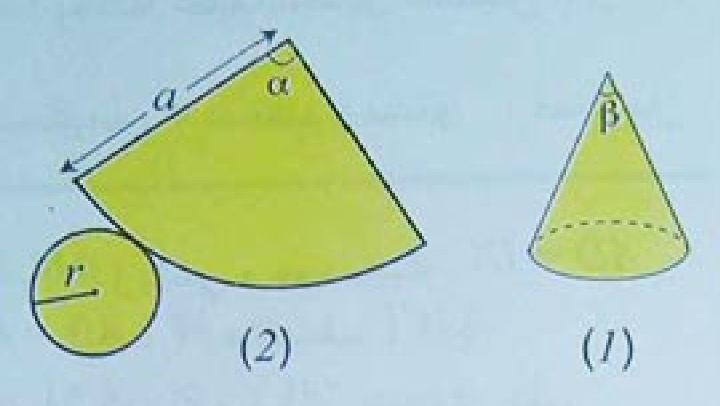
59. يمثل الشكل (2) تصميما لمخروط دوران، وهو مقطع من قرص نصف قطره a محدّد بزاوية مركزية قيسها α درجة، ودائرة نصف قطرها r.

1. أوجد العلاقة بين α و a و r.
2. نعتبر أنّ $\alpha = 90°$ و $a = 10\,cm$

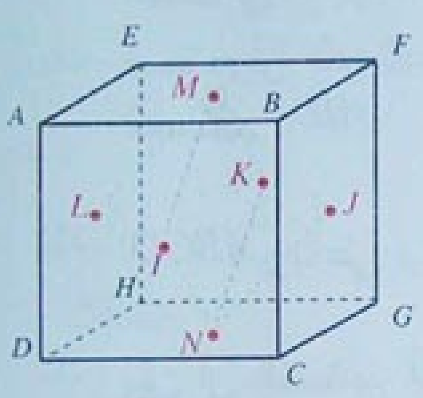
أ. احسب r.

ب. أنجز مجسما مناسبا لهذه الحالة.

3. احسب β زاوية رأس المخروط (باستعمال الآلة الحاسبة والتدوير إلى الدرجة).



60. $ABCDEFGH$ مكعّب طول حرفه a. النقط I، J، K، L، M، N مراكز المربّعات $ABCD$، $BCGF$، $EFGH$، $ABFE$، $ADHE$، $DCGH$ على الترتيب.



أ. بيّن أنّ المجسّم $MIJKLN$ منتظم (أحرفه متساوية).

ب. احسب طول حرف المجسّم $MIJKLN$ بدلالة a.

ج. احسب حجم المجسّم $MIJKLN$ بدلالة a، ثمّ جد النسبة بين حجم $MIJKLN$ وحجم المكعب $ABCDEFGH$.

د. ارسم تصميما للمجسّم $MIJKLN$.

مسائل

61. مجسّم على شكل هرم قاعدته مستطيل $ABCD$، رأسه S نقطة من المستقيم العمودي على المستوي $(ABCD)$ في النّقطة O تقاطع قطري القاعدة.

.1

أ. أنجز باستعمال التمثيل بالمنظور المتساوي القياس شكلا مناسبا لهذا المجسّم في كلّ من الحالتين الآتيتين:

- المشاهد ونقطة S فوق المستوي (ABC)
- المشاهد ونقطة S في جهتين مختلفتين بالنّسبة إلى المستوي (ABC)

ب. كيف تبدو طبيعة الرّباعي $ABCD$ في الشّكل الذي أنجزته.

ج. بيّن أنّ المستويين $(ABCD)$ و (SBD) متعامدان، وأنّ المستويين (SAC) و (SBD) غير متعامدان.

د. بيّن أنّ المستويين (DCS) و (ABS) متقاطعين، وأنشئ تقاطعهما.

هـ. بيّن أنّ كلا من المثلثات SAD و SDC و SCB و SAB متساوي السّاقين، وأنّ المثلثين SAD و SCB متقايسة، وكذلك المثلثان SDC و SAB متقايسان.

2. نعتبر فيما يلي $AB = 8\ cm$ و $AD = 6\ cm$ و $SO = 5\sqrt{3}\ cm$

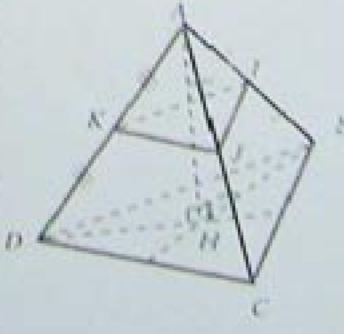
أ. احسب الطول AS.

ب. احسب الزّاوية SAO.

ج. احسب المساحة الكلية للمجسّم $SABCD$ وكذا حجمه.

62. $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه a.

.1



أ. H نقطة تقاطع المستقيم الذي يشمل النّقطة A والعمودي على المستوي (BCD)، بيّن أنّ النّقطة H هي مركز ثقل المثلث BCD.

ب. احسب الارتفاع AH.

ج. احسب جيب تمام الزّاوية ABH، باستعمال الآلة الحاسبة أعط قيمة ABH بالتّدوير إلى الدّرجة.

2. لتكن النّقط I، J، K منتصفات $[AB]$، $[AC]$، $[AD]$ على التّرتيب.

أ. بيّن أنّ المستويين (IJK) و (BCD) متوازيان.

ب. بيّن أنّ المستوي (IJK) يشمل منتصف $[AH]$

ج. ما نوع المجسّم $AIJK$ ؟

د. احسب بدلالة a المساحة الكلية لرباعي الوجوه $ABCD$، وكذا حجمه.

هـ. عبر بدلالة a عن المساحة الكلية للمجسّم $IJKBCD$ وكذا حجمه.

63. $ABCDEFGH$ مكعّب طول حرفه $6cm$، النّقط I، J، K، L، M، N منتصفات القطع $[AD]$، $[DC]$، $[CG]$، $[FG]$، $[FE]$، $[EA]$، على التّرتيب.

أ. بيّن أنّ النّقط I، J، K، L، M، N تنتمي إلى نفس المستوي.

ب. ما هو نوع الشّكل $IJKLMN$؟ احسب مساحته.

ج. بيّن أنّ النّقط I، J، K، L، M، N متساوية المسافة عن النّقطة B، وكذا عن النّقطة H.

د. بيّن أنّ (BH) عمودي على المستوي $(IJKLMN)$، وعيّن نقطة تقاطعهما.

هـ. استنتج ممّا سبق طبيعة المجسّم $BIJKLMN$، واحسب حجمه ومساحته الجانبيّة.

64. مكعّب $ABCDEFGH$ طول حرفه a، N نقطة من $[AB]$ بحيث $AB = 3\ BN$.

أ) عيّن تقاطع المستوي (FGN) مع كلّ من المستويين $(ABCD)$ و $(DCGH)$.

ب) احسب كلا من الطّولين FN و GN بدلالة a.

ج) لتكن النّقطة M تقاطع المستوي (FGN) و $[DC]$. ما نوع المجسّم $BFNCGM$ ؟

د) احسب المساحة الكلية للمجسّم $BFNCGM$ وكذا حجمه بدلالة a.

الهندسة المستوية

الكفاءات المستهدفة

- متوازي الأضلاع، ومتوازيات الأضلاع الخاصة: المستطيل، المربّع، المعيّن.
- المثلثات الخاصية، والمستقيمات الخاصة في مثلث.
- الزّوايا والدائرة.
- مبرهنتا طالس وفيثاغورس وعكس كلّ منهما، وتوظيفها في حلّ مسائل هندسيّة.
- النّسب المثلثية.
- المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة.
- التحويلات النقطية.

تعتبر الهندسة من أقدم العلوم التى ابتكرها الانسان، حيث كانت بداية ظهورها مرتبطة بحاجته إلى قياس الأراضي التى يعدها للزراعة والري أو لبناء المنازل. وتطورت بعد ذلك موازاة مع تطور علم الحساب، ومصدر كلمة هندسة هو كلمة «إندازة» الفارسية، والتى تعنى «علم قياس الأرض.» لقد أظهرت الأبحاث أنّ هذا العلم سبق إليه البابليون والمصريون القدامى، غير أنّ أول من ألّف في الهندسة كعلم، هو الرياضي اليوناني المشهور إقليدس (القرن الثالث قبل الميلاد) حيث كتب كتابا أعطى فيه للهندسة النظام البديهي المعروف عنها حاليا فكان إعلانا ببزوغ مفهوم البرهان. يتألف هذا الكتاب من ثلاث عشرة مقالة، المقالة الأولى منها تشتمل على تسع بديهيات، وخمس مسلمات وثلاثة وعشرين تعريفا، وثمانية وأربعين مبرهنة. والجدير بالذكر أنّ المبرهنة السابعة والأربعين هي التى عرفت فيما بعد بمبرهنة فيثاغورس وقد ترجم هذا الكتاب إلى العربية تحت عنوان (كتاب الأصول) لأول مرّة من طرف الحجاج بن يوسف بن مطر ترجمتين الأولى تسمّي بالنقل الهاروني نسبة إلى هارون الرشيد، والثانية تسمى بالنقل المأموني نسبة إلى المأمون ابن هارون الرشيد. وتُرجم مرّة أخرى من قبل إسحاق ابن حنين (809م - 873م) وذلك في عهد الخليفة العباسي أبي جعفر المنصور، وأصلح هذه التّرجمة الرّياضي الكبير ثابت ابن قرة (835م - 900م). ولم يكتف علماء دار الاسلام بالترجمة فقط، بل تطّرقوا إلى قضايا وبحوث لم يتطرق إليها إقليدس، فادخلوا تعديلات وتنقيحات على هندسة إقليدس منها فرضية التوازي التى جاءت في كتابه كبديهية خامسة، حيث كانت المحاولات العديدة لبرهانها من طرف الجواهري وثابت ابن قرة وابن الهيثم وعمر الخيام حافزا قويا و دليلا واضحا لبعض علماء الرياضيات في العصر الحديث لوضع هندسات غير إقليدية وهي هندسة ريمان وهندسة لوباتشفيسكي، وقسّم العلماء في الحضارة العربية الاسلامية الهندسة إلى قسمين هما: هندسة عقلية؛ وهي التى تعرف وتفهم أو التى تسمى الهندسة البحتة. والهندسة الحسيّة وهي التى ترى بالعين وتدرك باللمس، أي الهندسة التطبيقية. وقد استخدموها في حل المعادلات ذات الدرجة الثانية والثالثة.



صفحة من كتاب حل شكوك اقليدس لابن الهيثم تحمل الجزء الأخير من إثباته لمبرهنة فيثاغورس.

نشاط 1. متوازي الأضلاع

أ) علّم على ورقة غير مسطّرة ثلاث نقط A ، B ، O ليست في استقامة.

ب) أنشئ النقطتين C و D نظيرتي النقطتين A و B بالنّسبة إلى النقطة O على الترتيب.

ج) ما هي طبيعة الرّباعي $ABCD$ ؟

د) تحقق من أنّ:

1. القطعتين $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتان.
2. كلّ ضلعين متقابلين متقايسان.
3. كلّ زاويتين متقابلتين متقايستان.

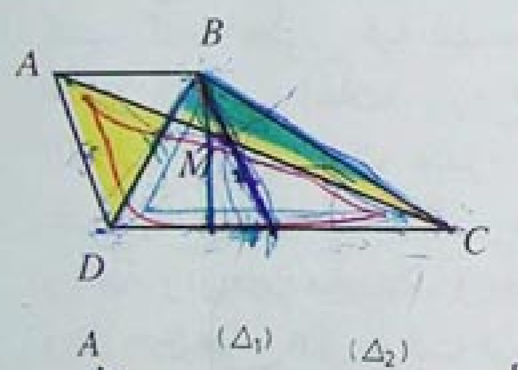
هـ) علّم النقط A' ، B' ، C' ، D' من $(AB]$ و $(BC]$ و $(CD]$ و $(DA]$ على التّرتيب حيث النقط A'، B'، C'، D' لا تنتمي إلى أضلاع الرّباعي $ABCD$ و $BA' = CB' = DC' = AD'$

و) مانوع الرّباعي $A'B'C'D'$ ؟ (ارشاد: يمكن البدء بنوع كلّ من الرّباعيين $A'CC'A$ و $D'BB'D$)

نشاط 2. متوازيات الأضلاع الخاصة

1. أنشئ – باستعمال المدور والمسطرة فقط – متوازي أضلاع قطراه متعامدان، تحقق أنّ أضلاعه متقايسة، ماذا نسمي متوازي الأضلاع في هذه الحالة ؟
2. أنشئ متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة، بيّن أنّ كلّ زواياه قائمة، ماذا نسمي متوازي الأضلاع في هذه الحالة ؟ متى يكون مربعا ؟

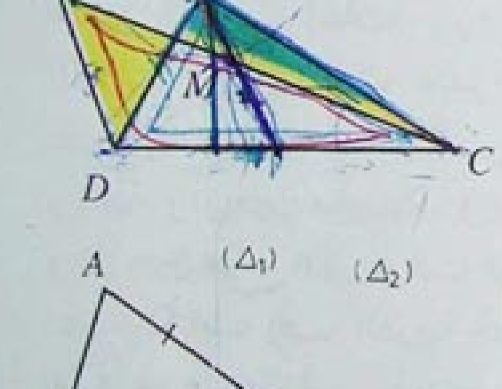
نشاط 3. المثلثات والمستقيمات الخاصة في مثلث



1. ABC شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و $[DC]$ و M نقطة تقاطع قطريه $[AC]$ و $[BD]$.

أ. بيّن أنّ للمثلثين BDC و ADC نفس المساحة.

ب. استنتج العلاقة بين مساحتي المثلثين MBC و MAD.



2. ارسم مثلثا كيفيا ABC ، و (Δ_1) ، (Δ_2) محورا الضّلعين $[BC]$ و $[AB]$ على التّرتيب يتقاطعان في النقطة M.

أ. بيّن أنّ محور الضلع $[AC]$ يشمل النقطة M.

ب. عيّن مركز الدّائرة التي تشمل النقط A، B، C، وارسمها.

ج. عيّن موقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC قائما في A.

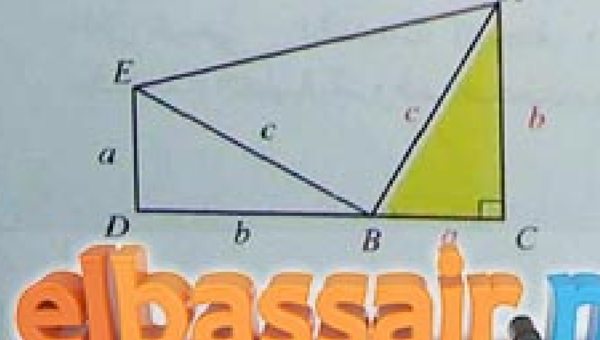
د. أين تقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC منفرج الزاوية.

3. ABC مثلث كيفي المنصفان الدّاخليان لزاويتي الرأسين A و B يتقاطعان في النقطة S.

أ. بيّن أنّ المنصّف الدّاخلي لزاوية الرأس C يشمل النقطة S.

ب. عيّن مركز الدائرة التي تمسّ أضلاع المثلث ABC من الدّاخل، وارسمها.

نشاط 4. مبرهنة فيثاغورس



1. الشكل المقابل يمثّل مثلثا ABC قائما في C أطوال أضلاعه a ، b ، c، و BDE مثلث يقايس المثلث ABC حيث النقط C، B، D في استقامية.

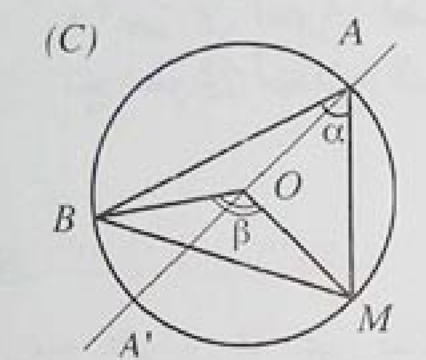
أ) بيّن أنّ الزّاوية ABE قائمة.
ب) ما نوع الرّباعي $ACDE$ ؟
جـ) أحسب مساحة الرّباعي $ACDE$ بطريقتين مختلفتين.
د) استنتج العلاقة بين c^2 و a^2 ، b^2.

2. ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه $6cm$، النقطة D منتصف $[BC]$.
أ) بيّن أنّ (AD) منصّف زاوية الرأس A.
ب) احسب الطول AD، واستنتج كلا من $sin30°$ ، $cos30°$ ، $tan30°$.

نشاط 5. الزّوايا والدائرة

1. ارسم دائرة (C) مركزها O ونصف قطرها $5cm$ ، و$[AB]$ قطر فيها، وM نقطة من الدّائرة حيث $AM=4cm$.
أ) باستعمال الآلة الحاسبة وتدوير النتيجة إلى $0,1$ احسب قيس الزّاوية ABM ، استنتج قيس الزّاوية MAB.
ب) ما نوع المثلث AOM ؟ واحسب أقياس زواياه.
جـ) استنتج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM.

2. A ، B ، M ثلاث نقط متمايزة من دائرة (C) مركزها O، المستقيم (AO) يقطع الدّائرة (C) في النقطة A'. نضع $\widehat{MAB} = \alpha$ و $\widehat{MOB} = \beta$



أ) بيّن أنّ كلا من المثلثين AOM و BOM متساوي السّاقين، ثمّ عبّر عن قيس الزّاوية $\widehat{MAA'}$ بدلالة قيس الزّاوية $\widehat{MOA'}$ ، وعن قيس الزّاوية BAA' بدلالة قيس الزّاوية $\widehat{BOA'}$.
ب) استنتج العلاقة بين α و β
جـ) عبّر عن الزّاوية $BA'M$ بدلالة β ، ثمّ بدلالة α ، واستنتج العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$.
د) D نقطة من القوس الكبرى $\widehat{BM}$ استنتج ممّا سبق العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BAM}$ و $\widehat{BDM}$.

نشاط 6. المثلثات المتقايسة

أ) باستعمال معطيات الجدول أدناه أنشئ في كلّ حالة مثلثا ABC. (وحدة الطّول هي السنتيمتر)

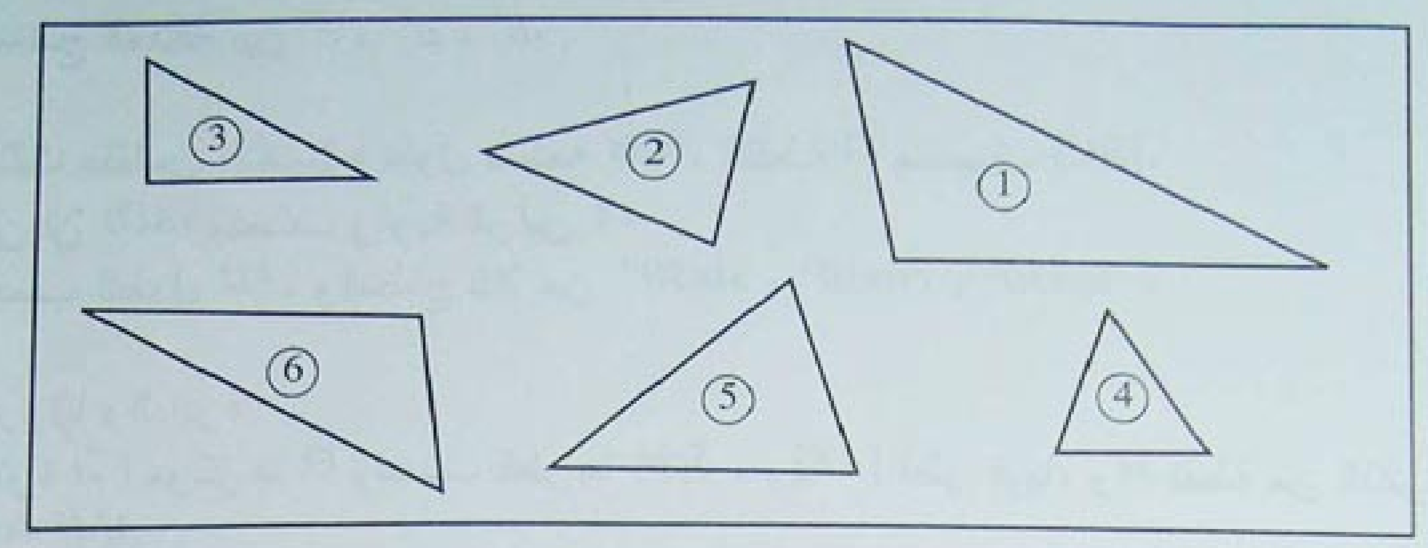
	AB	AC	BC	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$
الحالة 1	4,5	3	5,6			
الحالة 2		7	6			40°
الحالة 3	8			70°	45°	

ب) باستعمال الورق الشفاف قارن المثلث الذي رسمته، في كلّ حالة مع المثلث الذي رسمه زميلك، ماذا نستنتج؟



نشاط 7. المثلثات المتشابهة

1) قس باستعمال المنقلة زوايا كلّ مثلث فيما يأتي، ثمّ صنّف المثلثات السّتة الآتية حسب تقايس الزّوايا.



ماذا يمكن أن نقول عن مثلثات كلّ صنف ؟

شكل 1

شكل 2

2) في كلّ من الشّكلين (1) و (2) المستقيمان (BC) و $(B'C')$ متوازيان.

أ) بيّن أنّ زوايا المثلث ABC تقايس زوايا المثلث $AB'C'$.

ب) ماذا يمكن أن نقول عن المثلثين ABC و $AB'C'$ ؟

ج) بيّن أنّ أطوال أضلاع المثلث ABC متناسبة مع أطوال أضلاع المثلث $AB'C'$.

نشاط 8. التّحويلات النقطية

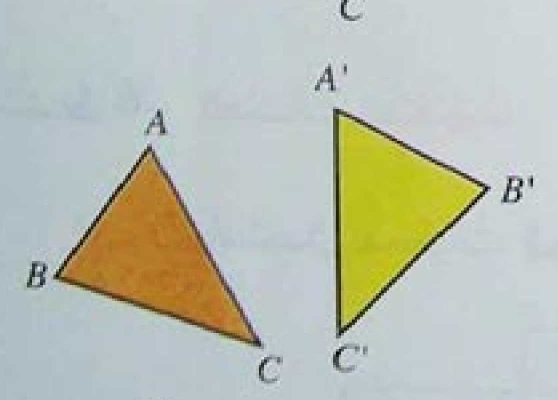
1. ارسم على ورقة غير مسطّرة مثلثا ABC و شعاعا $\vec{v}$ كما في الشّكل.

أ) أنشئ باستعمال المدور ومسطرة غير مدرّجة المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}$.

ب) ما هي العلاقة بين (AB) و $(A'B')$ ؟

ج) ماذا يمكن أن نقول عن المثلثين ABC و $A'B'C'$ ؟

2. تحقق باستعمال الورق الشفاف أنّ المثلث ABC يقايس كلاّ من المثلثين $A'B'C'$ و $A''B''C''$.



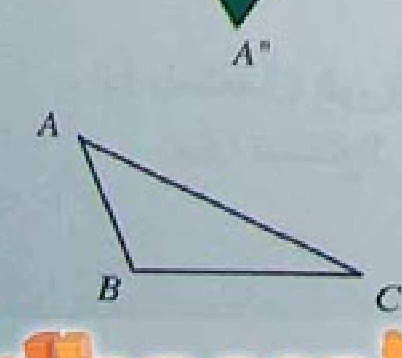
أ) بيّن أنّ المثلثين ABC و $A'B'C'$ متناظران بالنّسبة إلى مستقيم، يطلب إنشاؤه.

ب) بيّن أنّ المثلثين ABC و $A''B''C''$ متناظران بالنّسبة إلى نقطة، يطلب تعليمها.

ج) في أية حالة من الحالتين السابقتين نقول أنّ تقايس المثلثين مباشر.

3. أنقل الشّكل المقابل على ورقة غير مسطّرة، ثمّ أنشئ باستعمال المدور ومسطرة غير مدرّجة المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $90°$ عكس اتجاه عقارب الساعة.

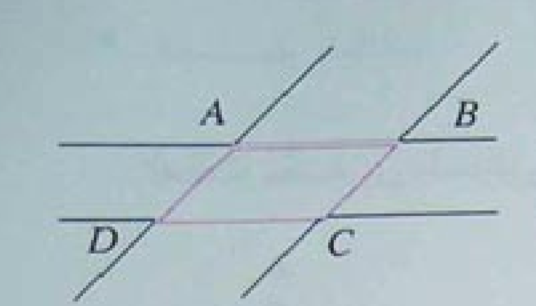
ماذا يمكن أن نقول عن المثلثين ABC و $A'B'C'$ ؟



الـــدرس

1. متوازي الأضلاع

تعريف 1



متوازي الأضلاع هو رباعي حاملا كلّ ضلعين متقابلين فيه متوازيان.

مثال:

$ABCD$ متوازي أضلاع معناه [$(AB) // (CD)$ و $(AD) // (CB)$]

خواص:

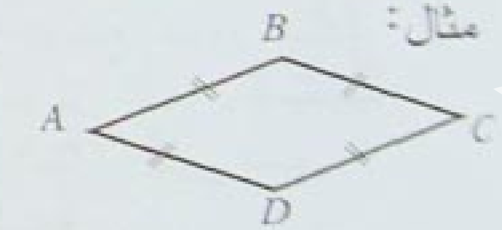
من أجل كلّ رباعي $ABCD$

1. $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان معناه $ABCD$ متوازى أضلاع.
2. [$AB = DC$ و $AD = BC$] معناه $ABCD$ متوازى أضلاع.
3. [$AB = DC$ و $(AB) // (DC)$] معناه $ABCD$ متوازى أضلاع.
4. [$\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ و $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$] معناه $ABCD$ متوازي أضلاع.

- متوازيات الأضلاع الخاصة

المعيّن: هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان.

مثال:



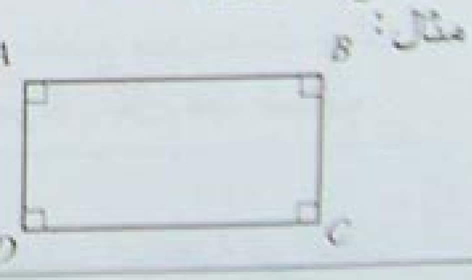
1) $ABCD$ معيّن معناه [$(AC) \perp (BD)$ و $[AC]$،$[BD]$ متناصفان]

2) $ABCD$ معيّن معناه [$AB = BC = CD = DA$]

3) إذا كان $ABCD$ معيّنا فإنّ [(AC) ينصف كلاً من الزاويتين $\widehat{BAD}$ و $\widehat{BCD}$ و (BD) ينصف كلاً من الزاويتين $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ADC}$]

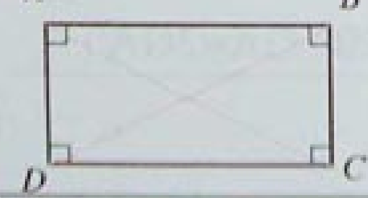
المستطيل: هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة.

مثال:



1) $ABCD$ مستطيل معناه [$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90°$]

2) $ABCD$ مستطيل معناه [$AC = BD$ و $[AC]$،$[BD]$ متناصفان]

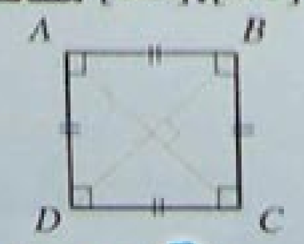


المربّع: هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان وزاوية قائمة.

مثال:

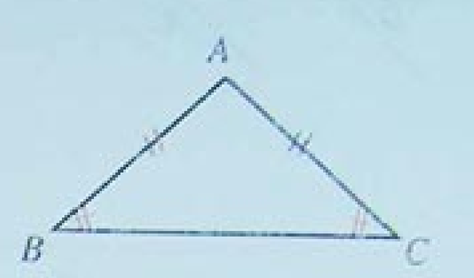
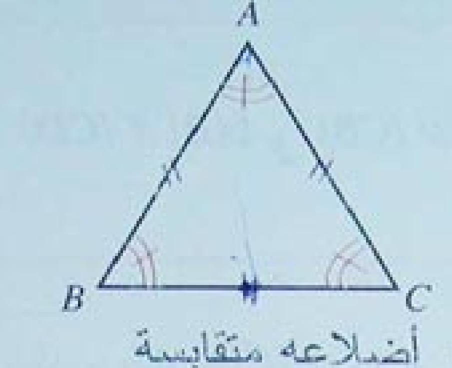
1) $ABCD$ مربّع معناه [$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90°$ و $AB = BC = CD = DA$]

2) $ABCD$ مربّع معناه [$AC = BD$ و $(AC) \perp (BD)$ و $[AC]$،$[BD]$ متناصفان]



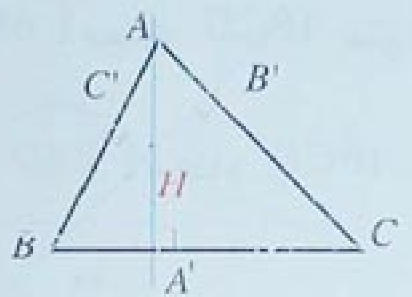
2. المثلثات، والمستقيمات الخاصة في مثلث

• المثلثات الخاصة

المثلث متساوي الساقين	المثلث متقايس الأضلاع	المثلث قائم الزاوية
		
• فيه ضلعان متقايسان • $ABC = ACB$	• أضلاعه متقايسة • $ABC = ACB = BAC = 60°$	• فيه زاوية قائمة • $ABC = 90°$

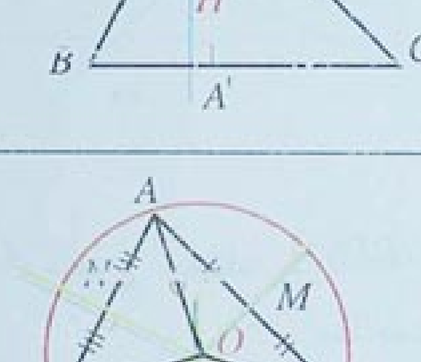
• المستقيمات الخاصة في مثلث

الارتفاع في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ويعامد الضلع المقابل.



- ارتفاعات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة.
- $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} AA' \times BC = \frac{1}{2} BB' \times AC = \frac{1}{2} CC' \times AB$

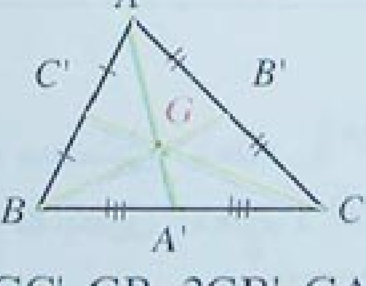
المحور في مثلث هو محور أحد أضلاعه.



(OA=OB=OC)

- محاور مثلث متقاطعة في نقطة واحدة.
- نقطة تقاطع محاور مثلث هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث (التي تشمل رؤوسه).

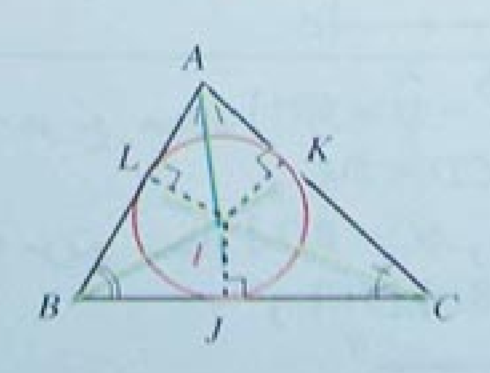
المتوسط في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابل.



(GC=2GC'، GB=2GB'، GA=2GA')

- متوسطات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة.
- نقطة تقاطع متوسطات مثلث هي مركز ثقل هذا المثلث.

المنصف في مثلث هو منصف إحدى زواياه.



- المنصفات الداخلية في مثلث متقاطعة في نقطة واحدة.
- نقطة تقاطع المنصفات الداخلية في مثلث هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث (أي التي تمسّ أضلاع المثلث من الداخل).

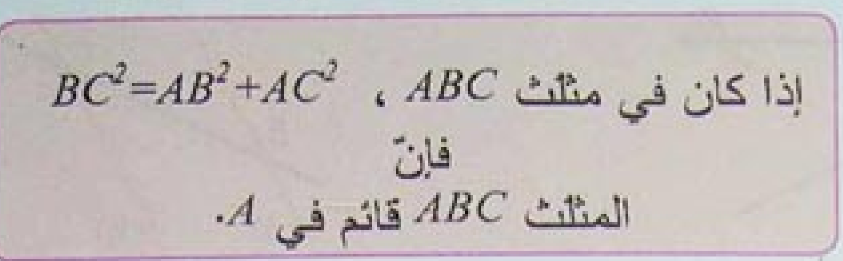


• ميرهنة فيثاغورس وعكسها

ميرهنة1 (ميرهنة فيثاغورس)

إذا كان ABC مثلثا قائما في A
فإنّ
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

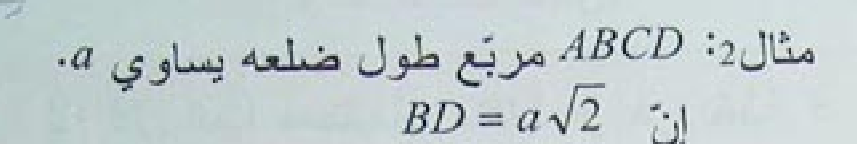
ميرهنة2 (عكس ميرهنة فيثاغورس)



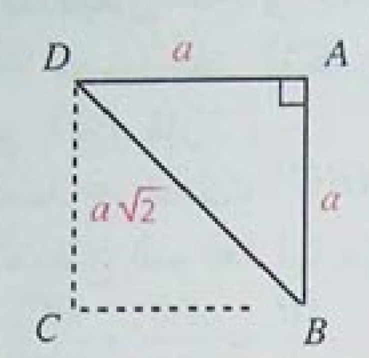
إذا كان في مثلث ABC ، $BC^2=AB^2+AC^2$
فإنّ
المثلث ABC قائم في A.

مثال1: ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه يساوي a (AH) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.

إنّ: $CH = \frac{a}{2}$ و $AH = a\frac{\sqrt{3}}{2}$



مثال2: $ABCD$ مربّع طول ضلعه يساوي a.
إنّ $BD = a\sqrt{2}$



نتائج:

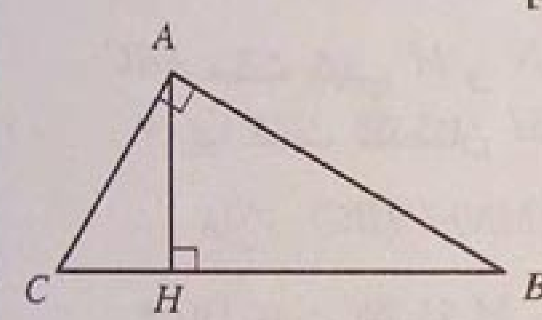
إذا كان ABC مثلثا قائما في A، و (AH) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$
فإنّ:

أ) $AB \times AC = AH \times BC$

ب) $AB^2 = BH \times BC$

جـ) $AC^2 = CH \times CB$

د) $AH^2 = HC \times HB$



• النسب المثلثية في مثلث قائم

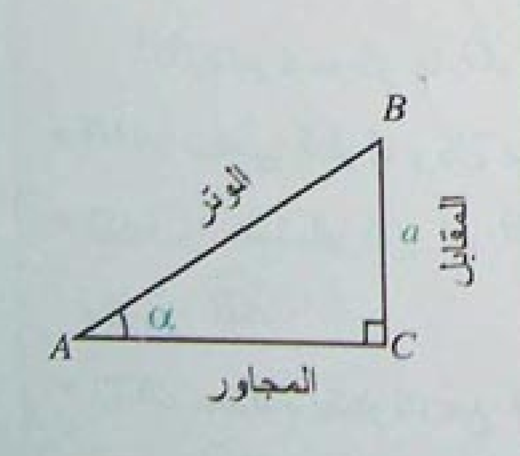
تعريف 2

ABC مثلث قائم في C،

◄ جيب الزّاوية α: $\sin\alpha = \frac{\text{طول الضلع المقابل لـ } \alpha}{\text{طول الوتر}} = \frac{BC}{AB}$

◄ جيب تمام الزّاوية α: $\cos\alpha = \frac{\text{طول الضلع المجاور لـ } \alpha}{\text{طول الوتر}} = \frac{AC}{AB}$

◄ ظل الزّاوية α: $\tan\alpha = \frac{\text{طول الضلع المقابل لـ } \alpha}{\text{طول الضلع المجاور لـ } \alpha} = \frac{BC}{AC}$



خواص:

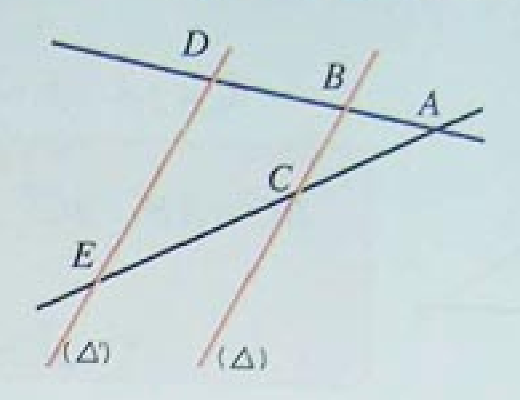
أ) من التعريف نجد أنّ: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

ب) باستعمال ميرهنة فيثاغورس يمكن أن نبيّن أنّ: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$.

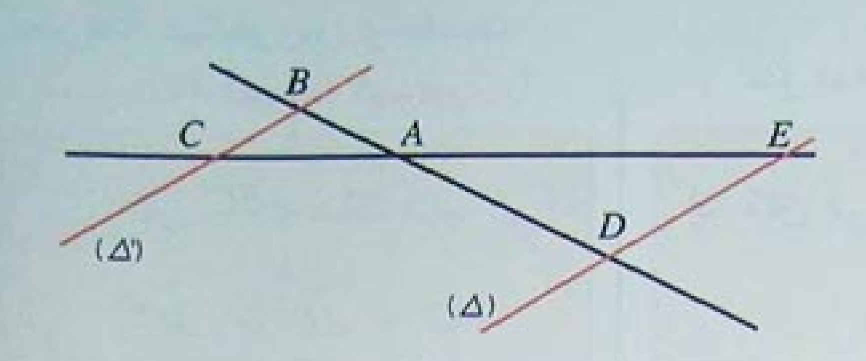


4. مبرهنة طالس

- **مبرهنة طالس وعكسها**



مبرهنة3 (مبرهنة طالس)



مبرهنة 4(عكس مبرهنة طالس)

إذا كان لدينا مستقيمان متقاطعان في نقطة A يقطعهما مستقيمان (Δ) و (Δ') في النقط B، C، D، E حسب أحد الشكلين أعلاه، وكان (Δ) يوازي (Δ')، فإنّ:
أطوال أضلاع المثلث ABC متناسبة مع أطوال الأضلاع الموافقة لها من المثلث ADE

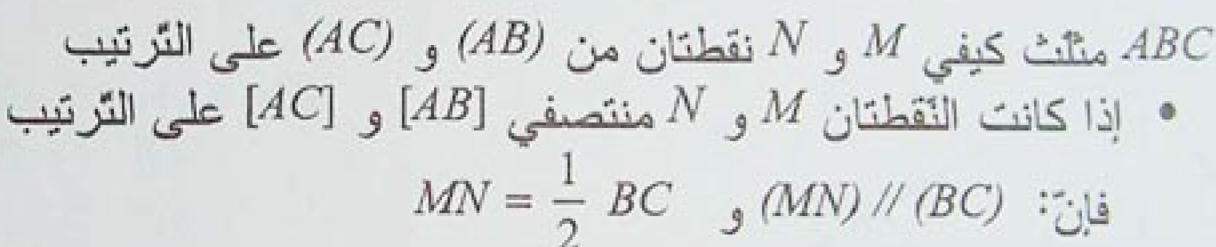
أي: $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$

إذا كانت كلّ من النقط A، B، D والنقط A، C، E على استقامة واحدة وبنفس التّرتيب حسب أحد الشكلين أعلاه، وكان $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ ، فإنّ:

(Δ) يوازي (Δ')

[(Δ) هو (EC) و (Δ') هو (CB)]

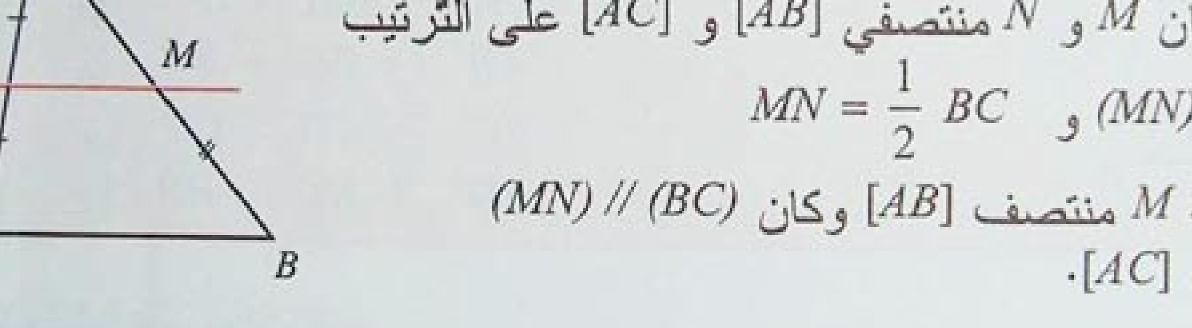
- **حالة خاصة: مستقيم المتنصفين في مثلث**



ABC مثلث كيفي M و N نقطتان من (AB) و (AC) على التّرتيب

- إذا كانت النّقطتان M و N منتصفي $[AB]$ و $[AC]$ على التّرتيب

فإنّ: $(MN) // (BC)$ و $MN=\frac{1}{2}BC$

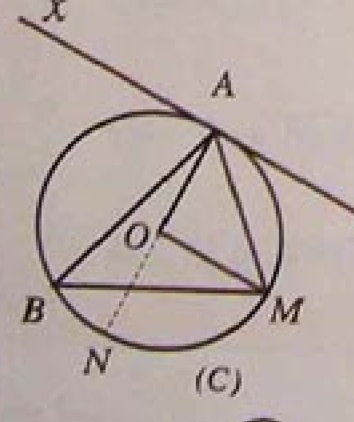


- إذا كانت النّقطة M منتصف $[AB]$ وكان $(MN) // (BC)$ فإنّ N منتصف $[AC]$.

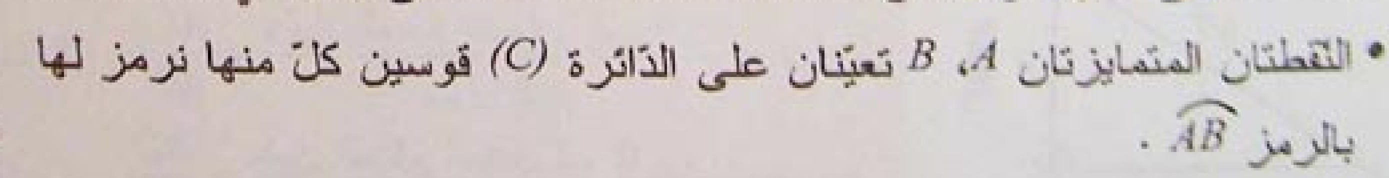
5. الزّوايا والدّائرة

مفردات واصطلاحات:

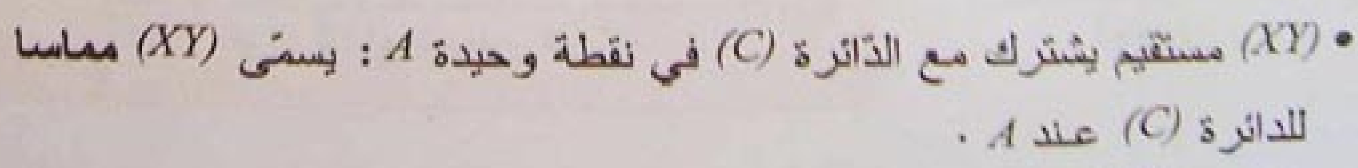
(C) دائرة مركزها O، و A، B، M، N نقط من الدّائرة (C) حيث O تنتمي إلى $[AN]$.



- $[AN]$ تسمّى **قطرا**، وكلّ من $[AB]$، $[AM]$، $[BM]$ تسمّى **وترا في الدّائرة** (C).
- النّقطتان المتمايزتان A، B تعيّنان على الدّائرة (C) قوسين كلّ منها نرمز لها بالرمز $\widehat{AB}$.
- (XY) مستقيم يشترك مع الدّائرة (C) في نقطة وحيدة A : يسمّى (XY) **مماسا** للدائرة (C) عند A .



- الزّاوية $\widehat{AOM}$ رأسها مركز الدّائرة: تسمّى زاوية **مركزيّة**، نقول إنّها **تحصر** القوس $\widehat{AM}$.
- الزّاوية $\widehat{ABM}$ رأسها نقطة من الدّائرة : تسمّى زاوية **محيطيّة**، نقول إنّها **تحصر** القوس $\widehat{AM}$.



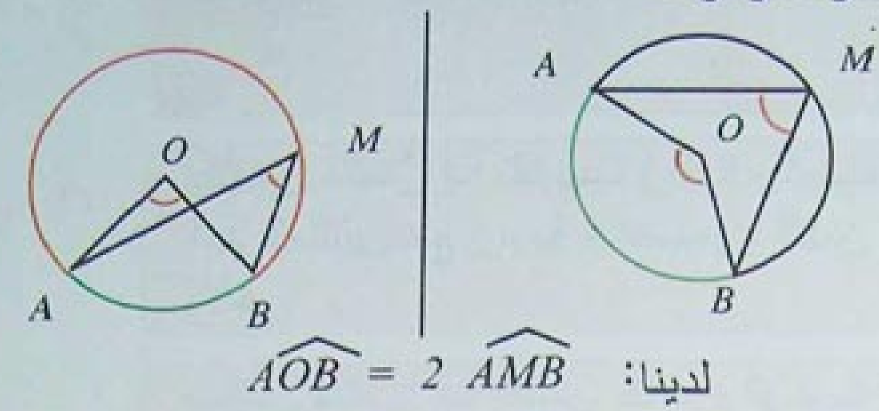
- الزّاوية $\widehat{XAB}$: تسمّى أيضا زاوية **محيطيّة**، نقول إنّها **تحصر** القوس $\widehat{AB}$.



مبرهنة 5

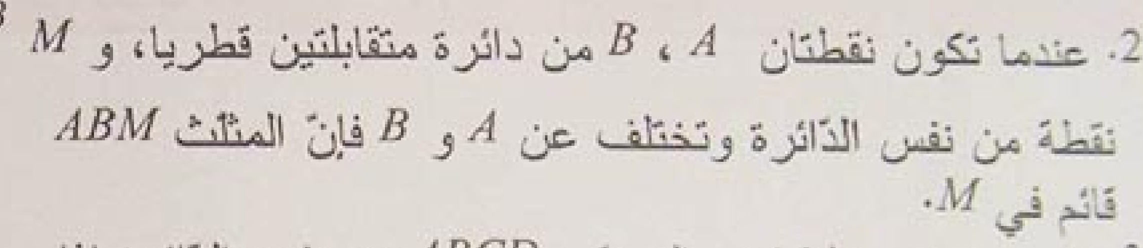
في كلّ دائرة، الزّاوية المركزيّة تساوي ضعف الزّاوية المحيطيّة التّي تحصر معها نفس القوس.

مثال: A ، B ، M ثلاث نقط متمايزة من دائرة مركزها O.



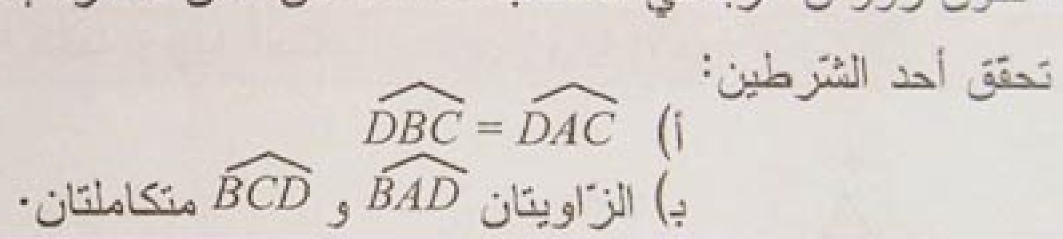
لدينا: $\widehat{AOB} = 2\ \widehat{AMB}$

نتائج:



1. الزّوايا المحيطيّة، في دائرة، التّي تحصر نفس القوس، أو تحصر أقواسا متقايسة تكون متقايسة.

2. عندما تكون نقطتان A ، B من دائرة متقابلتين قطريا، و M نقطة من نفس الدّائرة وتختلف عن A و B فإنّ المثلث ABM قائم في M.



3. تكون رؤوس الرّباعي المحدّب $ABCD$ من نفس الدّائرة إذا تحقق أحد الشّرطين:

أ) $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$

ب) الزّاويتان $\widehat{BAD}$ و $\widehat{BCD}$ متكاملتان.

6. المثلثات المتقايسة

• تقايس مثلثين

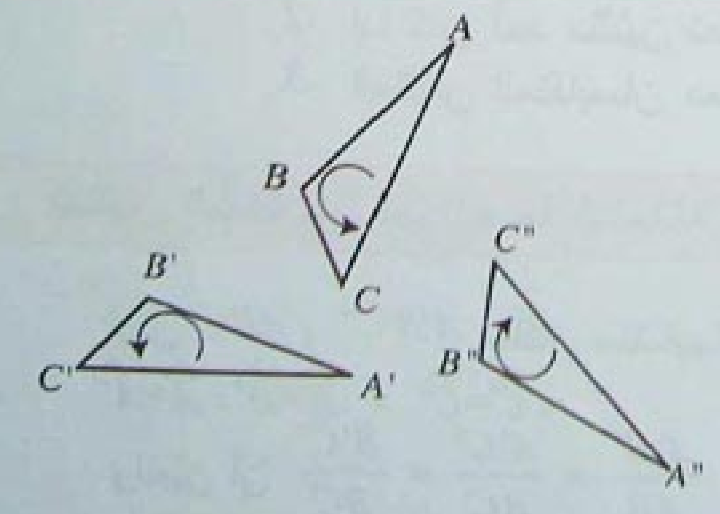
تعريف 3

نقول عن مثلثين إنهما متقايسان إذا كانا قابلين للتطابق.

نتيجة:

المثلثان المتقايسان أطوال أضلاعهما متساوية مثنى مثني، وزواياهما متقايسة مثنى مثنى.

مثال:



المثلثان ABC و $A'B'C'$ متقايسان، يمكن تطبيق أحدهما على الآخر بالسّحب والتّدوير أو التّدوير والسّحب، نقول إن تقايسهما مباشر.

المثلثان ABC و $A''B''C''$ متقايسان، لايمكن تطبيق أحدهما على الآخر إلا بعد قلب أحدها، نقول إنهما تقايسهما غير مباشر.

<u>ملاحظة:</u> المثلثين ABC و $A'B'C'$ هما في نفس الاتجاه (عكس عقارب السّاعة)، بينما المثلثين ABC و $A''B''C''$ من اتجاهين متعاكسين.



- **خواص (حالات تقايس مثلثين)**



خاصية (1): يتقايس مثلثان إذا كانت أطوال أضلاعهما متساوية مثنى مثنى.

خاصية (2): يتقايس مثلثان إذا تقايست زاوية والضلعان اللذان يحصرانها من أحد المثلثين مع زاوية والضلعين اللذين يحصرانها من المثلث الآخر.



خاصية (3): يتقايس مثلثان إذا تقايس ضلع والزّاويتان المجاورتان له من أحد المثلثين مع ضلع والزّاويتين المجاورتين له من المثلث الآخر.

نتيجة: يتقايس مثلثان إذا كان أحدهما صورة للمثلث الآخر بانسحاب، أو تناظر محوري أو تناظر مركزي أو دوران.

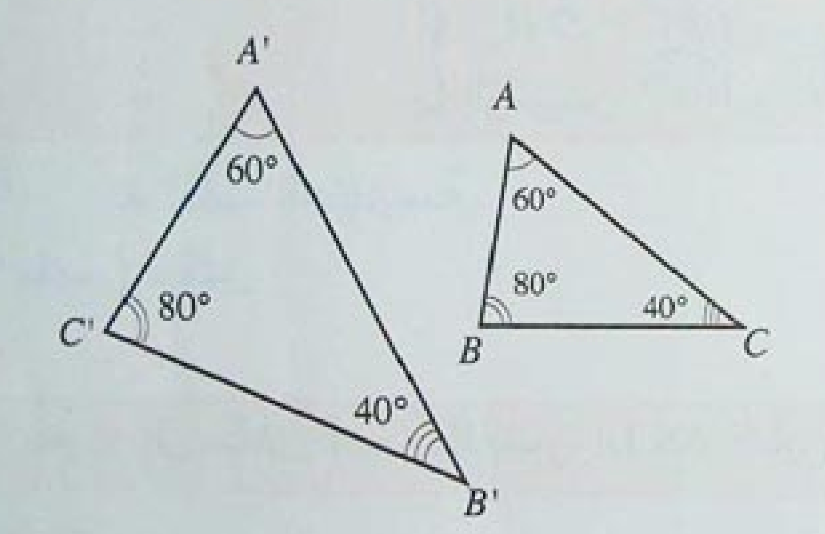
7. المثلثات المتشابهة

- **تشابه مثلثين**

تعريف 4

نقول عن مثلثين إنّهما متشابهان إذا كانت زوايا أحدهما تساوي زوايا الآخر.

مثال:



المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

الرؤوس المتماثلة A B C

A' B' C'

الأضلاع المتماثلة: $[AB]$ و $[A'B']$

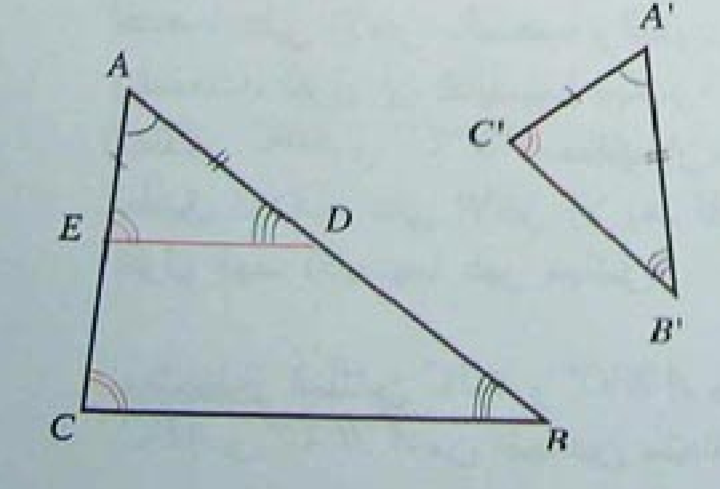
$[AC]$ و $[A'C']$ ، $[BC]$ و $[B'C']$

ملاحظات:

1. يكفي تساوي زاويتين من أحد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر للقول إنّ المثلثين متشابهان، ذلك لأنّ مجموع زوايا المثلث يساوي $180°$.
2. إذا كان أحد مثلثين تصغير (أو تكبير) للآخر فإنّ هذين المثلثين متشابهان.
3. المثلثان المتقايسان هما مثلثان متشابهان، و العكس ليس دائما صحيحا .

مبرهنة 6

المثلثان المتشابهان أضلاعهما المتماثلة متناسبة.



برهان

ليكن ABC و $A'B'C'$ مثلثان متشابهان حيث :

$\widehat{A}=\widehat{A'}$ ، $\widehat{B}=\widehat{B'}$ ، $\widehat{C}=\widehat{C'}$.

ولنبيّن أنّ $\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{A'B'}{AB}$

من أجل ذلك نعلّم نقطة E من $[AC]$ حيث $AE=A'C'$

ونقطة D من $[AB]$ حيث $AD=A'B'$.



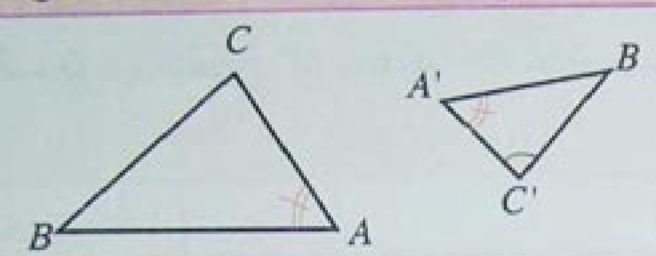
المثلثان ADE و $A'B'C'$ فيهما: $\widehat{B'A'C'}=\widehat{DAE}$ و $AE=A'C'$ و $AD=A'B'$، فهما متقايسان.
ومنه $\widehat{A'C'B'}=\widehat{AED}$ و $C'B'=ED$
لكنّ $\widehat{A'C'B'}=\widehat{ACB}$ وبالتالي فإنّ $\widehat{AED}=\widehat{ACB}$، ومنه نستنتج أنّ $(DE)//(BC)$.

بتطبيق مبرهنة طالس في المثلثين ABC و ADE نجد $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

ومنه $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$

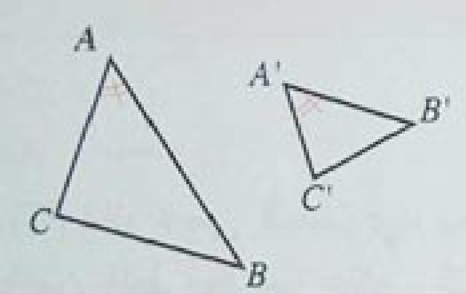
- خواص (حالات تشابه مثلثين)

خاصية (1): **يتشابه مثلثان إذا تقايست زاويتان من أحدالمثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر.**



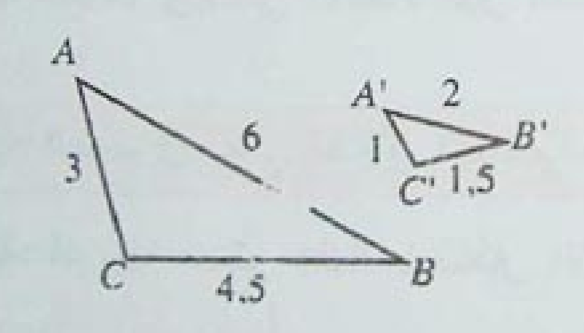
مثال: بما أنّ $\widehat{A}=\widehat{A'}$ و $\widehat{B}=\widehat{B'}$
فإنّ المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

خاصية (2): **يتشابه مثلثان إذا تقايست زاوية من أحد المثلثين مع زاوية من المثلث الآخر، وكان طولا الضلعين الذين يحصران إحدى هاتين الزاويتين متناسبين مع طولي الضلعين الذين يحصران الزّاوية الأخرى.**



مثال: بما أنّ $\widehat{A}=\widehat{A'}$ و $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}$
فإنّ المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

خاصية (3): **يتشابه مثلثان إذا كان أطوال الأضلاع المتماثلة فيهما متناسبة.**



مثال: بما أنّ $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{1}{3}$
فإنّ المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

- نسبة تشابه مثلثين

تعريف 5

ليكن ABC و $A'B'C'$ مثلثين متشابهين، نسمّي **نسبة تشابه** هذين المثلثين العدد الموجب غير المعدوم k حيث: $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$

ملاحظات: لتكن k نسبة تشابه مثلثين ABC و $A'B'C'$ حيث $k=\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$.

1. انّ $\frac{1}{k}$ هي أيضا نسبة تشابه للمثلثين ABC و $A'B'C'$.
2. إذا كان $0<k<1$ فان المثلث $A'B'C'$ هو تصغير للمثلث ABC ، ونسمّي k نسبة (أو معامل) التصغير.
3. إذا كان $k>1$ فان المثلث $A'B'C'$ هو تكبير للمثلث ABC ، ونسمّي k نسبة (أو معامل) التكبير.
4. إذا كان $k=1$ فان المثلث $A'B'C'$ يقايس للمثلث ABC .

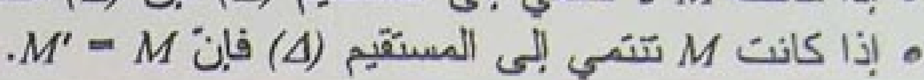
8. التحويلات النقطية

* **التحويلات النقطية ، تعاريف**

1) تعريف 6 (التناظر المحوري)

(Δ) مستقيم ثابت، **التناظر المحوري** بالنسبة إلى المستقيم (Δ) هو التحويل الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' حيث:

- إذا كانت M لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) فإنّ (Δ) محور قطعة المستقيم $[MM']$.



- إذا كانت M تنتمي إلى المستقيم (Δ) فإنّ $M' = M$.



2) تعريف 7 (التناظر المركزي)

O نقطة ثابتة ، **التناظر المركزي** بالنسبة إلى النقطة O هو التحويل الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' حيث: O منتصف قطعة المستقيم $[MM']$.

3) تعريف 8 (الانسحاب)

$\vec{v}$ شعاع ثابت ، **الانسحاب** الذي شعاعه $\vec{v}$ هو التحويل الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' حيث: $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

4) الدوران

أ) توجيه المستوي

لتكن (C) دائرة من المستوي، يمكن أن نحدّد على الدائرة (C) اتجاهين واتجاهين فقط أحدهما عكس اتجاه حركة عقارب السّاعة ويسمّى الاتجاه المباشر (أو الاتجاه الموجب)، والآخر مثل اتجاه حركة عقارب السّاعة ويسمّى الاتجاه غير المباشر (أو الاتجاه السّالب).

تعريف 9

توجيه المستوي يعني اختيار اتجاه واحد عل كلّ دوائر هذا المستوي.

ملاحظة: لتوجيه مستوٍ عادة ما نختار الاتجاه المباشر (عكس اتجاه حركة عقارب السّاعة)

ب) تعريف 10 (الدوران)

O نقطة ثابت من مستوي موجّه ، و α عدد حقيقي حيث $0 \leq \alpha \leq \pi$.
الدّوران في الاتجاه المباشر (في الاتجاه غير المباشر) الذي مركزه النقطة O وزاويته α هو التحويل الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' حيث:

- إذا كانت $M = O$ فإنّ $M' = M = O$
- إذا كانت $M \neq O$ فإنّ $OM = OM'$ و $\widehat{MOM'} = \alpha$

والثلاثية (O, M, M') مباشرة (والثلاثية (O, M, M') غير مباشرة).

* **التحويلات النقطية ، خواص**

1) النقط الصامدة

تعريف 11

نقول عن نقطة إنّها صامدة بتحويل نقطي، إذا كانت منطبقة على صورتها بواسطة هذا التحويل.

أمثلة:

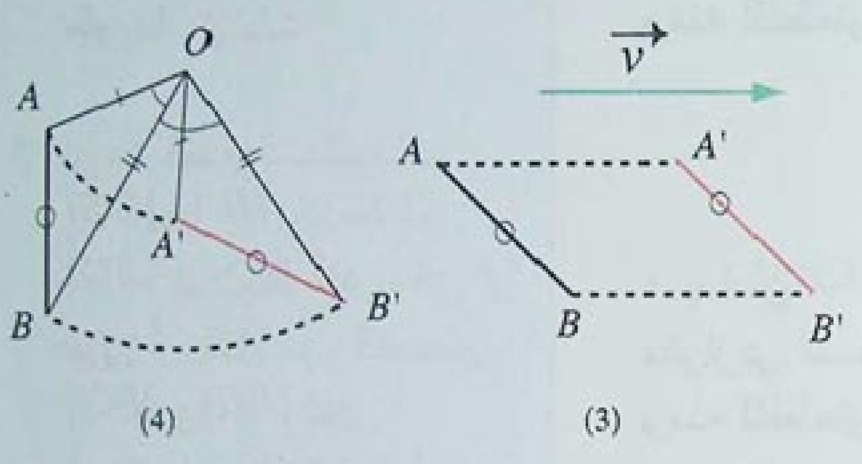
- التّناظر المحوري الذي محوره مستقيم (Δ) يقبل كلّ نقط هذا المستقيم نقطا صامدة.
- التّناظر المركزي الذي مركزه نقطة A يقبل نقطة صامدة وحيدة هي A نفسها.
- الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل نقط صامدة.
- الدّوران الذي مركزه نقطة O وزاويته α (حيث $\alpha \neq 2k\pi$ و k عدد صحيح نسبي) يقبل نقطة صامدة وحيدة هي مركزه O.

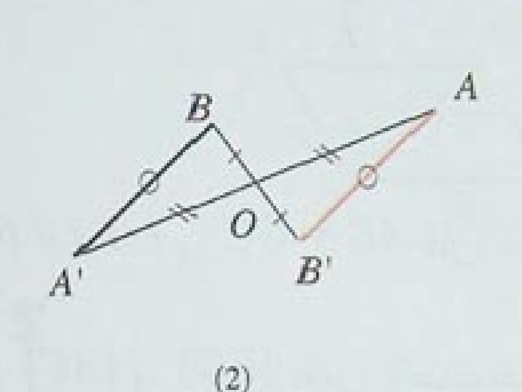
2) حفظ المسافات (التقايس)

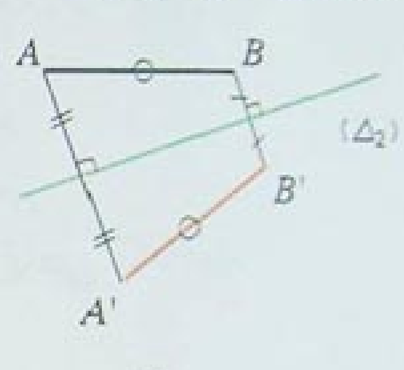
مبرهنة6 وتعريف12

> كلّ من التّناظر المحوري، والتّناظر المركزي، والانسحاب، والدّوران يحافظ على المسافات.
> يسمّى التّحويل الذي يحافظ على المسافات **تقايسا**

مثال: في الأشكال (1)،(2)،(3)،(4) $[A'B']$ صورة $[AB]$ بتناظر محوري، بتناظر مركزي، بانسحاب، بدوران على الترتيب







لدينا في كلّ حالة ممّا سبق $AB = A'B'$

3) حفظ الاستقامية

مبرهنة7

> إذا كانت A ، B ، C ثلاث نقط في استقامية فإنّ صورها A' ، B' ، C' بتقايس تكون في استقامية.

نتيجة:

> صورة مستقيم بتقايس(تناظر محوري، تناظر مركزي، انسحاب، دوران) هو مستقيم.

4) حفظ أقياس الزّوايا

مبرهنة8

> صورة زاوية بتقايس هي زاوية تقايسها.

يمكن إثبات هذه المبرهنة باستعمال تقايس المثلثات، ونستنتج منها:

- إذا كان مستقيمان متوازيين فإنّ صورتيهما بتقايس متوازيان أيضا.
- إذا كان مستقيمان متعامدين فإنّ صورتيهما بتقايس متعامدان أيضا.



طـــرائق وتمـــارين محلولة

• متوازي الأضلاع

استعمال متوازي الأضلاع في البحث عن منتصف قطعة مستقيم

$ABCD$ متوازي أضلاع، E، F، G، H نقط من $[AB]$، $[BC]$، $[CD]$، $[DA]$ على الترتيب، حيث $AE = CG$ و $AH = FC$.

1. بيّن أنّ للقطعتين $[EG]$ و $[FH]$ نفس المنتصف، وعيّنه.
2. استنتج طبيعة الرّباعي $EFGH$.

حلّ

.1

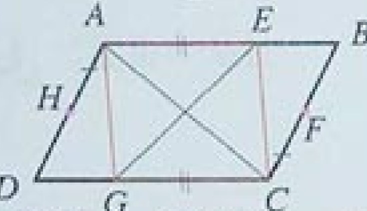
• بما أنّ $(AH) // (FC)$ و $AH = FC$ فإنّ الرّباعي $AFCH$ متوازي أضلاع.

ومنه للقطعتين $[AC]$ و $[HF]$ نفس المنتصف . . . (1)



• بما أنّ $(AE) // (GC)$ و $AE = GC$ فإنّ الرّباعي $AEGC$ متوازي أضلاع.

ومنه للقطعتين $[AC]$ و $[EG]$ نفس المنتصف . . . (2)



من (1) و (2) نجد أنّ للقطعتين $[HF]$ و $[EG]$ نفس المنتصف.
منتصف القطعتين $[HF]$ و $[EG]$ هو منتصف $[AC]$، وبالتالي فهو مركز متوازي الأضلاع $ABCD$.

.2 بما أنّ للقطعتين $[HF]$ و $[EG]$ نفس المنتصف، فإنّ الرّباعي $EFGH$ متوازي أضلاع.

تعاليق

• إن إنجاز شكل مناسب بدقة يساعد على تخمين طريقة الإثبات.

• نرسم قطع المستقيمات $[EG]$، $[HF]$، $[AC]$، $[BD]$ فنلاحظ أنه يمكن أنّ نبيّن أنّ لكلّ من القطعتين $[EG]$ و $[FH]$ نفس المنتصف مع قطعة أخرى مثل $[AC]$ أو $[DB]$.

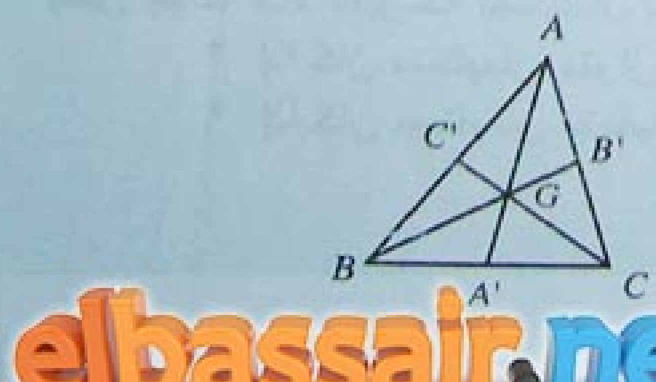
• يكون رباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه ضلعان متقايسان وحاملاهما متوازيين.

طريقة

• لإثبات أنّ قطعتي مستقيم متناصفتان يمكن إثبات أنهما قطران في متوازي أضلاع.
• لإثبات أنّ رباعي هو متوازي أضلاع يمكن إثبات أنّ قطريه متناصفان.

• المثلثات

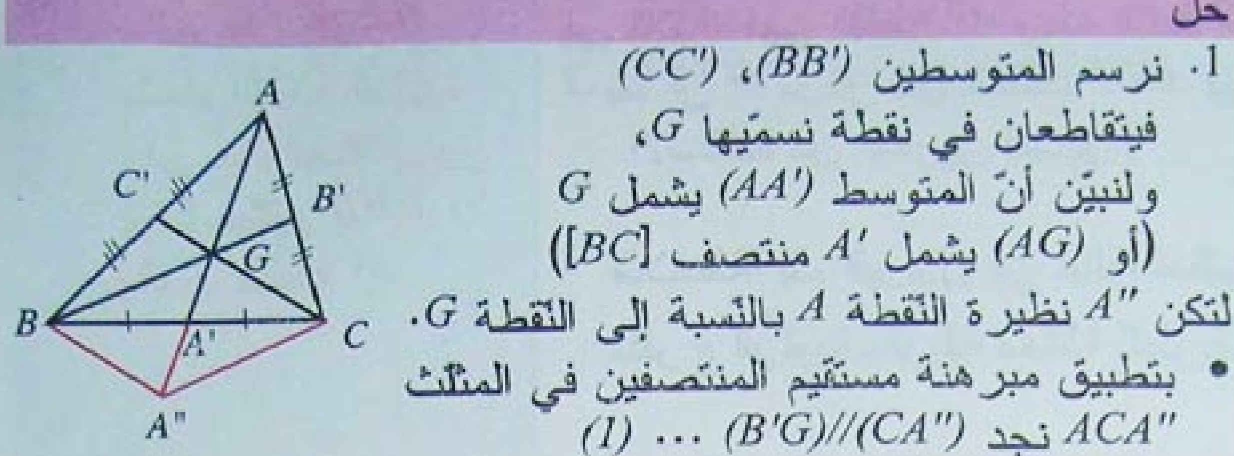
1) استعمال متوازي الأضلاع لإثبات أنّ المتوسطات في مثلث متقاطعة في نقطة واحدة



ABC مثلث كيفي.

1. بيّن أنّ متوسّطاته (AA')، (BB')، (CC') متقاطعة في نقطة واحدة G (تسمّى النقطة G مركز ثقل المثلث ABC).
2. بيّن أنّ $AG = 2GA'$ ، واستنتج أنّ $BG = 2GB'$ و $CG = 2GC'$.

حلّ	تعاليق
1. نرسم المتوسطين (BB')، (CC') فيتقاطعان في نقطة نسمّيها G، ولنبيّن أنّ المتوسط (AA') يشمل G (أو (AG) يشمل A' منتصف $[BC]$) لتكن A'' نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة G.	• إن وجود منتصفات أضلاع مثلث في نص المسألة يساعد على تخمين طريقة للإثبات اعتمادا على مبرهنة مستقيم المنتصفين.
• بتطبيق مبرهنة مستقيم المنتصفين في المثلث ACA'' نجد $(B'G)//(CA'')$ ... (1)	• $[(AA')$ يشمل $G]$ معناه $[(AG)$ يشمل $A']$ ومعناه أيضا $[(A'G)$ يشمل $A]$.
• بتطبيق مبرهنة مستقيم المنتصفين في المثلث ABA'' نجد $(C'G)//(BA'')$ ... (2)	• نستعمل نقطة أخرى من المستقيم (AG) ولتكن A'' نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة G والاستفادة من كون G منتصف $[AA'']$.
من (1) و (2) نجد أنّ $(CG)//(BA'')$ و $(BG)//(CA'')$. ومنه الرّباعي $BGCA''$ متوازي أضلاع، وقطراه $[GA'']$ و $[BC]$ متناصفان. ومنه المستقيم (AG) يشمل A' منتصف $[BC]$. وبالتّالي المتوسّطات (AA')، (BB')،(CC') متقاطعة في نقطة واحدة G	
2. لدينا $AG = GA''$ لأنّ A'' نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة G. و $GA'' = 2\ GA'$ لأنّ الرّباعي $BGCA''$ متوازي أضلاع. ومنه $AG = 2\ GA'$. لدينا $A''C = 2\ GB'$ و $A''C = BG$ ، ومنه $BG = 2\ GB'$. وبنفس الطريقة نجد $CG = 2\ GC'$	



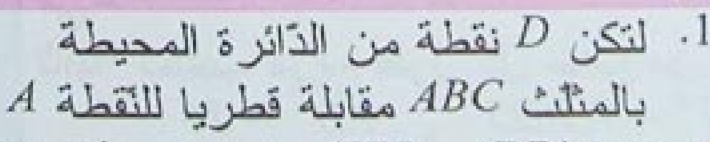
طريقة

• لإثبات أنّ ثلاثة مستقيمات متقاطعة في نقطة واحدة، يمكن أن نثبت أنّ أحدهما يشمل نقطة تقاطع الآخرين.

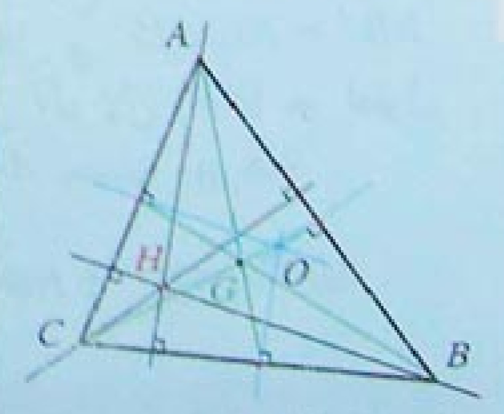
2) مستقيم أولر(*)

ABC مثلث، G نقطة تقاطع متوسطاته، O نقطة تقاطع محاوره، H نقطة تقاطع أعمدته.

3. بيّن أنّ النقط G ، O ، H في استقامية (يسمّى المستقيم (OH) مستقيم أولر)
4. بيّن أنّ $HG = 2\ GO$



حلّ	تعاليق
1. لتكن D نقطة من الدّائرة المحيطة بالمثلث ABC مقابلة قطريا للنقطة A	• الشكل الأولي.
• لدينا (BD) و (CH) متوازيان لأنّ كلا منهما عمودي على (AB).	
• و (CD) و (BH) متوازيان لأنّ كلا منهما عمودي على (AC).	
ومنه الرّباعي $CDBH$ متوازي أضلاع. ومنه نستنتج أنّ النقطة A' (منتصف $[CB]$) هي منتصف $[HD]$.كلّ من (AA') و (HO) متوسط في المثلث AHD ، ومنه مركز ثقل المثلث AHD (نقطة تقاطع متوسّطاته) تقسم كلاّ من $[HO]$، $[AA']$ بنسبة إثنين	• نبيّن أنّ المستقيم المعين بنقطتين من



(*) أولر (ليونارد) عالم سويسري (1707-1783) اشتهر في العلوم الفيزيائية والفلك وترك عدة قوانين وخواص في الرياضيات تحمل اسمه.

النقط G ، O ، H يشمل النقطة الثالثة، وفي هذه الحالة سنبيّن أنّ المستقيم (HO) يشمل النقطة G.

إلى ثلاثة، فهي النقطة G. ومنه النقط G ، O ، H في استقامية.

2. بما أنّ G مركز ثقل المثلث AHD فإنّ $HG = 2\,GO$ (يمكن الاستفادة من التّمرين السّابق) .

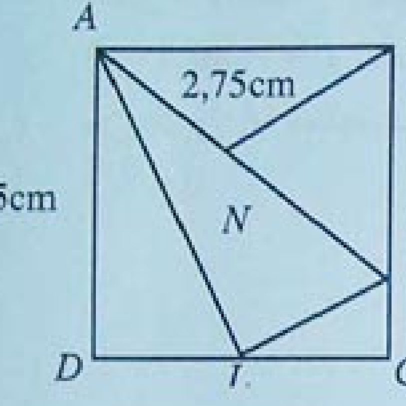
- ملاحظة: يتم البرهان في حالة المثلث ABC منفرج الزّاوية بطريقة مماثلة للطريقة السّابقة .

طريقة

- لإثبات أنّ ثلاث نقط في استقامية، يمكن أنّ نثبت أنّ المستقيم المعيّن بنقطتين منها يشمل النقطة الثالثة.
- لإثبات أنّ ثلاث نقط في استقامية، يمكن أنّ نثبت أنّها تنتمي إلى نفس المستقيم.

• مبرهنة فيثاغورس – النّسب المثلّثية

1) استعمال مبرهنة فيثاغورس أوعكسها للتاكّد من أنّ مثلثا قائم أو غير قائم



مربّع $ABCD$ طول ضلعه $5\ cm$ ، L منتصف $[DC]$ و M نقطة من $[BC]$ و N نقطة من $[AM]$ حيث $CM=1,25\ cm$، $AN = 2,75\ cm$، $BN=3,25\ cm$.

أي المثلثين ALM ، ANB هو مثلث قائم ؟

حلّ

أولا: حساب مربّع طول كلّ ضلع من أضلاع المثلث ALM بتطبيق مبرهنة فيثاغورس

- في المثلث ABM :

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 = 5^2 + (3,75)^2 = 39,0625$$

- في المثلث ADL : $AL^2 = AD^2 + DL^2 = 5^2 + (2,5)^2 = 31,25$
- في المثلث LCM :

$$LM^2 = LC^2 + CM^2 = (2,5)^2 + (1,25)^2 = 7,8125$$

نلاحظ أنّ : $AM^2 = AL^2 + LM^2$

وحسب المبرهنة العكسية لمبرهنة فيثاغورس فإنّ المثلث ALM قائم في L

ثانيا: نحسب مربّع طول كلّ ضلع من أضلاع المثلث ANB فنجد:

$AB^2 = 25$ و $AN^2 = 7,5625$ و $NB^2 = 10,5625$

لو كان المثلث ANB قائما، لكان قائما في N، لأنّ $[AB]$ هو أطول ضلع فيه، ولكان $AB^2 = AN^2 + NB^2$ حسب مبرهنة فيثاغورس.

لكن $AN^2 + NB^2 = 18,125$ ومنه $AB^2 \neq AN^2 + NB^2$.

ومنه المثلث ANB ليس قائما.

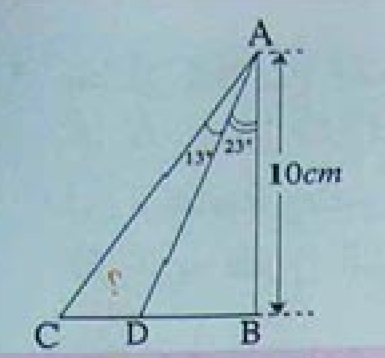
تعاليق

- نلاحظ أنّه يمكن تطبيق مبرهنة فيثاغورس لحساب مربّع طول كلّ ضلع من أضلاع المثلث ALM.
- لا داعي لحساب أطوال الأضلاع، إذ يمكن الاكتفاء بمربّعاتها.

طريقة

- لإثبات أن مثلثا قائم (أو غير قائم)، يمكن حساب مربّع طول كلّ ضلع من أضلاعه، ثمّ تطبيق مبرهنة فيثاغورس أو عكسها.

2) استعمال النسب المثلثية في مثلث قائم لحساب أطوال



يمثّل الشكل مثلثا ABC قائما في B، و D نقطة من $[BC]$ حيث $\widehat{BAD} = 23°$ ، $AB=10\ cm$ ، $\widehat{DAC} = 13°$.
احسب CD (تعطى القيمة مدوّرة إلى الوحدة).

حلّ	تعاليق
لدينا $CD = CB - DB$ ومنه نبدأ بحساب CB و DB. • في المثلث القائم ABC : $\tan \widehat{BAC} = \frac{CB}{AB}$ ، ومنه $\tan 36° = \frac{BC}{10}$ $CB = 10\tan 36°$ • في المثلث القائم ABD : $\tan 23° = \frac{DB}{AB} = \frac{DB}{10}$ ، ومنه $DC = 10\tan 23°$ ومنه $CD = 10\tan 36° - 10\tan 23° = 10(\tan 36° - \tan 23°)$ وتظهر الآلة الحاسبة الناتج الآتي: $10(\tan 36° - \tan 23°) = 3{,}020677118$ وبالتدوير إلى الوحدة نجد $CD \approx 3\ cm$	• يمكن حساب أطوال أضلاع كلّ من المثلثين القائمين ABC و ABD باستعمال النسب المثلثية.

طريقة

• لحساب أطوال باستعمال النسب المثلثية نبدأ بتحديد المثلث القائم الذى سنطبق عليه النسبة (أو النسب) المثلثية المناسبة.

• **مبرهنة طالس**

$[OX)$ و $[OY)$ نصفا مستقيمين متقاطعين في النقطة O، النقطتان L ، M من $[OX)$ والنقطتان B ، C من $[OY)$ حيث $OL=3\ cm$ ، $LM=1{,}6\ cm$ ، $OC=6{,}5cm$ و $(LB)//(MC)$.

1. احسب الطول BC (تعطى القيمة مدوّرة إلى $0{,}01$)
2. A نقطة من $[OB]$ و N نقطة من $[MX)$ حيث: $(MA)//(NB)$.
هل المستقيمان (LA) و (NC) متوازيان ؟ برّر جوابك.

حلّ	تعاليق
1. بما أنّ L من (OM) و B من (OC) و $(LB)//(MC)$ فإنّ $\frac{OL}{OM} = \frac{OB}{OC} = \frac{LB}{MC}$ (حسب مبرهنة طالس) <u>نحسب OB</u> لدينا: $4{,}6 \times OB = 3 \times 6{,}5 \Leftrightarrow \frac{3}{4{,}6} = \frac{OB}{6{,}5}$ ومنه $OB \approx 4{,}24$ ومنه $BC = OC - OB = 6{,}5 - 4{,}24 = 2{,}26\ cm$ 2. بما أنّ L من (OM) و B من (OC) و $(LB)//(MC)$ فإنّ $\frac{OL}{OM} = \frac{OB}{OC} = \frac{LB}{MC}$ ... (1) بما أنّ N من (OM) و B من (OA)	• نطبق مبرهنة طالس مباشرة ونبدأ بحساب الطول OB. • أضلاع المثلثين OLB و OMC متناسبة

- بما أنّ كلا من النقط O، L، N والنقط O، A، C في استقامية وبنفس الترتيب، نقارن النسبتين $\frac{OL}{ON}$ و $\frac{OA}{OC}$.

و $(NB)//(MA)$

فإنّ $\frac{OM}{ON} = \frac{OA}{OB} = \frac{MA}{NB}$ ... (2)

من (1) و (2) نجد $OM \times OB = OL \times OC = ON \times OA$

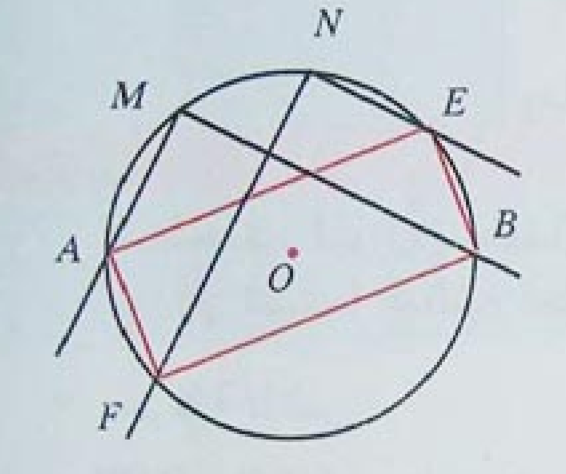
ومنه $\frac{OL}{ON} = \frac{OA}{OC}$

وبما أنّ كلا من النقط O، L، N والنقط O، A، C في استقامية وبنفس الترتيب، فإنّ $(LA) // (NC)$ (حسب المبرهنة العكسية لمبرهنة طالس).

طريقة

- لتطبيق مبرهنة طالس نبدأ أولاً بتحديد عناصر الشكل التي تسمح بكتابة التناسب، ثمّ الاستفادة من هذا التناسب حسب الحاجة.
- لتطبيق عكس مبرهنة طالس نبحث عن نسبتين متساويتين، تمكّننا من استنتاج توازي مستقيمين.

• الزّوايا والدّائرة



في الشّكل المقابل (C) دائرة مركزها O منتصف $[AB]$، M و N نقطتان متمايزتان من (C)، المستقيم الذي يشمل النّقطة N ويوازي (MA) يقطع (C) في النّقطة F، والمستقيم الذي يشمل النّقطة N ويوازي (MB) يقطع (C) في النّقطة E.

1. ما نوع الرّباعي $AEBF$ ؟
2. بيّن أنّ $MN = AF$.

تعاليق

- لدراسة طبيعة الرّباعي $AEBF$ يمكن البحث عن الخواص المتعلقة بقطريه $[AB]$ و $[FE]$.

حلّ

1. بما أنّ الزّاوية $\widehat{AMB}$ قائمة (لأنّ $[AB]$ قطر في الدّائرة (C)) و $(MA)//(NF)$ و $(MB)//(NE)$

فإنّ الزّاوية $\widehat{ENF}$ قائمة.

ومنه $[EF]$ قطر في الدّائرة (C) نستنتج أنّ $[AB]$ و $[EF]$ متناصفان ومتقايسان ومنه الرّباعي $AEBF$ مستطيل.

- لإثبات أنّ $MN = AF$ يكفي أن نثبت أنّ $\widehat{MN} = \widehat{AF}$.

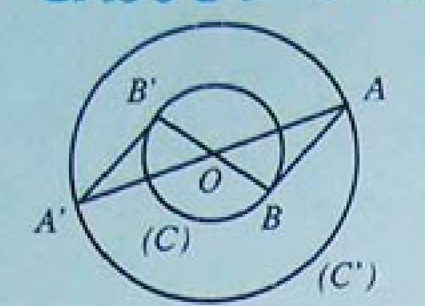
2. لدينا $(MA)//(NF)$ و (MF) قاطع لهما ومنه فإنّ $\widehat{AMF} = \widehat{MFN}$ بالتّبادل الداخلي، وبما أنّ كلا منهما زاوية محيطية فإنّ القوسين اللتين تحصرانهما متقايستان. أي $\widehat{MN} = \widehat{AF}$ ومنه $MN = AF$

طرائق

- لدراسة طبيعة رباعي يمكن البدء بدراسة فيما إذا كان قطراه متناصفين أو متعامدين أو متقايسين أو ... .
- لإثبات أنّ قطعة مستقيم هي قطر في دائرة يكفي أنّ نثبت أنها وتر في مثلث قائم رؤوسه من هذه الدائرة.
- لإثبات أنّ وترين في دائرة متقايسان يكفي أن نثبت أنّ القوسين اللتين تحصرانهما متقايستان.

المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة

1) استعمال المثلثات المتقايسة لإثبات تقايس قطعتي مستقيم (تساوي طولين) أو تقايس زاويتين



(C) و (C') دائرتان لهما نفس المركز O، $[BB']$ قطر في (C) و $[AA']$ قطر في (C') .

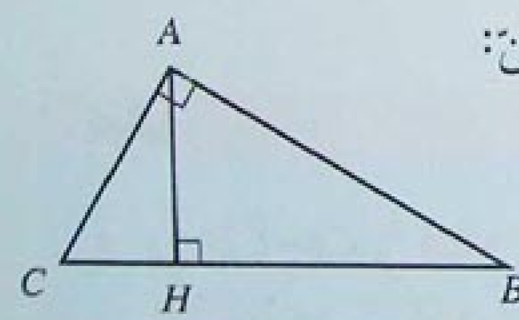
1. بيّن أنّ $AB = A'B'$.
2. بيّن أنّ $\widehat{OAB} = \widehat{OA'B'}$

تعاليق	حلّ
• يمكن ملاحظة أنّ المثلثين AOB و $A'OB'$ متناظران بالنسبة إلى النقطة O، ومنه استنتاج تقايسهما. • كتابة الرؤوس المتماثلة في مثلثين متقايسين يساعد على استنتاج العناصر المتقايسة.	لدينا $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ بالتقابل بالرّأس و $OB = OB'$ (B و B' من الدّائرة نفسها) و $OA = OA'$ (A و A' من الدّائرة نفسها) ومنه فإنّ المثلثين OAB و $OA'B'$ متقايسان. نكتب الرؤوس المتماثلة: $O \quad A \quad B$ / $O \quad A' \quad B'$ نستنتج أنّ 1. $AB = A'B'$. 2. $\widehat{OAB} = \widehat{OA'B'}$

طرائق

- لإثبات تقايس قطعتي مستقيم (تساوي طولين)، يمكن إثبات أنهما ضلعان متماثلان في مثلثين متقايسين.
- لإثبات تقايس زاويتين، يمكن إثبات أنهما زاويتان متماثلتان في مثلثين متقايسين.

2) استعمال المثلثات المتشابهة لإثبات العلاقات المترية في المثلث القائم و إثبات مبرهنة فيثاغورس



ABC مثلث قائم في A و (AH) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$. بيّن أنّ:

أ) $AB \times AC = AH \times BC$

ب) $AB^2 = BH \times BC$ ، $AC^2 = CH \times CB$

جـ) $AH^2 = HC \times HB$

د) استنتج برهانا لمبرهنة فيثاغورس $AB^2 + AC^2 = BC^2$

تعاليق	حلّ
• يكفي لتشابه مثلثين قائمين أن تتقايس زاوية حادة من أحدهما مع زاوية من الآخر.	• لدينا في المثلثين القائمين ACH و ABC الزّاوية $\widehat{ACH}$ مشتركة، ومنه المثلثان ACH و ABC مشتابهان. الرؤوس المتماثلة: $A \quad B \quad C$ / $H \quad A \quad C$ ومنه $\frac{AB}{HA} = \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC}$ أ) من النسبة الأولى و الثالثة نجد $AB \times AC = HA \times BC$ وتكتب $AB \times AC = AH \times BC$ ب) من النسبة الثانية و الثالثة نجد $AC \times AC = HC \times BC$ وتكتب $AC^2 = CH \times CB$ بنفس الطريقة السابقة نستنتج من تشابه المثلثين ABH و ABC أنّ $AB^2 = BH \times BC$.



ج) لدينا $\widehat{CAH}=\widehat{ABH}$ (لأنّ $\widehat{CAH}+\widehat{HAB}=\widehat{ABH}+\widehat{HAB}=90°$)

وبالتالي فالمثلثان AHB و CHA متشابهان

ومنه $\frac{AH}{CH}=\frac{AB}{CA}=\frac{HB}{HA}$ ، الرؤوس المتماثلة: $\begin{matrix} A & H & B \\ C & H & A \end{matrix}$

من النّسبة الأولى والثالثة نستنتج $AH\times HA = CH\times HB$

وتكتب $AH^2 = HC \times HB$

د) من الجزء (ب) نجد $AB^2 + AC^2 = (BH\times BC) + (CH\times CB)$
$= BC\times(BH+HC) = BC^2$

طريقة

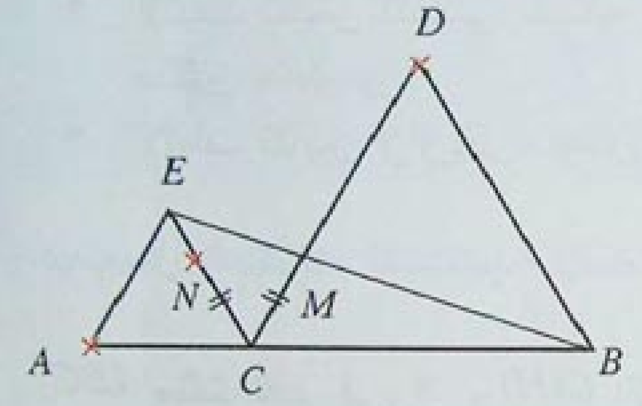
- لكتابة التناسب بين أطوال الأضلاع المتماثلة لمثلثين متشابهين يستحسن البدء بكتابة الرؤوس المتماثلة تحت بعضها البعض .
- لإثبات صحة مساواة تحتوى على جداء أطوال يمكن استعمال التناسب الناتج عن تشابه مثلثين حيث الأطوال الواردة في المطلوب هي بعض أطوال أضلاعهما.

• التّحويلات النقطية

استعمال الدّوران لإثبات أنّ نقطا في استقامية

$[AB]$ قطعة مستقيم، C نقطة منها، كلّ من المثلثين ACE و BDC متقايس الأضلاع. قطعة المستقيم $[EB]$ تقطع $[CD]$ في النّقطة M ، N نقطة من $[CE]$ حيث $CN = CM$.

بيّن أنّ النقط A ، N ، D في استقامية.



حلّ

- لدينا $\widehat{ACE} = \widehat{DCB} = 60°$ ومنه $\widehat{ECD} = 60°$
- نعتبر الدّوران الذي مركزه النّقطة C وزاويته $60°$ في الاتجاه المباشر، إنّه يحوّل: النّقطة B إلى النّقطة D والنّقطة M إلى النّقطة N والنّقطة E إلى النّقطة A

وبما أنّ النقط B ، M ، E في استقامية فإنّ النقط A ، N ، D في استقامية أيضا.

تعاليق

- إن $CB=CD$ و $CE=CA$ لأنّ كلا من المثلثين ACE و BDC متقايس الأضلاع.

طريقة

- لإثبات أنّ نقطا هي في استقامية يمكن إثبات أنها صور نقط في استقامية بتقايس.

تعلّم البرهنة

نعالج في هذه الفقرة مسألتين بهدف تعلم الاستدلال بواسطة التّحليل والتّركيب في الإنشاءات الهندسية والبحث عن مجموعات النقط.

المسألة الأولى:

$\widehat{XOY}$ زاوية و I نقطة داخلها لا تنتمي إلى أحد ضلعيها.
علّم نقطة M من $[OX)$ و N من $[OY)$ بحيث تكون النقطة I منتصف $[MN]$.



حلّ

• مرحلة التّحليل:

نمثّل في هذه المرحلة الشّكل المطلوب إنشاؤه برسم مناسب، لتحليل ودراسة بعض خواص عناصره والتّي يمكن أنّ نستخلص منها قواعد للإنشاء.

بما انّ النّقطة I منتصف $[MN]$ فإنّ النّقطتين M و N متناظرتان بالنّسبة إلى النّقطة I.

ومنه صورة النّقطة N بالتّناظر بالنّسبة إلى النّقطة I هي النّقطة M.

وبما أنّ النّقطة N تنتمي إلى نصف المستقيم $[OY)$ فإنّ النّقطة M تنتمي إلى $[O'Y')$ صورة $[OY)$ بالتّناظر بالنّسبة إلى النّقطة I.

ومنه فالنّقطة M هي تقاطع $[OX)$ و $[O'Y')$.



• مرحلة التّركيب:

ننشئ $[O'Y')$ نظير $[OY)$ بالنّسبة إلى النّقطة I
(وذلك بتعيين O' نظيرة O بالنّسبة إلى I ، و A' نظيرة نقطة A من $[OY)$ بالنّسبة إلى I)

يتقاطع $[OX)$ و $[O'Y')$ في نقطة M لأنّ $(OY)//(O'Y')$ نرسم (MI) فيتقاطع مع $[OY)$ في نقطة N

ومنه النّقطتان M و N تحققان المطلوب.

ملاحظة: نتحصّل على نفس الحل برسم صورة $[OX)$ بالتّناظر بالنّسبة إلى النّقطة I.

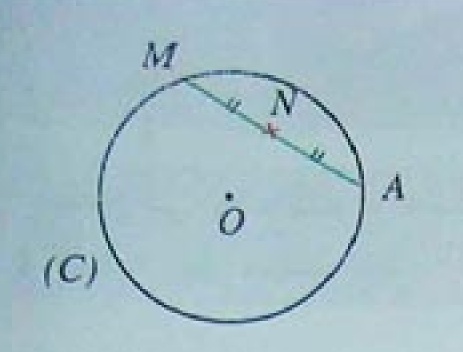
خلاصة:

لإنشاء نقطة (أو مجموعة نقط) تحقق شروط معيّنة، يمكن إتّباع المراحل الآتية:
مرحلة التحليل: وفيها نفرض فيها أنّ للمسألة حلا، ونرسم شكلا مناسبا عادة ما يتم رسمه بالعكس (أي بدء بتمثيل المطلوب)، ثمّ ندرس الخواص والارتباطات بين عناصر الشّكل واستخلاص القواعد التّي تمكن من إنجاز الشّكل المطلوب بدقة.
مرحلة التّركيب: ويتم فيها إنجاز الشّكل المطلوب باستعمال القواعد والخواص المتحصل عليها في مرحلة التحليل، والتأكد من أنّ النقطة (أو مجموعة النقط) المنجزة تحقق المطلوب، وكذا عدد الحلول الممكنة.

إعادة استثمار

رسم أحمد زاوية $\widehat{XOY}$ فوقع رأسها خارج حيّز الورقة ، وعلم نقطة M كما هو مبيّن في الشكل. بيّن كيف سينشئ المستقيم الذي يشمل النقطتين M ، O باستعمال حيّز الورقة فقط أي دون تعليم النقطة O.

المسألة الثانية:



(C) دائرة مركزها O، و A نقطة ثابتة من (C)، و M نقطة متغيّرة من (C) . نرمز بـ N لمنتصف $[AM]$.

ما هي مجموعة النقطة N عندما تمسح النقطة M كلّ نقط الدّائرة (C).

نرسم عدّة نقط ونستغلها لتخمين النتيجة، والتي هي في هذه الحالة دائرة قطرها $[AO]$

حلّ

نرمز بـ (E) لمجموعة النقطة N المطلوبة، ولتكن (C') الدّائرة التّي قطرها $[AO]$. ولنبيّن أنّ $(E) = (C')$.

إنّ المجموعة (E) ليست خالية، لأنّها على الأقل تشمل النقطتين A و O:

1. إذا كانت النقطة M منطبقة على النقطة A فإنّ N هي النقطة A نفسها.
2. إذا كانت النقطة M مقابلة قطريا للنقطة A فإنّ النقطة N هي النقطة O.

1. لنبين أنّ كلّ نقطة من (E) تنتمي إلى (C') (أي (E) محتواة في (C')).

لتكن M نقطة ما من (C) مختلفة عن A وغير مقابلة قطريا لها، و N منتصف $[AM]$.

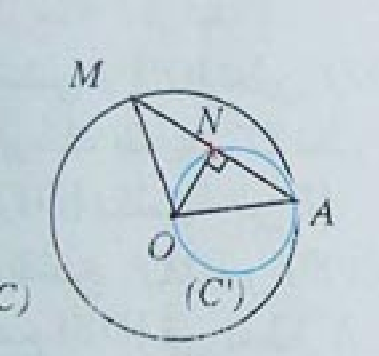
إنّ المثلث AOM متساوي السّاقين $(OA = OM)$، و (ON) متوسط متعلق بالضلع $[AM]$ ، ومنه فإنّ $(ON) \perp (AM)$

نستنتج أنّ المثلث ANO قائم في N ومنه فإنّ النقطة N تنتمي إلى الدّائرة التّي قطرها $[AO]$.

أي النقطة N تنتمي إلى الدّائرة (C').

2. لنبين أنّ كلّ نقطة من (C') تنتمي إلى (E) (أي (C') محتواة في (E)).

لتكن N نقطة ما من (C') مختلفة عن A وعن O، و M تقاطع $(AN]$ و (C).



إنّ $\widehat{ONA} = 90°$ ومنه فإنّ (ON) ارتفاع في المثلث AOM

وبما أنّ المثلث AOM متساوي السّاقين فإنّ (AN) متوسط

ومنه N منتصف $[AM]$

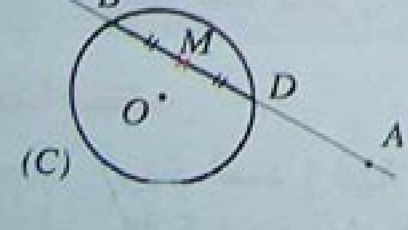
نستنتج ممّا سبق أنّ مجموعة النقط N منتصف $[AM]$ عندما تمسح النقطة M الدّائرة (C) هي الدّائرة (C') التي قطرها $[OA]$.

خلاصة

للبحث عن مجموعة نقط تحقق شروطامعيّنة، يمكن إتّباع المراحل الآتية:

1. **تخمين النتيجة:** ننجز شكلا فيه النقطة المتحركة في عدّة وضعيات، ونستغله للتّخمين حول ما قد تكون المجموعة المطلوبة: مستقيم، أو جزء من مستقيم، أو دائرة،... إلخ. (نشير إلى أنّ برامج الإعلام الآلي الخاصة بالهندسة المتحركة تساعد على التّخمين في هذا المجال)
2. **إثبات التخمين:** نبين تساوي المجموعة التّي وجدناها أثناء التّخمين مع المجموعة المطلوبة.

إعادة استثمار



(C) دائرة مركزها O ، و B نقطة منها و A نقطة ثابتة خارجها. المستقيم (AB) يقطع الدّائرة (C) في النقطة D.

ما هي مجموعة النقط M منتصف $[BD]$ عندما تمسح النقطة B الدّائرة (C)

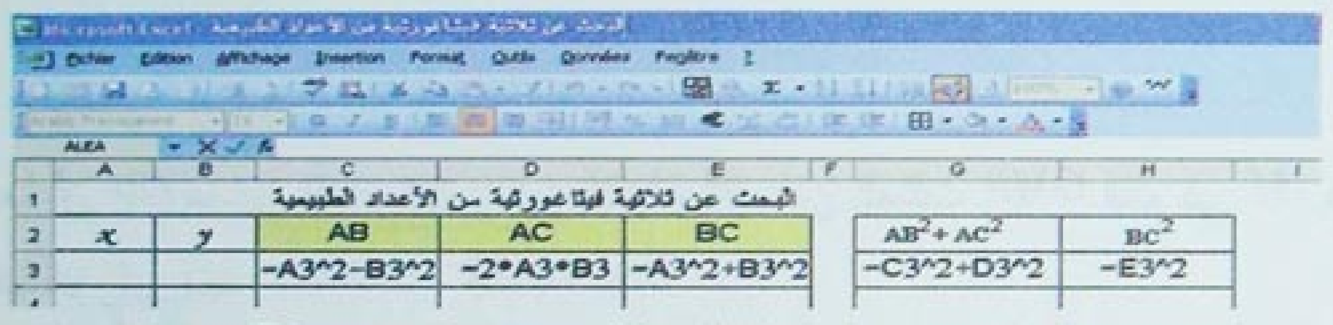
تمهيد: تسمّى ثلاثية الأعداد الطبيعية $(3\,;\,4\,;\,5)$ ثلاثية فيثاغورسية من الأعداد الطبيعية لأنّ الأعداد 3 ، 4 ، 5 تصلح لأنّ تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزّاوية.

الهدف من هذا النّشاط هو البحث عن ثلاثيات فيثاغورسية من الأعداد الطبيعية باستعمال برنامج EXCEL.

1. x و y عددان طبيعيان حيث $x > y$. بيّن أن ثلاثية الأعداد $(x^2 - y^2\,;\,2xy\,;\,x^2 + y^2)$ هي ثلاثية فيثاغورسية، أي تصلح لأن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزّاوية.

2. نعتبر الآن مثلثا ABC قائما في A ، حيث: $AB = x^2 - y^2$ و $AC = 2xy$ مع $x > y$ ، فيكون $BC = x^2 + y^2$، ولنبحث عن AB ، AC ، BC باستعمال برنامج إكسال ، من أجل ذلك:

- افتح برنامج إكسال
- أكتب في السطر الأول اسم المشروع:"البحث عن ثلاثية فيثاغورسية من الأعداد الطبيعية"
- سمّ الأعمدة في السطر الثاني كما هو موضّح في الشكل.
- أدخل في الخلية $C3$ الدّستور $= A3\^2 - B3\^2$ ثمّ أضغط على اللمس: ↵ سيظهر عندئذ العدد 0 في الخلية $C3$.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1			البحث عن ثلاثية فيثاغورثية من الأعداد الطبيعية					
2	x	y	AB	AC	BC		AB²+ AC²	BC²
3			=A3^2-B3^2	=2*A3*B3	=A3^2+B3^2		=C3^2+D3^2	=E3^2

- كرّر العملية السابقة في الخلية $D3$ والدّستور $=2*A3*B3$ ، وفي الخلية $E3$ الدّستور $= A3\^2 + B3\^2$ ، وفي الخلية $G3$ الدّستور $= C3\^2 + D3\^2$ ، وفي الخلية $H3$ الدّستور $= E3\^2$. تحصل على جدول كما في الشّكل.

	A	B	C	D	E	F	G
1			البحث عن ثلاثية فيثاغورثية من الأعداد الطبيعية				
2	x	y	AB	AC	BC		AB²+ AC²
3			0	0	0		0
4							

- أكتب العدد 2 في الخلية $A3$ والعدد 1 في الخلية $B3$ ولاحظ النتائج.
- غيّر القيم المرفقة للعددين x و y ولاحظ النتائج.
- يمكنك استعمال أسطر أخرى بنقل العبارات المدخلة في السّطر الثّالث.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			البحث عن ثلاثية فيثاغورثية من الأعداد الطبيعية					
2	x	y	AB	AC	BC		AB²+ AC²	BC²
3	2	1	3	4	5		25	25
4	3	1	8	6	10		100	100
5	3	2	5	12	13		169	169
6	4	1	15	8	17		289	289
7	4	2	12	16	20		400	400
8	4	3	7	24	25		625	625
9	5	1	24	10	26		676	676

حـــلّ مسألة إدماجيـــة

نص المسألة

(C) و (C') دائرتان مركزاهما O و O' ونصفا قطريهما $6cm$ و $2cm$ على التّرتيب، ومتماستان خارجيا في النّقطة A. (Δ) مماس مشترك لهما خارجيا في النّقطتين M و N على التّرتيب. المماس المشترك لهما في النّقطة A يقطع (Δ) في النّقطة B.

1. بيّن أنّ $BA = BM = BN$ واستنتج نوع المثلّث AMN.
2. ما نوع المثلّث BOO' ؟ برّر جوابك.
3. أحسب MN (تعطى القيمة مدوّرة إلى $0,01$)
4. أحسب قيس الزّاوية $\widehat{BOO'}$، واستنتج الأقياس $\widehat{BO'O}$، $\widehat{MNA}$ ، $\widehat{AMN}$.
5. نسمّي E نقطة تقاطع (OB) ، (AM) و F نقطة تقاطع $(O'B)$ ، (AN). ما نوع الرّباعي $AFBE$ ؟ احسب مساحته (تعطى القيمة مدوّرة إلى $0,01$)
6. بيّن أنّ $(MO)//(NO')$.

حلّ

.1

- بما أنّ (Δ) مماس للدائرة (C) في النّقطة M، فإنّ المثلّث OMB قائم في M. فحسب مبرهنة فيثاغورس نجد $BM = \sqrt{OB^2 - OM^2}$

بما أنّ (AB) مماس للدائرة (C) في النّقطة A، فإنّ المثلّث OAB قائم في A. فحسب مبرهنة فيثاغورس نجد $BA = \sqrt{OB^2 - OA^2}$

ولدينا $OM = OA$ (من الدّائرة (C)) ومنه $OB^2 - OM^2 = OB^2 - OA^2$

وبالتّالي $BM = BA \; \ldots \; (1)$

وبنفس الطّريقة السابقة نبيّن أنّ $BN = BA \; \ldots \; (2)$

من (1) و (2) نجد $BA = BM = BN$

- نستنتج أنّ النّقط A و M و N تنتمي إلى الدّائرة الّتي مركزها النّقطة B منتصف $[MN]$، ومنه المثلّث AMN قائم في A.

.2 المثلّث BOO' قائم في B لأنّ:

لدينا (BO') محور $[AN]$ (كل من النّقطتين B و O' متساوية المسافة عن طرفيها)

و (BO) محور $[AM]$ (كل من النّقطتين B و O متساوية المسافة عن طرفيها)

وبما أنّ $(AM) \perp (AN)$ فإنّ $(BO) \perp (BO')$.

.3 المثلّث BOO' قائم في B، و $(BA) \perp (OO')$ ومنه

$$BA^2 = AO \times AO' = 6 \times 2 = 12$$

ومنه $BA = 2\sqrt{3}\ cm$

وبما أنّ $MN = 2\,BA$ نجد $MN = 2\left(2\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3} \approx 6,93\ cm$

.4 في المثلّث ABO القائم في A لدينا $OA = 6\ cm$ و $BA = 2\sqrt{3}\ cm$ وبالتّالي

$\tan \widehat{BOA} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ومنه $\widehat{BOA} = 30°$

نستنتج أنّ: $\widehat{BO'O} = 60°$ (لأنّ المثلث BOO' قائم في B)

و $\widehat{AMN} = 30°$ (لأنّ $\widehat{MOA}$ مركزية و $\widehat{AMN}$ محيطية وتحصران نفس القوس $\widehat{AM}$)

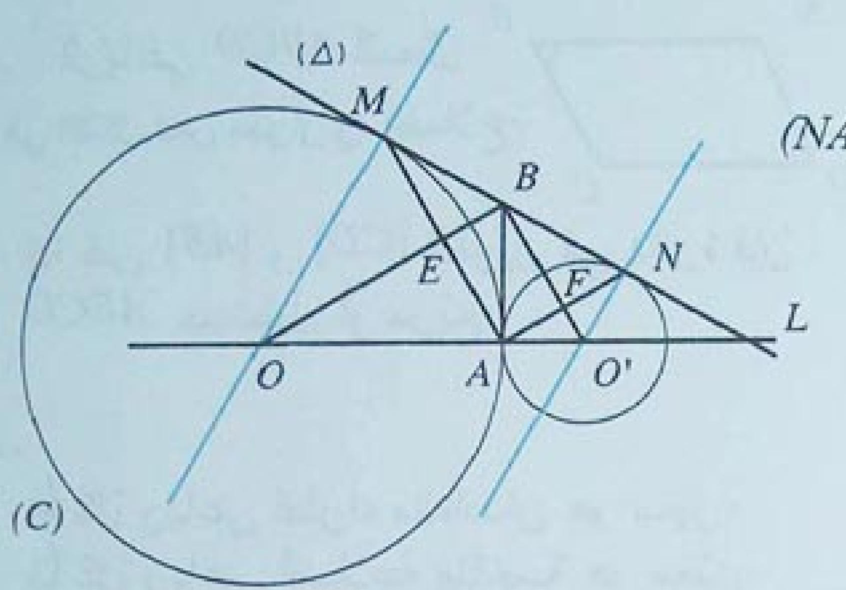
و $\widehat{MNA} = 60°$ (لأنّ المثلث MNA قائم في A)

5. لدينا ممّا سبق: $(AM)\perp(AN)$ و $(FA)\perp(FB)$ و $(EA)\perp(EB)$ ومنه الرّباعي $AFBE$ مستطيل.

و $EA = \frac{1}{2}MA = \frac{1}{2}OA = 3cm$ ، و $FA = \frac{1}{2}NA = \frac{1}{2}BA = \sqrt{3}\ cm$

ومنه مساحة $AFBE$ تساوي : $A = 3\sqrt{3} \approx 5,20\ cm^2$.

6. لتكن L نقطة تقاطع (Δ) و (OO') .



- بما أنّ N من (LB) و A من (LO) و $(NA)//(BO)$

فإنّ $\frac{LN}{LB} = \frac{LA}{LO} = \frac{NA}{BO}$ ... (1)

- بما أنّ B من (LM) و O' من (LA) و $(BO')//(MA)$

فإنّ $\frac{LB}{LM} = \frac{LO'}{LA} = \frac{BO'}{MA}$ ... (2)

من (1) و (2) نجد $LB \times LA = LN \times LO = LM \times LO'$

ومنه $\frac{LN}{LM} = \frac{LO'}{LO}$

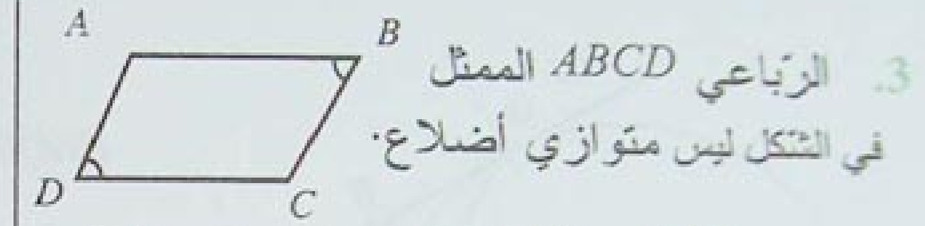
وبما أنّ كلا من النقط L، N، M والنقط L، O'، O في استقامية وبنفس الترتيب، فإنّ $(MO) // (NO')$ (حسب المبرهنة العكسية لمبرهنة طالس).

اصحيح أم خاطئ؟

1. إذا كان في رباعي ضلعان متقابلان متقايسين وحاملا الضلعين الآخرين متوازيين فإنّ الرّباعي متوازي أضلاع.

2. كلّ رباعي يقبل مركز تناظر هو متوازي أضلاع.

3. الرّباعي $ABCD$ الممثل في الشكل ليس متوازي أضلاع.

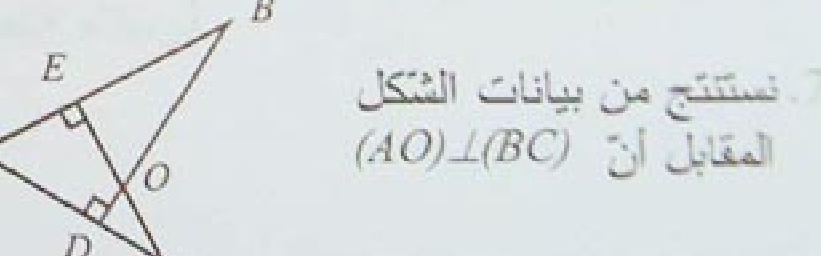


4. إذا كان $[AB]$ و $[CD]$ قطرين في دائرة فإنّ $ABCD$ مستطيل أو مربّع.

5.
أ) كلّ رباعي قطراه متعامدان هو معيّن.
ب) كلّ رباعي أضلاعه متقايسة هو معيّن.
ج) متوازي الأضلاع الذي إحدى زواياه قائمة هو مستطيل

6. يوجد مثلث فيه منصفان متعامدان.

7. نستنتج من بيانات الشكل المقابل أنّ $(AO)\perp(BC)$



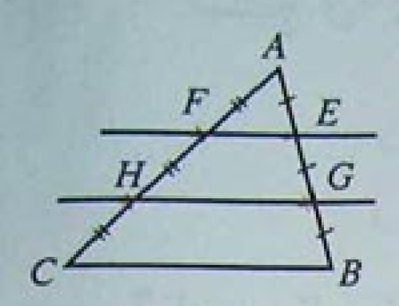
8. مركز الدّائرة المرسومة داخل مثلث هي نقطة تقاطع متوسطاته.

9. المتوسط في مثلث يقسمه إلى جزئين لهما نفس المساحة

10. لا يوجد مثلث أطوال أضلاعه $2,4cm$ ، $7,2cm$ ، $5cm$

11. المثلث الذي أطوال أضلاعه $24cm$ ، $7cm$ ، $25cm$ هو مثلث قائم.

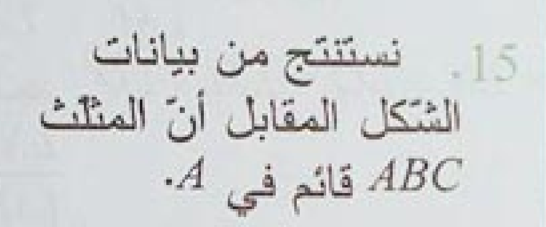
12. نستنتج من بيانات الشكل المقابل أنّ: $(EF)//(GH)//(BC)$



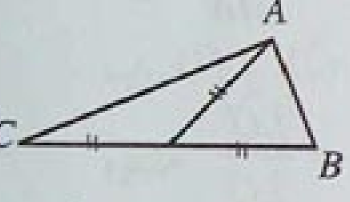
13. نستنتج من بيانات الشكل المقابل أنّ:
أ) الزّاوية $\widehat{ABC}$ تساوي 60°
ب) $BC = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

14. أجب باستعمال بيانات الشكل.
أ) النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى دائرة واحدة.
ب) الدّائرة التي تشمل النقط A ، B ، C ، D مركزها منتصف $[AD]$.
ج) محور $[AD]$ يشمل منتصف $[BC]$.

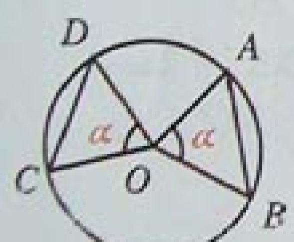
$BD=CD$



15. نستنتج من بيانات الشكل المقابل أنّ المثلث ABC قائم في A.



16. نستنتج من بيانات الشكل المقابل أنّ القطعتين $[AB]$ و $[CD]$ متقايستان.



17. في المثلث ABC القائم في A إذا كان $AB=5cm$ و $AC=12cm$ فإنّ $BC=12,5cm$.

18. الدّائرة المحيطة بالمثلث الوارد في التمرين 17 قطرها $13cm$.

19. لدينا في الشكل المقابل: $AC=5cm$ ، $EB=1,5cm$ ، $ED=1,875cm$.
أ) بيانات الشكل لا تكفي لحساب الطول BC.
ب) $BC \approx 6,4cm$



20. باستعمال معطيات الشكل المقابل:
أ) لا يمكن حساب الطول AM
ب) $AM \approx 2{,}5$.

21. $[AC]$ و $[BD]$ وتران من دائرة متقاطعان في النقطة E.
أ) المستقيمان (AD) و (BC) متوازيان.
ب) المثلثان AEB و DEC متشابهان.
ج) $AE \times EC = DE \times EB$.

22.
أ) للمثلث المتقايس الأضلاع مركز تناظر.
ب) التناظر المركزي لا يحفظ استقامية النقط.
ج) صورة مثلث بانسحاب هو مثلث يقايسه.

23. يوجد أكثر من تحويل نقطي واحد يحول أحد مستقيمين متوازيين إلى الآخر.

24. $ABCD$ مربع مركزه O ، النقطتان M وN منتصفا الضلعين $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب.
أ) النقطة A هي صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه النقطة D وزاويته $45°$.
ب) النقطة A هي صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $90°$.
ج) يوجد دوران مركزه النقطة D يحول النقطة N إلى النقطة M.

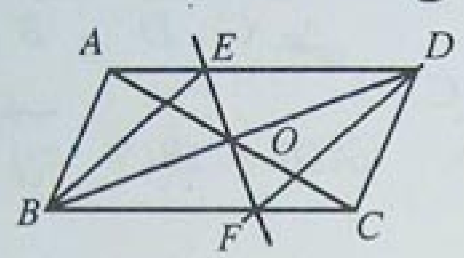
متوازي الأضلاع

25. $ABCD$ متوازي أضلاع ، منصفا الزاويتين ADC و DCB متقاطعان في النقطة M.
ما نوع المثلث CDM ؟

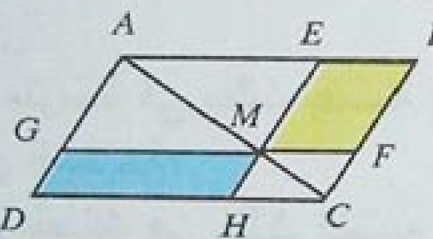
26. في الشكل المرفق $ABCD$ متوازي أضلاع (AG) ، (BF) ، (CE) ، (DH) منصفات زواياه.
ما نوع الرباعي $HGFE$ ؟

27. $ABCD$ معيّن ، النقطة A' نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة D ، النقطة B' نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة C ، النقطة C' نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة D .
أنجز شكلا مناسبا، وعيّن نوع كلّ من الرّباعيين $ACB'D$ ، $ACA'C'$.

28. $ABCD$ متوازي أضلاع، المستقيم العمودي على (BD) الذي يشمل النقطة O يقطع $[AD]$ و $[BC]$ في E و F على الترتيب.
ما نوع الرّباعي $BFDE$ ؟

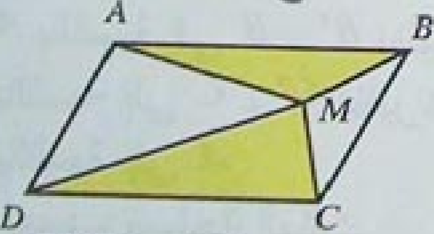


29. $ABCD$ متوازي أضلاع ، M نقطة من $[AC]$ ، (EH) يوازي (AD) ويشمل النقطة M ، (FG) يوازى (AB) ويشمل النقطة M.



قارن بين مساحة $EBFM$ ومساحة $HDGM$.

30. $ABCD$ متوازى أضلاع ، M نقطة داخله.



قارن بين مجموع مساحتي ABM ، CDM ومجموع مساحتي ADM ، BCM.

31. $ABCD$ متوازي أضلاع ، النقط E ، F ، G ، H منتصفات أضلاعه $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[CD]$ ، $[DA]$ على الترتيب.
أ) ما طبيعة الرّباعي $EFGH$ ؟
ب) بيّن أنّ للقطع $[AC]$ ، $[BD]$ ، $[EG]$ ، $[FH]$ نفس المنتصف.
ج) قارن بين مساحتي $ABCD$ و $EFGH$.

32. $ABCD$ متوازي أضلاع حيث $AB \neq AD$.
النقطتان M و N منتصفا [AB] و [BC] على الترتيب
أ) النقطتان A' و C' هما المسقطان العموديان للنقطتين A و C على (BD) على الترتيب.
بيّن أنّ الرّباعي $AA'CC'$ متوازي أضلاع.
ب) النقطتان M' و N' المسقطان العموديان للنقطتين M و N على (BD) على الترتيب.
بيّن أنّ الرّباعي $MM'NN'$ متوازي أضلاع.

المثلثات والمستقيمات الخاصة في مثلث

33. (C) و (C') دائرتان لهما نفس المركز O، المستقيمان (AB) و (CD) يشملان النقطة O، ويقطعان (C) و (C') في A، B و C، D على الترتيب.
بين أنّ: $(AD) \parallel (BC)$

34. بيّن أنّ مساحة المثلث تساوي نصف جداء محيطه ونصف قطر الدّائرة المرسومة داخله.

35. بيّن أنّ:
أ) كلّ متوسّط في مثلث يقسّمه إلى جزئين لهما نفس المساحة.
ب) المتوسّطات في مثلث تقسّمه إلى ستة أجزاء لها نفس المساحة.

36. ABC مثلث كيفي، A' نظيرة A بالنسبة إلى B، B' نظيرة B بالنسبة إلى C، C' نظيرة C بالنسبة إلى A
احسب مساحة المثلث $A'B'C'$ بدلالة مساحة المثلث ABC.

37. ABC مثلث متساوي الأضلاع، M نقطة داخله، M_1، M_2، M_3 المساقط العموديّة للنقطة M على أضلاع المثلث ABC. بيّن أنّ $MM_1 + MM_2 + MM_3$ ثابت.

38. $ABCD$ شبه منحرف طول قاعدته $[DC]$ ضعف طول قاعدته $[AB]$، M منتصف $[DC]$.
بيّن أنّ $[DB]$ و $[BM]$ تقسّمان شبه المنحرف $ABCD$ إلى ثلاثة أجزاء لها نفس المساحة.

39. ABC مثلث كيفي. (AM) المتوسط المتعلق بالرأس A. B'، C' المسقطان العموديان للنقطتين B، C على (AM) على الترتيب.
أ) بيّن أنّ $CC' = BB'$.
ب) بيّن أنّ M منتصف $[B'C']$، واستنتج طبيعة الرّباعي $BB'CC'$.

40. ABC مثلث كيفي، النقطتان D و E منتصفا $[BC]$ و $[AC]$ على الترتيب. G نقطة تقاطع $[AD]$ و $[BE]$. M نقطة تقاطع $[CG]$ و $[AB]$.
أ) بيّن أنّ M منتصف $[AB]$.
ب) ماذا تستنتج بالنّسبة إلى المتوسطات في مثلث.
ج) بيّن أنّ $CG = 2\,GM$ و $AG = 2\,GD$ و $BG = 2\,GE$.

41. $ABCD$ متوازي أضلاع، النقطتان M، N منتصفا $[AB]$، $[BC]$ على الترتيب. $[DM]$ و $[DN]$ يقطعان $[AC]$ في النقطتين G و H على الترتيب.
بيّن أنّ: $AG = GH = HC$

42. أ) ABC مثلث متساوي السّاقين رأسه الأساسي A، بيّن أنّ نقطة تلاقي محاوره، ونقطة تلاقي ارتفاعاته، ونقطة تلاقي متوسطاته، ونقطة تلاقي منصفاته في استقامية.
ب) كيف تصبح هذه النقط في مثلث متقايس الأضلاع ؟

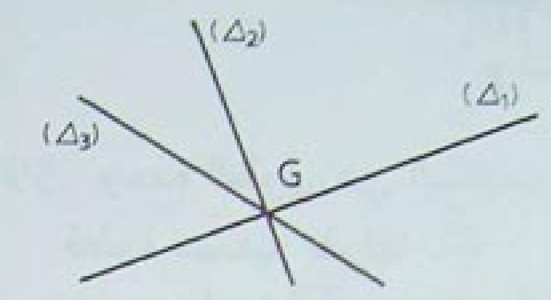
43. A، B، G ثلاث نقط ليست في استقامية.
أنشئ نقطة C بحيث تكون النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

44. A، B، H ثلاث نقط ليست في استقامية.
أنشئ نقطة C بحيث تكون النقطة H نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC.

45. (Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) ثلاثة مستقيمات متقاطعة في نقطة G كما في الشكل أدناه.

أ) أنشئ مثلثا ABC بحيث تكون النقطة G مركز ثقله.

ب) هل يوجد مثلث وحيد يحقق المطلوب ؟



46. C ، B ، I ثلاث نقط ليست في استقامية كما في الشكل.

أنشئ نقطة A بحيث تكون مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث IBC.

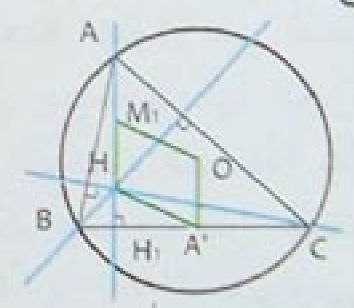
I

C B

47. ارسم مثلثا كيفيا ABC ، والدائرة المحيطة به (C)، سمّ H نقطة تلاقي ارتفاعاته ، و H' نظيرة H بالنسبة إلى (BC) ، و K نظيرة H بالنسبة إلى I منتصف $[BC]$.

بين أنّ كلا من النقطتين H' ، K تنتمي إلى الدائرة (C).

48. دائرة النقط التسع أو "دائرة أولر"



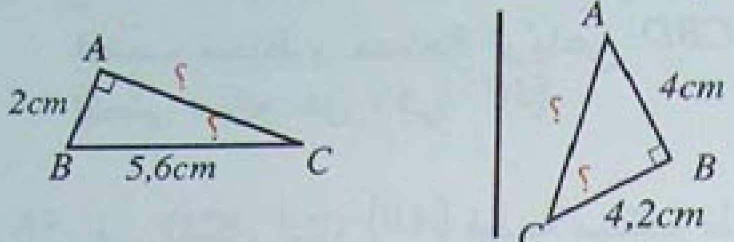
ABC مثلث كيفي ، ارتفاعاته $[AH_1]$ ، $[AH_2]$ ، $[AH_3]$ متقاطعة في النقطة H و A' ، B' ، C' منتصفات أضلاعه $[BC]$ ، $[AC]$ ، $[AB]$ على الترتيب ، M_1 ، M_2 ، M_3 منتصفات $[AH]$ ، $[BH]$ ، $[CH]$ على الترتيب.

لإثبات أنّ النقط التسع H_1 ، H_2 ، H_3 ، A' ، B' ، C' ، M_1 ، M_2 ، M_3 تنتمي إلى دائرة واحدة (دائرة أولر)

أ) بيّن أنّ الرباعي $OA'HM_1$ متوازي أضلاع واستنتج أنّ النقط H_1 ، A' ، M_1 تنتمي إلى دائرة يطلب تعيينها.

ب) كرّر نفس الاستدلال بالنسبة إلى النقط الأخرى.

49. احسب كلا من AC و $\widehat{ABC}$ في كلّ الحالتين الآتيتين: (تعطى النتائج مدوّرة إلى الوحدة)



الحالة(1) الحالة(2)

50. ABC مثلث قائم في A حيث $BC=10cm$ و $\widehat{ABC}=37°$ احسب (بالتدوير إلى الوحدة) مساحة ومحيط هذا المثلث.

51. أنشئ مثلثا ABC أطوال أضلاعه $5cm$ ، $12cm$ ، $13cm$ ، وحدّد طبيعته.

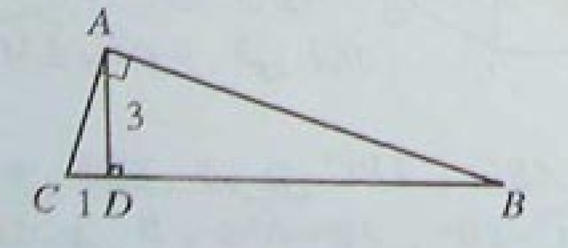
عيّن مركز الدّائرة المحيطة بالمثلث ABC ونصف قطرها.

52. $ABCD$ مربّع طول ضلعه $10cm$ ، L منتصف $[BC]$ و M نقطة من $[DC]$ حيث $AM=12,5cm$

ما نوع المثلث ALM ؟ برّر جوابك.

53. ABC مثلث قائم في A ، AD الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ يساوي $3cm$ و $CD=1cm$.

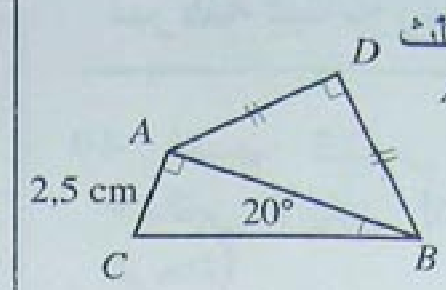
احسب كلا من الأطوال: BD ، AB ، AC (تعطى النتائج مدوّرة إلى 10^{-2})



54. ارسم متوازي أضلاع $ABCD$ حيث $AB=9cm$ و $AD=4,5cm$ و $\widehat{BAD}=115°$ ، واحسب مساحته.

(تعطى النتائج مدوّرة إلى 10^{-2})

55. في الشّكل المقابل المثلث ABC قائم في A و ABD قائم في D ومتساوي السّاقين و $ABC=20°$ و $AC=2,5cm$

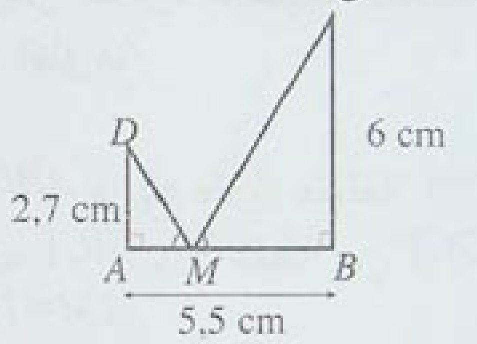


احسب محيط و مساحة الرّباعي $ACBD$
(تعطى النتائج مدوّرة إلى 10^{-2})

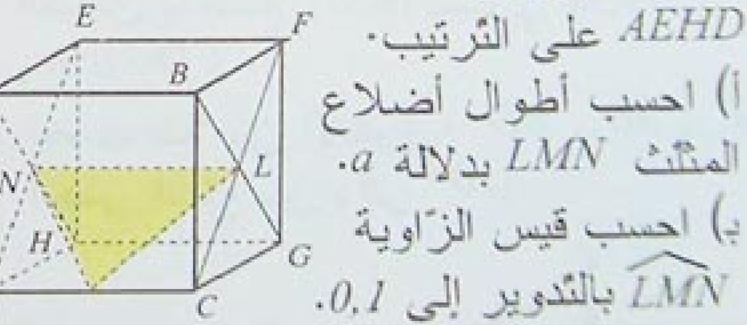
56. في الشّكل أدناه $[AB]$ قطعة مستقيم طولها $5,5cm$ ، D نقطة من المستقيم العمودي على (AB) في النّقطة A حيث $AD=2,7cm$ ، و C نقطة من المستقيم العمودي على (AB) في النّقطة B حيث $BC=6cm$.

أ) عيّن موضع النقطة M من $[AB]$ بحيث يكون للزّاويتين $\widehat{AMD}$ و $\widehat{BMC}$ نفس القيس. (تعطى النتيجة مدوّرة إلى 10^{-2})

ب) احسب بالتّدوير إلى الوحدة قيس الزّاوية $\widehat{AMD}$.



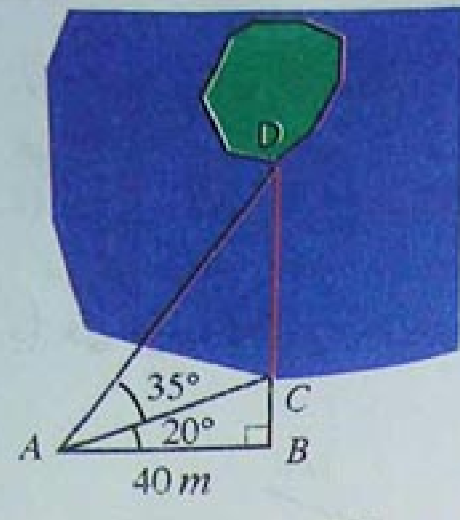
57. $ABCDEFGH$ مكعّب طول حرفه a. النّقطة M منتصف $[CD]$ ، والنقطتان L ، N مركزا المربعين $BFGC$ $AEHD$ على التّرتيب.



أ) احسب أطوال أضلاع المثلث LMN بدلالة a.

ب) احسب قيس الزّاوية $\widehat{LMN}$ بالتّدوير إلى $0,1$.

58. في الشّكل المرفق ABC ، ABD مثلثان قائمان في B ، $AB=40m$ ، $\widehat{BAC}=20°$ ، $\widehat{CAD}=35°$ احسب الطول CD.



59. وحدة الطّول هي السّنتيمتر، نريد إنشاء قطعة مستقيم طولها $\sqrt{5}$.

ارسم دائرة (C) قطرها $[AB]$ حيث $AB=5$ ، وعلّم على $[AB]$ نقطة C حيث $AC=1$. ارسم المستقيم العمودي على (AB) الذي يشمل النّقطة C فيقطع الدائرة (C) في نقطتين D ، D'.

بيّن لماذا كلّ من قطعتي المستقيم $[AD]$ ، $[AD']$ طولها $\sqrt{5}$ ؟

(نقول إننا أنشأنا العدد $\sqrt{5}$، ونقول أيضا أن العدد $\sqrt{5}$ قابل للإنشاء)

60. أنشي العدد $2\sqrt{3}$

مبرهنة طالس

61. وحدة الطّول هي السنتيمتر، والشّكل المقابل مرسوم باليد الحرّة.

أ) هل البيانات المسجلة عليه كافية للحكم عما إذا كان المستقيمان (AC) و (DE) متوازيين أم لا ؟

ب) إذا علمت أنّ $AE=6\ cm$ ، فهل $(DE)//(AC)$؟

62. إذا علمت أن في الشّكل المرفق $(AC)//(BD)$ و $(CE)//(DF)$ ، فبيّن أنّ $(AE)//(BF)$.

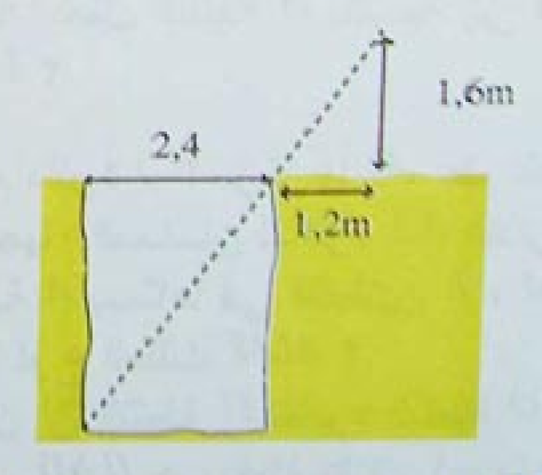


63. وحدة الطول هي السنتيمتر، والشكل المقابل مرسوم باليد الحرة.
إذا علمت أنّ $AE=5,6cm$ ، فهل $(DE)//(AC)$ ؟

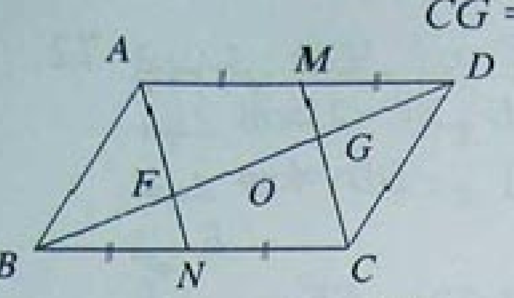
64. في الشكل أدناه A ، B ، C ، D أربع نقط من مستقيم (Δ) ، و A' ، B' ، C' ، D' مساقطها العمودية على (Δ') على الترتيب حيث $AB=2cm$ ، ($BC=4$ ، $DC=6cm$) . $A'B'=1,5cm$
احسب الطولين:
$B'C'$ ، $C'D'$

65. ABC مثلث ، النقطة D منتصف $[BC]$ ، والنقطة E منتصف $[AD]$ ، و F نقطة من $[AC]$ حيث $AF=\frac{1}{3}AC$.
أ) بيّن أنّ النقط B ، E ، F في استقامية.
ب) بيّن أنّ $BF=4\times EF$

66. لقياس عمق بئر فوهتها دائرة قطرها $2,4m$ يقف على حافتها مراقب ارتفاع عينيه عن المستوى الواقف عليه $1,6m$ ويبتعد عنها وفق خط مستقيم يشمل مركز الدائرة التي تمثل فوهة البئر، وعندما يتوارى عنه قعرها يجد أنه ابتعد عن حافة البئر مسافة $1,2m$.
ما هو عمق هذه البئر ؟



67. $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O.
النقطتان M ، N منتصفا $[AD]$ ، $[BC]$ على الترتيب. القطعتان $[AN]$ ، $[CM]$ تقطعان $[BD]$ في النقطتين F ، G على الترتيب.
أ) بيّن أنّ $BF=FG=GD$.
ب) استنتج أنّ النقطة O منتصف $[FG]$.
ج) بيّن أنّ $CG=2\,GM$



68. ABC مثلث كيفي ، (D) مستقيم يقطع (AB) ، (AC) ، (BC) في النقط L ، M ، N على الترتيب.

لتبيّن أنّ: $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$

أ) ارسم الموازي لـ (D) الذي يشمل النقطة C ، وسمّ E تقاطعه مع (AB).
ب) بيّن أنّ $\frac{LB}{LE}=\frac{NB}{NC}$ و $\frac{LE}{LA}=\frac{MC}{MA}$
ج) استنتج العلاقة $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$

69. وحدة الطول هي السنتيمتر، لإنشاء قطعة مستقيم طولها $\frac{5}{3}$ ارسم نصفي مستقيمين $[AX)$ ، $[AY)$ ، وعلّم على $[AX)$ نقطتين B ، C بحيث $AB=5$ و $AC=3$ ، وعلّم نقطة I على $[AY)$ بحيث $AI=1$. ارسم الموازي للمستقيم (CI) الذي يشمل B فيقطع $[AY)$ في النقطة E .
بيّن لماذا طول قطعة المستقيم $[AE]$ يساوي $\frac{5}{3}$ ؟

70. أنشئ العدد $\frac{6}{7}$.

71. ABC مثلث ، D نقطة من $[BC]$ حيث $BC=3DC$. الموازي لـ (AB) الذي يشمل D يقطع (AC) في النقطة E. النقطتان H و F هما المسقطان العموديان للنقطتين A و E على (BC) على الترتيب.
أ) جد العلاقة بين الطولين AH و EF.
ب) عبّر عن مساحة المثلث ABC بدلالة مساحة المثلث CDE.

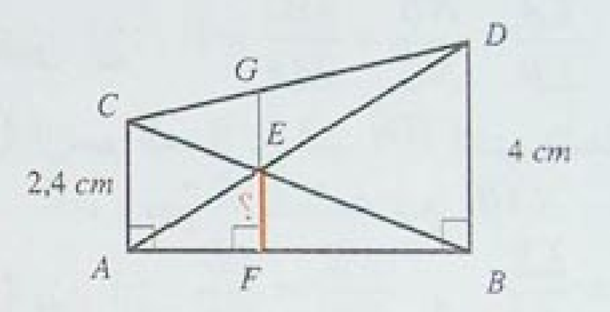
ج) بيّن أنّ المثلثين ABH و EDF متشابهان ، واستنتج العلاقة بين مساحتيهما

72. لدينا في الشكل أدناه ABC مثلث قائم في A حيث $AC=2,4cm$ و ABD مثلث قائم في B حيث $BD=4cm$ ، و $[BC]$ ، $[AD]$ متقاطعان في E .

أ) احسب EF مسافة النقطة E عن (AB).

(إرشاد: عبّر عن $\frac{AF}{AB}$ و $\frac{BF}{AB}$ بدلالة EF وأكمل ...)

ب) المستقيم (EF) يقطع $[CD]$ في النقطة G. بيّن أنّ E منتصف $[FG]$.



الزوايا والدائرة

73. ارسم دائرة (C) مركزها O، علّم نقطة A خارجها.
أنشئ المماس للدائرة (C) الذي يشمل النقطة A.

74. (C) و (C') دائرتان مركزاهما O و O' متقاطعتان في نقطتين A و B ، $[AC]$ قطر في (C) وحامله يقطع (C') في النقطة M، و $[AD]$ قطر في (C') وحامله يقطع (C) في النقطة N.

أ) ارسم شكلا مناسبا.

ب) بيّن أنّ النقط C ، B ، D في استقامية.

ج) بيّن أنّ المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) متقاطعة في نقطة واحدة.

75. ارسم رباعيا $ABCD$ حيث $\widehat{BAD}=110°$ و $\widehat{BCD}=70°$

أ) بيّن أنّ رؤوسه تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين مركزها O.

ب) احسب أقياس زوايا المثلث BOD ؟

76. مستقيم سيمسون

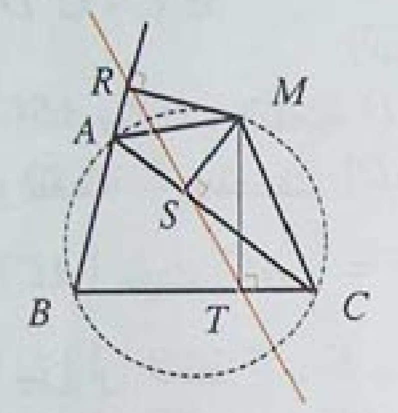
ABC مثلث، M نقطة من الدائرة المحيطة به، النقط R ، S ، T هي المساقط العموديّة للنقطة M على (AB) ، (AC) ، (BC) على التّرتيب.
نريد أن نبيّن أنّ النقط R ، S ، T تنتمي إلى نفس المستقيم (يسمىّ مستقيم سيمسون)

أ) بيّن أنّ للزّاويتين $\widehat{RAM}$ ، $\widehat{BCM}$ نفس القيس.

ب) بيّن أنّ النقط R ، A ، S ، M تنتمي إلى دائرة واحدة، واستنتج تساوي الزّاويتين $\widehat{RAM}$ ، $\widehat{RSM}$.

ج) بيّن أنّ النقط M ، S ، T ، C تنتمي إلى دائرة واحدة، واستنتج علاقة بين الزّاويتين $\widehat{MST}$ ، $\widehat{TCM}$.

د) احسب قيس الزّاوية RST . وماذا تستنتج؟



77. A ، B نقطتان متمايزتان ، علّم باستعمال المدور فقط ودون استعمال المسطرة النقطة A' نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة B. برّر طريقة إنشائك.

78. ABC مثلث زواياه حادّة ، H نقطة تلاقي ارتفاعاته $[AM]$ ، $[BN]$ ، $[CL]$.

أ) بيّن أنّ $[AM)$ منصّف للزاوية $\widehat{LMN}$.
(إرشاد: حدّد الرباعيات الدائرية في الشكل)

ب) ماذا تمثّل النقطة H بالنسبة إلى المثلث LMN ؟

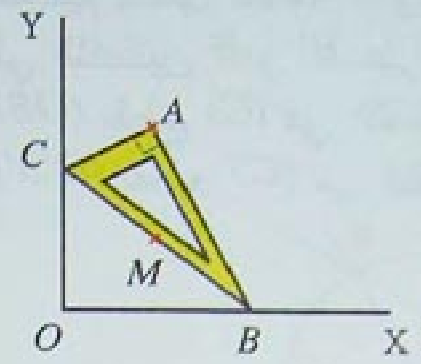
79. ارسم دائرة (C) مركزها O، علّم نقطة A خارجها. المماسان للدّائرة (C) اللذان يشملان النقطة A يمسّاها في النقطتين L ، M.

أ) ما نوع المثلث ALM ؟

ب) بيّن أنّ النقطة H نظيرة النقطة O بالنسبة إلى (LM) هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ALM.

ج) ماذا تمثّل النقطة E منتصف $[AO]$ بالنسبة إلى المثلث ALM.

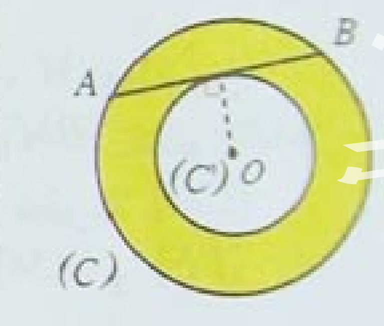
80. $[OX)$ و $[OY)$ نصفا مستقيمين متعامدان في النقطة O، نفترض ABC كوسا ونحركه بحيث تتحرك B على $[OX)$ و تتحرك C على $[OY)$.



أ) ما هو المسار الذي تتحرك عليه النقطة M منتصف $[BC]$ ؟

ب) ما هو المسار الذي تتحرك عليه النقطة A ؟
(إرشاد: بيّن أن الزّاوية $\widehat{AOB}$ ثابتة)

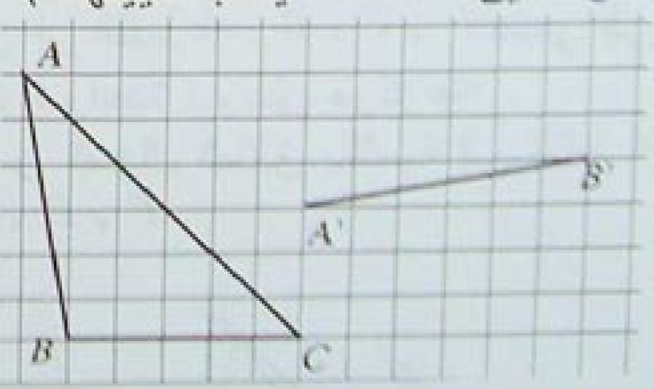
81. زعم ياسين أن المعطيات المبيّنة في الشكل أدناه كافية لحساب مساحة الجزء الملون. هل هو محقّ ؟



(C) و (C') دائرتان لهما نفس المركز O ، النقطتان A ، B من (C) حيث (AB) مماس للدائرة (C') و $AB=10cm$

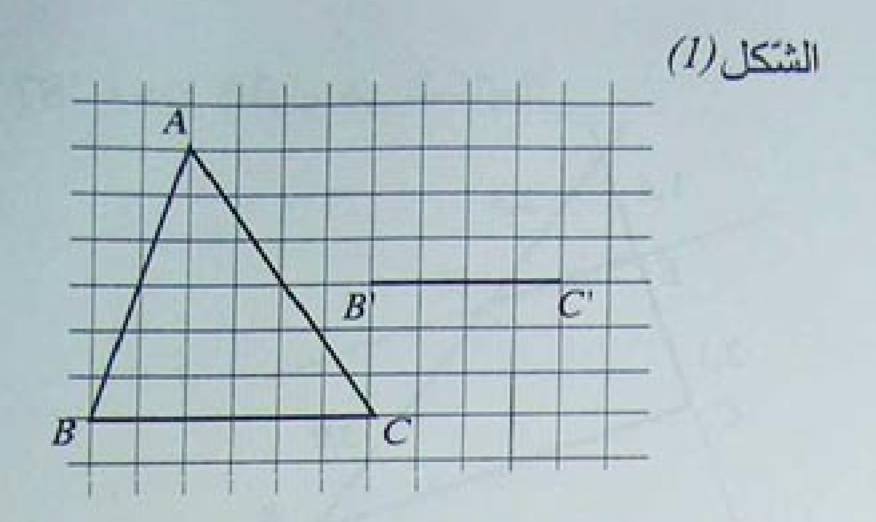
المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة

82. انقل الشكل أدناه على ورقة مسطّرة باحترام الأبعاد، ثمّ أنشئ النقطة C' بحيث يكون المثلثان ABC ، $A'B'C'$ متقايسين (يوجد موضعين للنقطة C يطلب تعيينهما).

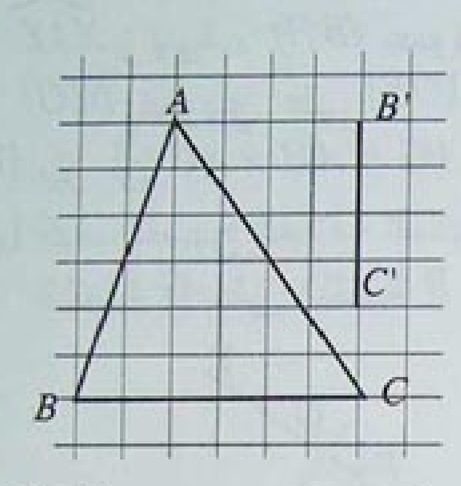


83. في كلّ من الشكلين (1) و (2) أدناه المثلثان ABC ، $A'B'C'$ متشابهان.
انقل كلا من الشكلين على ورقة مسطّرة ، وأكمل المثلث $A'B'C'$ (أعط كلّ الحلول الممكنة).

الشكل (1)



الشكل (2)

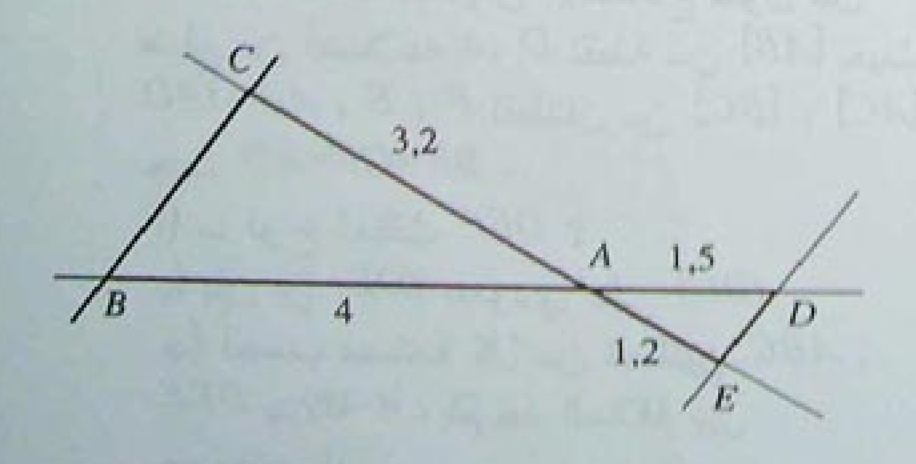


84. ABC مثلث ، أنشئ على ضلعيه $[AB]$ و $[AC]$ مثلثين ABD و ACE على الترتيب، حيث كلّ منهما متقايس الأضلاع.
بيّن أنّ المثلثين ACD ، AEB متقايسان، واستنتج أنّ $BE=CD$.

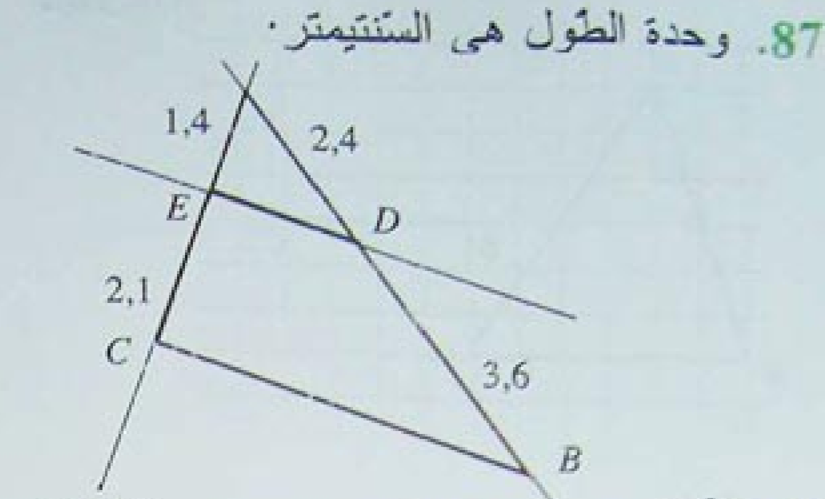
المطلوب في التمارين 86 ، 87 ، 88 التحقق فيما إذا كان المثلثان ABC ، ADE متشابهين أم لا، وفي حالة الإجابة بنعم عيّن نسبة التّشابه إن أمكن.

85. المثلث ABC فيه $\widehat{ABC}=35°$ ، $\widehat{ACB}=70°$.
المثلث ADE فيه $\widehat{ADE}=35°$ ، $\widehat{AED}=75°$.

86. وحدة الطّول هي السّنتيمتر.



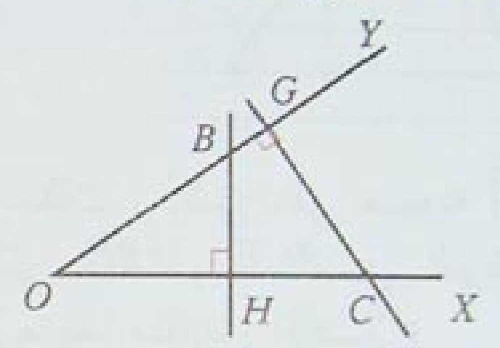
.87 وحدة الطول هي السنتيمتر.



.88 $\widehat{XAY}$ زاوية ، (BH) عمودي على $[OX)$ ، و (CG) عمودي على $[OY)$.

أ) بيّن أنّ $AB \times AG = AH \times AC$

ب) كيف تصبح العلاقة السابقة عندما تنطبق النقطة G على النقطة B ؟



.89 ABC مثلث A' ، B' ، C' منتصفات أضلاعه $[BC]$ ، $[AC]$ ، $[AB]$ على الترتيب.

أ) بيّن أنّ المثلثين ABC ، $A'B'C'$ متشابهان، وعيّن نسبة التشابه.

ب) احسب النسبة $\dfrac{\text{مساحة } (ABC)}{\text{مساحة } (A'B'C')}$

.90 ABC مثلث معطى ، أنشئ مثلثا $A'B'C'$ مشابها للمثلث ABC مساحته تساوي 9 مرّات مساحة المثلث ABC.

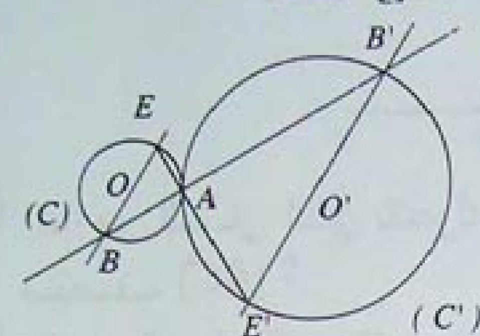
.91 ABC مثلث متقايس الأضلاع طول كل ضلع من أضلاعه a، D نقطة من $[AB]$ حيث $AB=3AD$ ، E ، F نقطتان من $[BC]$ ، $[AC]$ حيث $BE=CF=AD$.

أ) ما نوع المثلث DEF ؟

ب) بيّن أنّ (DE) عمودي على (BC).

ج) احسب مساحة كلّ من المثلثين ABC ، DEF بدلالة a ، ثمّ جد العلاقة بين مساحتيهما.

.92 (C) و (C') دائرتان مركزاهما O و O' ونصفا قطريهما r و r' على الترتيب ، ومتماستان خارجيا في النقطة A . (BB') مستقيم يشمل النقطة A ويقطع (C) و (C') في النقطتين B و B' على الترتيب. المستقيم (OB) يقطع (C) في النقطة E ، والمستقيم $(O'B')$ يقطع (C') في النقطة E'.



أ) بيّن أنّ المستقيمين (BB') و (EE') متعامدان في النقطة A

ب) بيّن أنّ المثلثين ABE ، $AB'E'$ متشابهان.

ج) استنتج التناسب $\dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{r}{r'}$

.93 ABC مثلث زواياه حادّة ، M نقطة من $[BC]$ ، الدائرة التي قطرها $[BM]$ تقطع $[AB]$ في النقطة E ، والدائرة التي قطرها $[CM]$ تقطع $[AC]$ في النقطة F ، $[AM]$ و $[EF]$ متقاطعان في G.

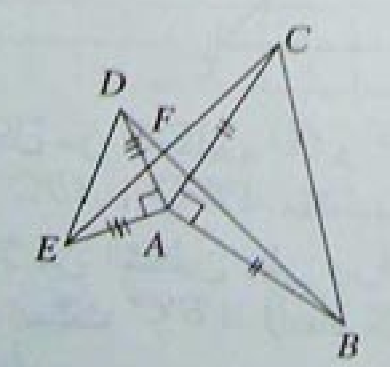
بيّن أنّ المثلثين AFG و EGM متشابهان، واستنتج أنّ $GA \times GM = GF \times GE$

.94 ABC و ADE مثلثان كلّ منهما قائم ومتساوي الساقين كما هو مبيّن في الشكل، $[CE]$ و $[BD]$ متقاطعان في النقطة F.

أ) بيّن أنّ المثلثين ACE و ABD متقايسان.

ب) بيّن أنّ النقط A ، B ، C ، F تنتمي إلى دائرة واحدة ، وعيّن مركزها.

ج) نفس السؤال السابق بالنسبة إلى النقط A ، E ، D ، F.



.95 ABC مثلث ، M نقطة تقاطع منصف زاوية الرأس A و $[BC]$ ، C' ، B' المسقطان العموديان للنقطة M على $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب.

أ) بيّن أنّ المثلثين $AB'M$ ، $AC'M$ متقايسان.

ب) بيّن أنّ النقط A، B' ، M ، C' تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

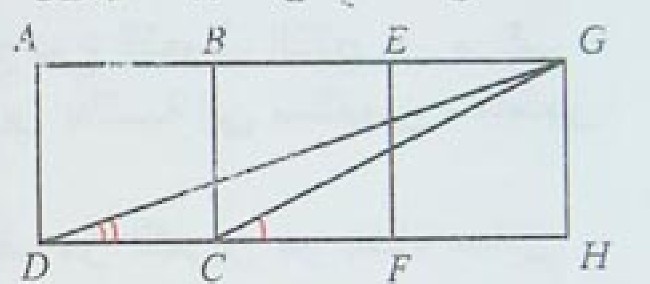
جـ) ما نوع الرّباعي $AB'MC'$ عندما يكون المثلث ABC قائما في A ؟

.96 في الشكل المرفق $ABCD$ ، $BEFC$ ، $EGHF$ ثلاثة مربّعات متماثلة طول ضلع كلّ منها a.

نريد إثبات أنّ $\widehat{GCF} + \widehat{GDC} = 45°$

أ) احسب بدلالة a أطوال أضلاع كلّ من المثلثين GBD ، GFC ، ثمّ بين أنّهما متشابهان.

ب) عيّن الزّوايا المتقايسة في المثلثين GBD ، GFC ، واستنتج أنّ $\widehat{GCF} + \widehat{GDC} = 45°$

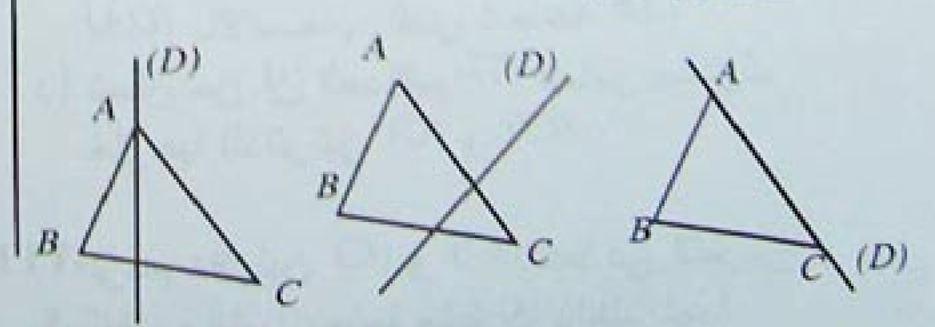


التّحويلات النّقطية

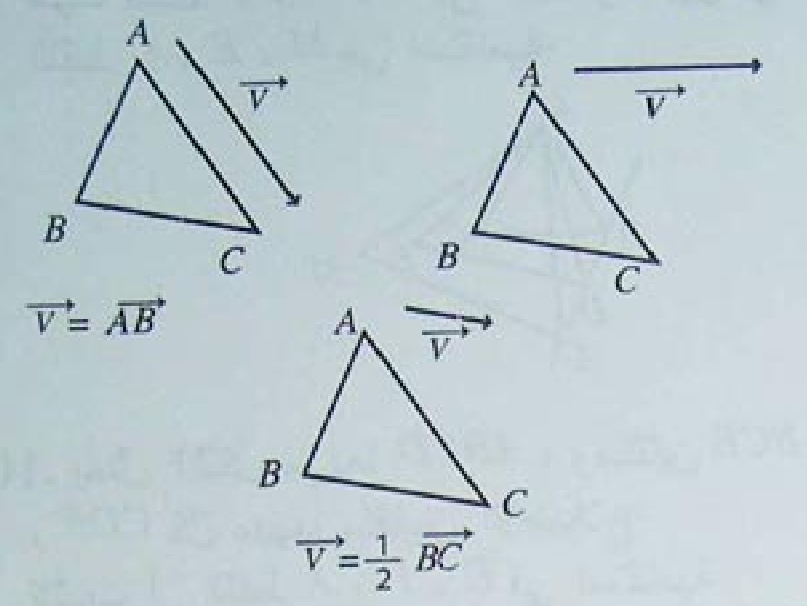
.97 أنجز مثيلا للشكل المقابل على ورقة مسطرة، ثمّ أنشئ الشكل (F_1) نظير الشكل (F) بالنّسبة إلى النّقطة O والشكل (F_2) نظير الشكل (F) بالنّسبة إلى المستقيم (D).

أيّ الثنائيتين $[(F_1)$ ، $(F)]$ أم $[(F)$ ، $(F_2)]$ الشكلان متقايسان مباشرة ؟

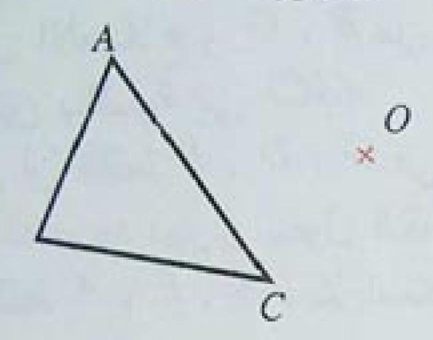
.98 انقل الأشكال أدناه، وأنشئ في كلّ حالة صورة المثلث ABC بالتناظر بالنسبة إلى المستقيم (D):



.99 انقل الأشكال أدناه، وأنشئ في كلّ حالة صورة المثلث ABC بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{V}$:



.100 أنشئ صورة المثلث ABC بالدّوران الذي مركزه النّقطة O وزاويته $60°$.



.101 ABC مثلث قائم في B ، M نقطة من وتره $[AC]$ النّقطتان L و N نظيرتا النّقطة M بالنّسبة إلى (AB) و (BC) على الترتيب. ماذا تمثّل النّقطة B بالنّسبة إلى $[LN]$.

.102 $ABCD$ متوازي أضلاع . E ، F ، G ، H نقط من $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[CD]$ ، $[AD]$ على الترتيب حيث $AE=CG$ و $AH=CF$.

أ) ما هو التّحويل النقطي الذي يحوّل A إلى C و B إلى D ؟

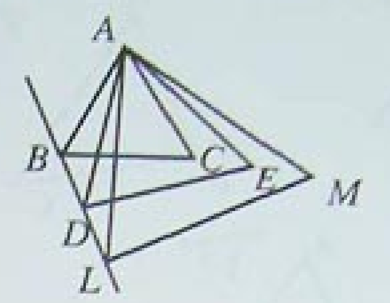
ب) ما هي طبيعة الرّباعي $EFGH$ ؟

.103 علّم أربع نقط A ، B ، A' ، B' كما في الشكل المقابل.

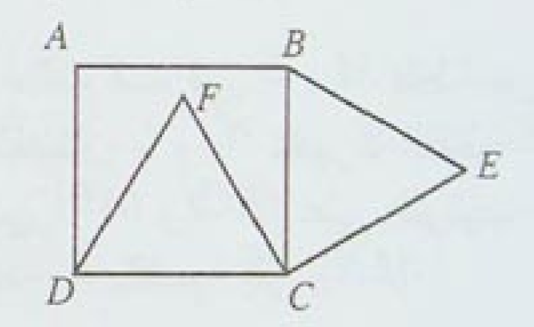
اشرح كيف يمكن إنشاء مركز الدّوران الذي يحوّل A إلى A' ويحوّل B إلى B' وأنشئه.



104. يمثّل الشّكل المقابل ثلاثة مثلّثات ABC ، ADE ، ALM كلّ منها متقايس الأضلاع حيث النّقط B ، D ، L في استقامية. بيّن أنّ النّقط C ، E ، M في استقامية.



105. يمثّل الشّكل مربعا $ABCD$ ، ومثلثين BCE ، CDF كلّ منهما متقايس الأضلاع.
لإثبات أنّ النّقط A ، F ، E في استقامية باستعمال الدّوران.
أ) علّم النّقطة G بحيث يكون المثلّث ACG متقايس الأضلاع و G ، B من جهتين مختلفتين بالنّسبة إلى (AC).
ب) بيّن أنّ النّقط B ، D ، G في استقامية.
) بيّن أنّه يوجد دوران يحوّل النّقط B ، D ، G إلى النّقط A ، F ، E ، ثمّ استنتج.



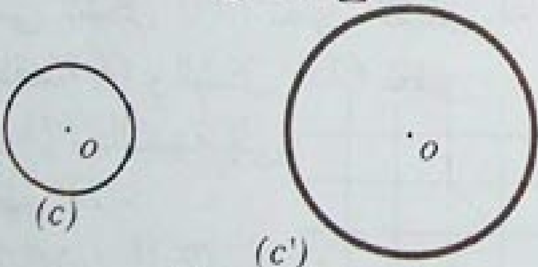
106. خذ معطيات التّمرين 95 وبيّن باستعمال الدّوران أنّ المستقيمين (BD) و (CE) متعامدان.

107. $ABCD$ مربّع ، M ، N نقطتان من ضلعيه $[AB]$ و $[BC]$ على التّرتيب حيث $AM = BN$ ، H نقطة تقاطع $[DM]$ و $[AN]$.
أ) بيّن أنّه يوجد دوران يحوّل $[DM]$ إلى $[AN]$.
ب) استنتج طبيعة المثلّث AHD.
ج) ما هي مجموعة النّقط H عندما M تمسح $[AB]$ ؟
د) ما هي مجموعة النّقط S منتصف $[MN]$ عندما M تمسح $[AB]$ ؟

108. تركيب تناظرين بالنّسبة إلى نقطتين متمايزتين.
A ، B نقطتان ثابتتان ومتمايزتان، علّم نقطة M ، ثمّ أنشئ M_1 نظيرتها بالنّسبة إلى A، و M' نظيرة M_1 بالنّسبة إلى B.
نقول إنّ النّقطة M' هي صورة النّقطة M بمركّب التّناظر بالنّسبة إلى A والتّناظر بالنّسبة إلى B.
أ) عبّر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$
ب) استنتج نوع التّحويل النّاتج عن مركّب تناظرين مركزيّين.

109. تركيب تناظرين بالنّسبة إلى مستقيمين متقاطعين.
(D) و (D') مستقيمان متقاطعان في نقطة O، علّم نقطة M ، ثمّ أنشئ M_1 نظيرتها بالنّسبة إلى (D)، و M' نظيرة M_1 بالنّسبة إلى (D').
أ) بيّن أنّ $OM = OM'$ ، وأنّ الزّاوية $\widehat{MOM'}$ ثابتة.
ب) استنتج نوع التّحويل النّاتج عن مركّب تناظرين بالنّسبة إلى مستقيمين متقاطعين.

110. الهدف من التّمرين هو إنشاء مماس مشترك خارجيا لدائرتين.
لتكن (C) و (C') دائرتين مركزاهما O و O' ونصفا قطريهما r و r' على التّرتيب ، حيث $r'>r$ كما في الشّكل.

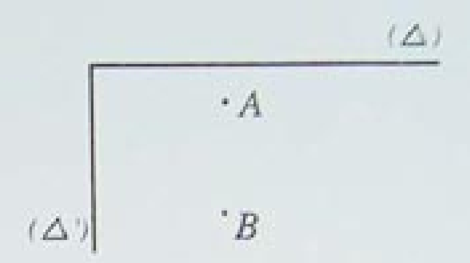


أ) ارسم دائرة (δ) مركزها O' ونصف قطرها $(r'-r)$
ب) أنشئ مماسا للدائرة (δ) يشمل النّقطة O . سمّ A النّقطة المشتركة بين الدّائرة (δ) وهذا المماس.
ج) نصف المستقيم $[O'A)$ يقطع الدّائرة (C') في النّقطة B . أنشئ المستقيم (T) صورة (OA) بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.
د) تحقق من أنّ المستقيم (T) مماس مشترك خارجيا للدائرتين (C) و (C') .

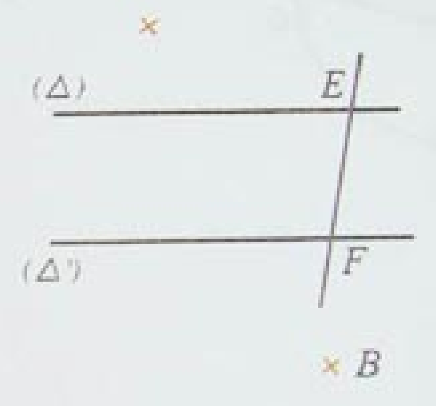
111. ارسم دائرتين (C) و (C') كما في التّمرين السّابق، وأنشئ مماسا مشتركا داخليا لهما.

112. A ، B نقطتان متمايزتان ومن نفس الجهة بالنسبة إلى مستقيم (Δ) ، علّم على (Δ) نقطة C بحيث يكون $AC + CB$ أصغر ما يمكن.

113. انقل الشّكل أدناه ، وعلّم نقطتين C ، D من (Δ) ، (Δ') على التّرتيب، بحيث يكون $AC + CD + DB$ أصغر ما يمكن.

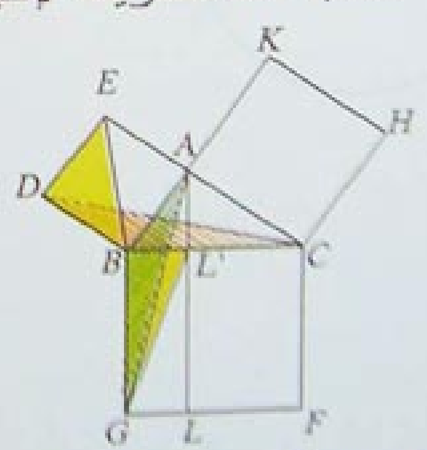


114. انقل الشّكل أدناه ، وعلّم نقطتين C ، D من المستقيمين المتوازيين (Δ) و (Δ') على التّرتيب، بحيث يكون $AC + CD + DB$ أصغر ما يمكن و (CD) يوازي (EF) .



مسائل

115. إثبات مبرهنة فيثاغورس باستعمال المساحات: تنسب هذه الطريقة لإقليدس.



ABC مثلث قائم في A ، $ABDE$ ، $BCFG$ ، $ACHK$ مربّعات منشأة على أضلاعه $[AB]$ ، $[AC]$ ، $[BC]$ على التّرتيب.

لإثبات أن $BC^2 = AB^2 + AC^2$ يكفي التحقق من أنّ مساحة المربع $BCFG$ تساوي مجموع مساحتي المربعين $ABDE$ ، $ACHK$.

ليكن (AL) عموديا على (GF) في النقطة L ، L' نقطة تقاطع $[AL]$ و $[BC]$.

أ) بيّن أنّ للمثلثين BED ، BCD نفس المساحة ، وكذلك بالنسبة للمثلثين ABG ، BGL'.

ب) بيّن أنّ المثلثين ABG ، BCD متقايسان.

ج) ماذا تستنتج بخصوص مساحة المربّع $ABDE$ ومساحة المستطيل $BGLL'$ ؟

د) كرّر نفس الاستدلال بالنّسبة إلى مساحة المربّع $ACHK$ ومساحة المستطيل $CFLL'$.

هـ) استنتج مبرهنة فيثاغورس.

116. الهدف من هذه المسألة هو برهان خاصية للمنصّف الدّاخلي لزاوية في مثلث بعدّة طرائق

ABC مثلث كيفي ، $[AM)$ منصف زاوية الرأس A يقطع $[BC]$ في النقطة M. بيّن أنّ

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$$

طريقة1: باستعمال مبرهنة طالس

ارسم المستقيم الموازي لـ (AB) الذي يشمل النّقطة C فيقطع (AM) في النّقطة A.

أ) ما نوع المثلث ABC ؟

ب) استنتج أنّ $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$

طريقة2: باستعمال تشابه المثلثات

ارسم المستقيم (D) العمودي على (AM) الذي يشمل A ، علّم B' و C' المسقطان العموديان للنقطتين C و B على (D) على التّرتيب.

أ) بيّن لماذا $\frac{MB}{MC} = \frac{AB'}{AC'}$.

ب) بيّن أنّ المثلثين ABB' و ACC' متشابهان.

ج) استنتج أنّ $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$.

طريقة 3: باستعمال المساحات

علّم النقطتين H ، K المسقطان العموديان للنقطة M على (AB) ، (AC) على التّرتيب.

أ) بيّن لماذا $MH = MK$

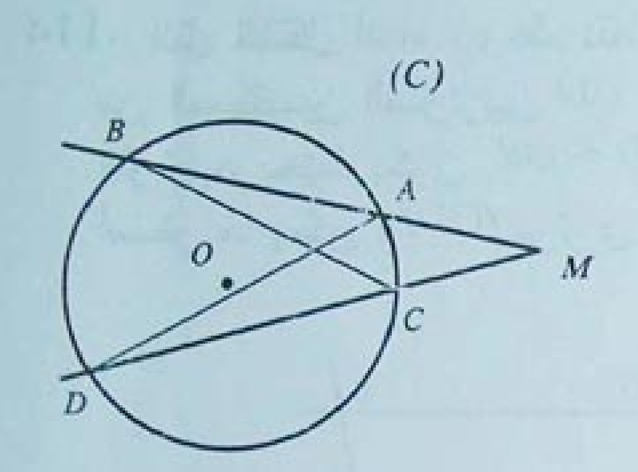
ب) عبّر عن مساحة المثلث ABM باعتبار $[AB]$ كقاعدة ،ثمّ باعتبار $[BM]$ كقاعدة.
كرّر العملية مع المثلث ACM.

ج) استنتج أنّ

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$$

117. قوة نقطة بالنسبة إلى دائرة:

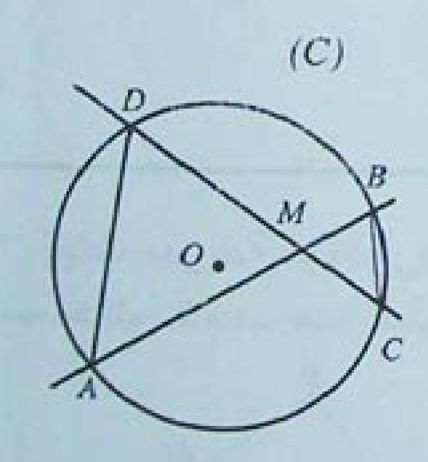
(C) دائرة مركزها O ونصف قطرها r، وM نقطة لا تنتمي إلى (C) ، نرسم مستقيمين (Δ) ، (Δ') يشملان النقطة M ويقطعان الدّائرة (C) في النقط A ، B و C ، D على التّرتيب.



أ) بيّن أنّ المثلثين AMD ، CMB متشابهان، واستنتج أنّ : $MA \times MB = MC \times MD$

ب) في حالة M خارج (C)، كيف تصبح العلاقة السّابقة عندما يكون (Δ) مماسا للدائرة (C) في النقطة A ؟

ج) نعتبر الآن أنّ (Δ') يشمل النقطة O.
احسب $MA \times MB$ بدلالة MO و r في كلّ من الحالتين.



(لاحظ أنّ الجداء $MA \times MB$ مستقل عن المستقيم الذي يشمل النقطة M القاطع للدائرة (C). يسمّى قوة النقطة M بالنسبة إلى الدّائرة (C)).

تطبيق: إنشاء العددين α ، β علم فرقهما $\beta - \alpha = r$ وجداؤهما $\beta \times \alpha = r^2$

ارسم دائرة مركزها O وقطرها r ، وعلّم عليها نقطة A ، وارسم المماس لها الذي يشمل A ، وعلّم على هذا المماس نقطة M حيث $AM=r$. ارسم $[MO)$ فيقطع الدّائرة في نقطتين C ، D .
تحقق من أنّ : MC ، MD يحققان المطلوب.

الحساب الشّعاعي والهندسة التّحليلية

الكفاءات المستهدفة

- التّعرف على تساوي شعاعين.
- التّعرف على مجموع شعاعي وإنشاؤه.
- التّعرف على جداء شعاع بعدد حقيقي.
- التّعليم على مستقيم، وفي المستوي.
- التّعرف على استقامية ثلاث نقط.
- التّعبير عن توازي شعاعين واستقامية ثلاث نقط في معلم.
- التّعرف على معامل توجيه مستقيم.
- إنشاء مستقيم عُلِمت معادلة له.
- إيجاد معادلة لمستقيم.
- حل جملة معادلتين خطيتين لمجهولين.
- حل مسائل تؤدي إلى استخدام جملة معادلتين خطيتين لمجهولين.



قاسبار مونج (1746م-1818م)
ظهرت الصياغة الحالية للهندسة التحليلية في أعماله

يعتبر مفهوم الأشعة حديث النّشأة مقارنة مع مفاهيم أخرى في الرّياضيات، فظهوره يعود إلى القرن التّاسع عشر حينما لاحظ إرمان قنتر قراسمان سنة 1832م أنّه بسبب اتجاه كلّ من AB و BA فإنهما متعاكسان، وهي الفكرة التي وصل بها إلى مفهوم (المجموع الهندسي) الذي سمح فيما بعد بتمديد الدّستور $AB + BC = AC$ إلى ثلاث نقط كيفية. وقد عمل كل من قراسمان وهملتون وموبيوس على إعطاء عمليات وقواعد الحساب الشعاعي وجاء فيما بعد الرياضي ويليام كليفورد (1845م-1879م) فهذّب هذه القواعد وصاغها في الشكل الذي نعرفه اليوم. أما بالنّسبة إلى الهندسة التّحليلية التّي وفّرت لنا إمكانية تعريف كائن هندسي بواسطة علاقة تربط بين الاحداثيات، نجد أنّ العمل بها سابق لظهور الأشعة، فقد استعملت من قبل أبولونيوس (260-200 ق.م) عندما عبر عن معادلات كل من القطع المكافئ والناقص والزائد واستعملت كذلك من طرف عمر الخيام وثابت ابن قرة غير أن روني ديكارت (1596م-1665م) اعتبر أبو الهندسة التحليلية لما أضاف لها مع بيار دي فيرما (1601م-1665م). وفي سنة 1795م أعطى الرياضي والفيزيائي قاسبار مونج للهندسة التّحليلية الصياغة الحديثة التي نستخدمها اليوم في بحث له تحت عنوان « أوراق التحليل مطبقة في الهندسة »

تساوي شعاعين

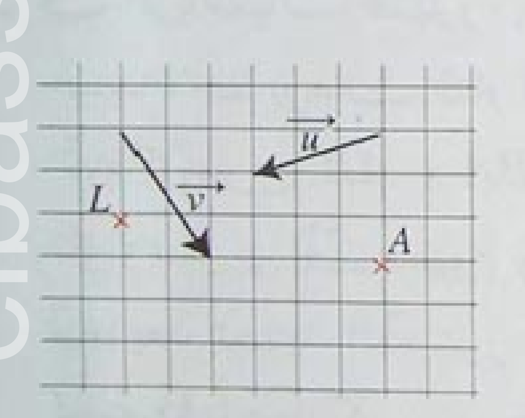
أ) لاحظ الأشكال الأربعة الآتية، ثمّ أنقل الجدول أدناه وأكمله بوضع (✓) علامة الصحة و (✗) علامة الخطأ في المكان المناسب.

الشكل (1) الشكل (2) الشكل (3) الشكل (4)

للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$	الشكل (1)	الشكل (2)	الشكل (3)	الشكل (4)
نفس المنحى				
نفس الإتجاه				
نفس الطّول				

ب) في أي شكل لدينا $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

نشاط 2. مجموع شعاعين



أ) انقل الشكل المجاور على ورقة مسطّرة، وعلّم النقطتين B ، C حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$.

ب) ماذا يمثّل الشّعاع النّاتج $\overrightarrow{AC}$ بالنّسبة إلى الشّعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ؟

ج) علّم النّقطتين M ، N حيث $\overrightarrow{LM}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{LN}=\vec{v}$ ، ثمّ أنشئ النّقطة P بحيث يكون الرّباعي $LMPN$ متوازي أضلاع.

د) قارن بين الشّعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{LP}$.

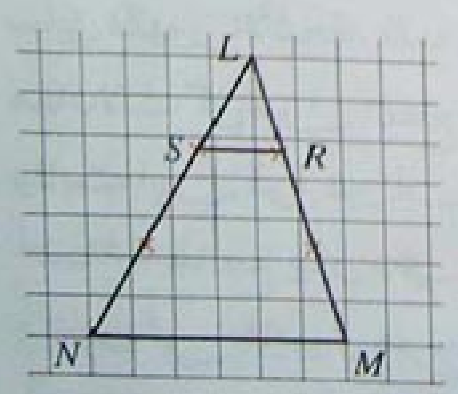
هـ) ماذا يمثّل الشّعاع النّاتج $\overrightarrow{LP}$ بالنّسبة إلى الشّعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ؟

نشاط 3. جداء شعاع بعدد حقيقي

1) أ) علّم نقطتين متمايزتين A ، B ، ثمّ أنشئ النّقطة C بحيث $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$

ب) قارن بين الشّعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ من حيث المنحى والاتجاه والطويلة.

ج) عبّر عن الشّعاع $\overrightarrow{AC}$ بدلالة الشّعاع $\overrightarrow{AB}$ (أي أكمل ما يأتي: $\overrightarrow{AC}=...\times\overrightarrow{AB}$)



2) في الشكل المقابل كلّ من النقطتين R ، S تقسمان $[LM]$ ، $[LN]$ بنسبة 1 إلى 3 على التّرتيب.

أ) قارن بين الشّعاعين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{SR}$ من حيث المنحى والاتجاه والطويلة.

ب) عبّر عن الشّعاع $\overrightarrow{SR}$ بدلالة الشّعاع $\overrightarrow{MN}$ (أي أكمل ما يأتي: $\overrightarrow{SR}=...\times\overrightarrow{MN}$)

نشاط 4. الارتباط الخطي لشعاعين ، التوازي ، الاستقامية

أ) ارسم متوازي أضلاع $ABCD$ مركزه النقطة O، وعلّم النقطتين E ، F من $[BC]$ حيث $CE = EF = FB$.

ب) أنشئ النقطة G حيث $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}$.

جـ) عبّر عن الشّعاع $\overrightarrow{AF}$ بدلالة الشّعاع $\overrightarrow{AG}$ ، ماذا يمكنك أن تقول عن النقط A ، G ، F ؟

نشاط 5. المعلم على مستقيم، وفي المستوي

لتكن A ، B ، C ثلاث نقط في معلم $(O ;I ,J)$ كما في الشّكل المقابل.

أ) أنجز على ورقة مسطّرة مثيلا لهذا الشّكل.

ب) اكتب إحداثيي كلّ من النقط A ، B ، C.

ج) علّم منتصف $[AB]$ وعيّن إحداثييها بطريقتين.

د) اكتب مركبتي كلّ من الشّعاعين $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{BC}$.

هـ) علّم النقطة D التي إحداثييها $(4 ; -4)$، وعيّن مركبتي كلّ من الشّعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{DC}$، ثمّ استنتج نوع الرّباعي $ABCD$.

و) نضع $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$

- علّم النقطة M المعرّفة بالعلاقة: $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$
- عبّر عن الأشعة $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OC}$ ، $\overrightarrow{AB}$ بدلالة الشّعاعين $\vec{i}$ ، $\vec{j}$

نشاط 6. معادلة مستقيم

المستوي مزوّد بمعلم $(O ;I ,J)$

1) نعتبر مجموعة النقط $M(x ;y)$ بحث $y = \frac{1}{3}x + 2$

النقطة	A	B	C	D
فاصلتها x	0		3	-3
ترتيبها y		0		

أ) أكمل الجدول الآتي بنقط من هذه المجموعة.

ب) علّم النقط A ، B ، C ، D . ماذا تلاحظ ؟

جـ) باستعمال الشّعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بيّن أنّ النقط A ، B ، C في استقامية.

د) هل مركبتا النقطة $E(3 ;2)$ تحقق المعادلة $y = \frac{1}{3}x + 2$ ؟ علّم النقطة E ، وهل هي في استقامية مع النقط A ، B ، C ، D ؟

2) علّم النقطتين $A(-2 ;1)$ ، $B(2 ;3)$ ، وارسم المستقيم (AB). لتكن $M(x ;y)$ نقطة من (AB)

أ) عبّر بدلالة x و y عن الشّعاع $\overrightarrow{AM}$

ب) استنتج علاقة بين x و y تترجم استقامية النقط A ، B ، M .

نشاط 7. جملة معادلتين خطيتين لمجهولين

نعتبر جملة المعادلتين

$$\begin{cases} x + y = 5 & (E_1) \ldots \\ -x + 2y = 4 & (E_2) \ldots \end{cases}$$

أ) من بين الثنائيات الآتية بيّن تلك التّي تحقق المعادلة (E_1) فقط، و تلك التّي تحقق المعادلة (E_2) فقط، و التّي تحقق الجملة: $(0 ;2)$ ، $(2 ;1)$ ، $(5 ;0)$ ، $(-4 ;0)$ ، $(2 ;3)$ ، $(7 ;-2)$

ب) اكتب كلا من المعادلتين (E_1) ، (E_2) عل الشّكل $y = ax + b$ ، ثمّ ارسم في معلم $(O ;\vec{i}, \vec{j})$ المستقيمين (D_1) ، (D_2) ، وأوجد إحداثيي نقطة تقاطعهما.



الـــدّرس

1. الأشعة والحساب الشعاعي

• مفهوم الشّعاع

تعريف 1

A ، B نقطتان من المستوي. نقول أنّ الثنائية $(A\,;B)$ تعيّن شعاعا نرمز له بالرّمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{v}$

- إذا كانت النّقطة A منطبقة على النّقطة B فإنّ الشّعاع $\overrightarrow{AB}$ يصبح معدوما ونكتب $\vec{v} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$
- يسمّى طول قطعة المستقيم $[AB]$ **طويلة الشّعاع** $\overrightarrow{AB}$ ، ونكتب: $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$
- إذا كان $\overrightarrow{AB}$ شعاعا غير معدوم فإنّ **منحى** الشّعاع $\overrightarrow{AB}$ هو منحى المستقيم (AB)
- إذا كان لشعاعين $\vec{v}$ ، $\vec{v'}$ نفس المنحى، وبوضع $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v'} = \overrightarrow{AC}$ فإنّه:
  - يكون للشعاعين $\vec{v}$ ، $\vec{v'}$ نفس الاتجاه إذا كانت النّقطة C تنتمي إلى نصف المستقيم $[AB)$.
  - يكون للشعاعين $\vec{v}$ ، $\vec{v'}$ اتجاهان متعاكسان إذا كانت النّقطة A تنتمي إلى قطعة المستقيم $[BC]$.

$\vec{v}$ ، $\vec{v'}$ لهما نفس الاتجاه.

$\vec{v}$ ، $\vec{v'}$ لهما اتجاهان متعاكسان

ملاحظة: ليس للشعاع المعدوم منحى.

• تساوي شعاعين

تعريف 2

نقول عن شعاعين أنّهما متساويان إذا كان لهما نفس المنحى، ونفس الاتجاه، ونفس الطويلة.

مثال:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$$

نتيجة

من أجل كلّ أربع نقط A ، B ، C ، D من المستوى لدينا: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ معناه $[AD]$ و $[BC]$ لهما نفس المنتصف.

• مجموع شعاعين

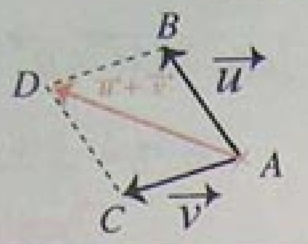
تعريف 3

مجموع شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الشّعاع الذي نرمز له بالرّمز $\vec{u} + \vec{v}$ والمعرّف كما يأتي:

بفرض A نقطة كيفية، نعلم نقطة B بحيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ ثمّ نقطة C بحيث $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$

عندئذ يكون $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- من أجل كلّ ثلاث نقط A ، B ، C من المستوى فإنّ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (تسمّى هذه العلاقة علاقة شال)
- إذا مثّلنا شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من نفس المبدأ A ، (مثلا $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$) فإنّ مجموعهما $\vec{u}+\vec{v}$ يساوي $\overrightarrow{AD}$ حيث $ABDC$ متوازي أضلاع.



- إذا كان $ABDC$ متوازي أضلاع فإنّ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

- **الشّعاعان المتعاكسان**

من أجل كلّ نقطتين A ، B من المستوي فإنّ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

تعريف 4

نقول عن الشّعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ أنهما متعاكسان. نكتب: $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

تعريف 5

لحساب فرق الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بهذا التّرتيب، نضيف إلى الشّعاع $\vec{u}$ معاكس الشّعاع $\vec{v}$

نكتب: $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

مثال:

ليكن $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{CB}$ لدينا:

$\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

- **جداء شعاع بعدد حقيقي**

تعريف 6

$\vec{u}$ شعاع غير معدوم و k عدد غير معدوم.

جداء الشّعاع $\vec{u}$ بالعدد k هو الشّعاع الذي نرمز له بالرّمز $k\vec{u}$ والمعرّف كما يأتي:

- $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس المنحي ونفس الاتجاه إذا كان $k>0$.
- $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس المنحي واتجاهان متعاكسان إذا كان $k<0$.
- طويلة الشّعاع $k\vec{u}$ تساوي جداء طويلة $\vec{u}$ بالعدد $|k|$ أي $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|v\|$

ملاحظة: عندما $\vec{u}=\vec{0}$ أو $k=0$ نصطلح على وضع $k\vec{u}=\vec{0}$

أمثلة:

$\overrightarrow{AC}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{EG}$ $\qquad$ $\vec{v}=-3\vec{u}$



خواص: نقبل الخواص الآتية

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان ، و k ، k' عددان.

❶ $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$

❷ $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$

❸ $k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$

❹ $1\vec{u}=\vec{u}$

❺ $k\vec{u}=0$ يكافئ [$k=0$ أو $\vec{u}=0$]

أمثلة:

- $5\,\overrightarrow{AB}+5\,\overrightarrow{BC}=5\,(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=5\,\overrightarrow{AC}$ (بتطبيق الخاصة ❶ ثمّ علاقة شال)
- $7\,\vec{u}-5\,\vec{u}=(7-5)\,\vec{u}=2\,\vec{u}$ (بتطبيق الخاصة ❷)
- $\frac{4}{7}\times(\frac{7}{4}\,\vec{u})=(\frac{4}{7}\times\frac{7}{4})\,\vec{u}=1\,\vec{u}=\vec{u}$ (بتطبيق الخاصة ❸ ثمّ الخاصة ❹)
- $2\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ يكافئ $\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ ، وبالتالي النقطتان M و A متطابقتان (بتطبيق الخاصة ❺)

• توازي شعاعين

تعريف7

نقول عن شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما مرتبطان خطيا إذا كان أحدهما يساوي جداء الآخر بعدد حقيقي.
أي إذا وجد عدد حقيقي k حيث $\vec{v}=k\,\vec{u}$.

ملاحظة: الشّعاع المعدوم مرتبط خطيا مع أي شعاع. بالفعل من أجل كلّ شعاع $\vec{u}$ لدينا: $\vec{0}=0\times\vec{u}$

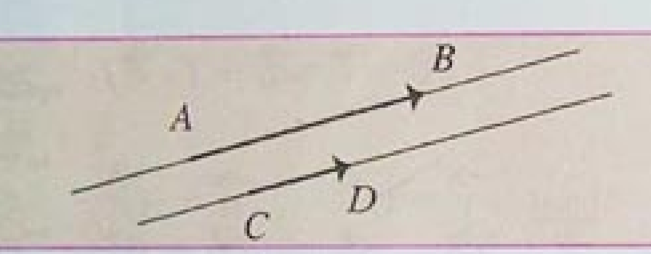
نتيجة مباشرة

يكون الشّعاعان غير المعدومين مرتبطين خطيا إذا وفقط إذا كان لهما نفس المنحى.

• التوازي والاستقامية

مبرهنة1

يكون المستقيمان (AB) و (CD) متوازيين إذا وفقط إذا كان الشّعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا.



ملاحظة: وتستخلص هذه المبرهنة مباشرة من التّعريف 7 والنتيجة السّابقة.

مبرهنة2

تكون النّقط A ، B ، C في استقامية إذا وفقط إذا كان الشّعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا.

2. المعلم للمستوي

O ، I ، J ثلاث نقط متمايزة من المستوي وليست في استقامية. نقول إنّ النّقط O ، I ، J بهذا التّرتيب تعيّن معلما للمستوي **مبدؤه النّقطة O**.
نضع $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ ، $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$. إنّ الشّعاعين $\vec{i}$ و $\vec{j}$ غير مرتبطين خطيا، نسمّيهما شعاعي الأساس، ونرمز للمعلم بالرّمز $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ ونسمّي (OI) محور الفواصل، و (OJ) محور التّراتيب.

ملاحظة: توجد ثلاثة أنواع من المعالم للمستوي :

معلم كيفي

معلم متعامد
($(OI)\perp(OJ)$)

معلم متعامد ومتجانس
$(OI)\perp(OJ)$
و $OI=OJ=1u$ (u وحدة طول)

- إحداثيا نقطة ، مركبتا شعاع

مبرهنة 3

ليكن $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلما للمستوي.

1) من أجل كلّ نقطة M من المستوي ، توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الحقيقيّة $(x;y)$ بحيث $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}$

2) من أجل كلّ شعاع u ، توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الحقيقيّة $(x;y)$ بحيث $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}$

برهان:

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي، نضع $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

1) لتكن M نقطة كيفية من المستوي.

المستقيم الذي يشمل النقطة M ويوازي (OI) يقطع (OJ) في النقطة L

والمستقيم الذي يشمل النقطة M ويوازي (OJ) يقطع (OI) في النقطة P

الشّعاعان $\overrightarrow{OP}$ و $\vec{i}$ مرتبطان خطيا، ومنه يوجد عدد حقيقي x حيث $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}$

الشّعاعان $\overrightarrow{OL}$ و $\vec{j}$ مرتبطان خطيا، ومنه يوجد عدد حقيقي y حيث $\overrightarrow{OL}=y\vec{j}$

وبما أنّ $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OL}$ (لأن الرّباعي $OPML$ متوازي أضلاع)

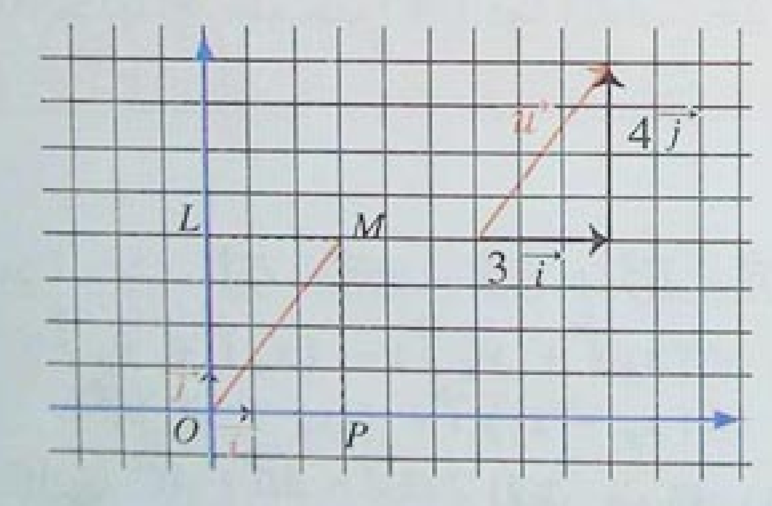
نستنتج أنه توجد ثنائية من الأعداد الحقيقيّة $(x;y)$ بحيث $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}$

2) ليكن $\vec{u}$ شعاعا كيفيا من المستوي.

نرمز بالرّمز M للنقطة المعرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$. حسب البرهان السابق توجد ثنائية من الأعداد الحقيقيّة $(x;y)$ بحيث $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}$ أي $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}$

- نلاحظ في كلّ من الأثباتين (1) و (2) أنّ ثنائية الأعداد الحقيقيّة $(x;y)$ وحيدة ، لأنه:

إذا كان $x\vec{i}+y\vec{j}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ فإنّ $x=x'$ و $y=y'$



مثال

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OL}=3\vec{i}+4\vec{j}$

النقطة M إحداثياها $(3;4)$

الشّعاع $\overrightarrow{OM}$ مركباه $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

لدينا $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}$ ومنه الشّعاع $\vec{u}$ مركباته $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

نتائج:

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي ، و $\vec{u}$ شعاع مركبتاه $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ، و $\vec{v}$ شعاع مركبتاه $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ ، و k عدد حقيقي.

1) تساوي شعاعين: $\vec{u}=\vec{v}$ يكافئ: [$x=x'$ و $y=y'$].

2) مجموع شعاعين: مركبتا المجموع $\vec{u}+\vec{v}$ هما $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$

3) مركبتا الشّعاع $k\vec{u}$ هما $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$



برهان النتائج السابقة:

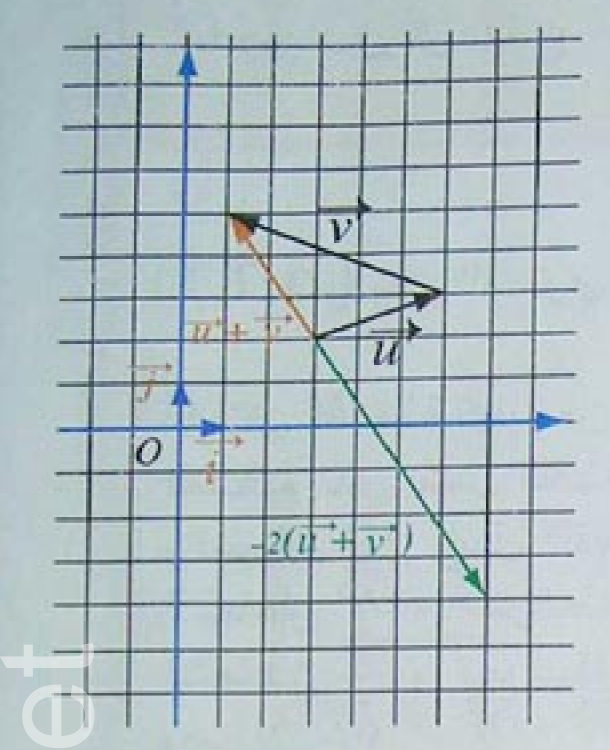
1) نضع M ، M' حيث $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OM'}$. لدينا $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}$ يكافئ $M=M'$.
، تالي [$x=x'$ و $y=y'$]

2) لدينا : $\vec{u}+\vec{v}=(x\vec{i}+y\vec{j})+(x'\vec{i}+y'\vec{j})$

$=x\vec{i}+x'\vec{i}+y\vec{j}+y'\vec{j}$ (تطبيق خواص جداء شعاع بعدد حقيقي)

$=(x+x')\vec{i}+(y+y')\vec{j}$

3) لدينا : $k\vec{u}=k(x\vec{i}+y\vec{j})=kx\vec{i}+ky\vec{j}$



مثال:

لدينا في الشكل المقابل: $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ ، ومنه $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}3+(-5)\\1+2\end{pmatrix}$

أي $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

$-2(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix}-2\times(-2)\\-2\times3\end{pmatrix}$ ، ومنه $-2(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$

- **حساب مركبتي شعاع وإحداثيي منتصف قطعة مستقيم**

مبرهنة4

لتكن $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) مركبتا الشّعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

2) إحداثيا M منتصف $[AB]$ هما $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}, \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

برهان:

1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(x_B\vec{i}+y_B\vec{j})-(x_A\vec{i}+y_A\vec{j})$

$=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}$

2)لدينا $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ (أنظر طرائق وتمارين محلولة (1)) ولتكن (x_M , y_M) إحداثيي M.
ومنه نستنتج أن : $2x_M=x_A+x_B$ و $2y_M=y_A+y_B$ ومنه المطلوب.

- **شرط الارتباط الخطي لشعاعين**

مبرهنة5

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

يكون الشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا إذا و فقط إذا كان $xy'-x'y=0$.

برهان:

- إذا كان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ مرتبطين خطيا ، فإنّ أحدهما يساوي جداء الآخر بعدد حقيقي:
نفرض أنّ $\vec{v}=k\vec{u}$ (في حالة $\vec{u}=k\vec{v}$ يتم البرهان بنفس الطريقة الآتية)
إنّ $x'=kx$ و $y'=ky$ ، ومنه $xy'-x'y = x(ky) - (kx)y = 0$
وبالتالي: إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا فإنّ $xy'-x'y = 0$

- إذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ حيث $xy'-x'y = 0$. لنبيّن أنهما مرتبطان خطيا .

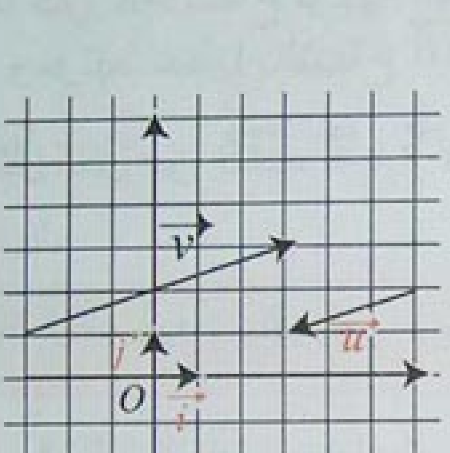
نميّز حالتين:

الحالة (1): الشعاعان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ معدومان ، وبالتالي فهما مرتبطان خطيا.

الحالة (2): أحد الشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ غير معدوم وليكن $\vec{u}$ ، وبالتالي فإنّ إحدى مركباته x أو y غير معدومة، ولتكن $y\neq 0$ (وبنفس الطريقة نبرهن في حالة x).

بما أنّ $xy'-x'y = 0$ فإنّ $x' = \frac{y'}{y}x$

وبوضع $\frac{y'}{y} = k$ نجد $y' = ky$ و $x' = kx$ وبالتالي $\vec{v}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$



ومنه $\vec{v}=k\vec{u}$ وبالتالي $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا.
وبالتالي: إذا كان $xy'-x'y = 0$ فإنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا.

مثال:

في الشكل لدينا $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

نستطيع التحقق من أن $6\times(-1) -2(-3)=0$ وكذلك $\vec{v} = -2\vec{u}$

ملاحظة:

تسمّى المساواة $xy'-x'y = 0$ شرط الارتباط الخطي لشعاعين ويمكن أن تكتب $xy'=x'y$
وهي تترجم في جدول تناسبية كالآتي:

مركبتا الشعاع $\vec{u}$	x	y
مركبتا الشعاع $\vec{v}$	x'	y'

($\times k$)

- المسافة بين نقطتين

مبرهنة6

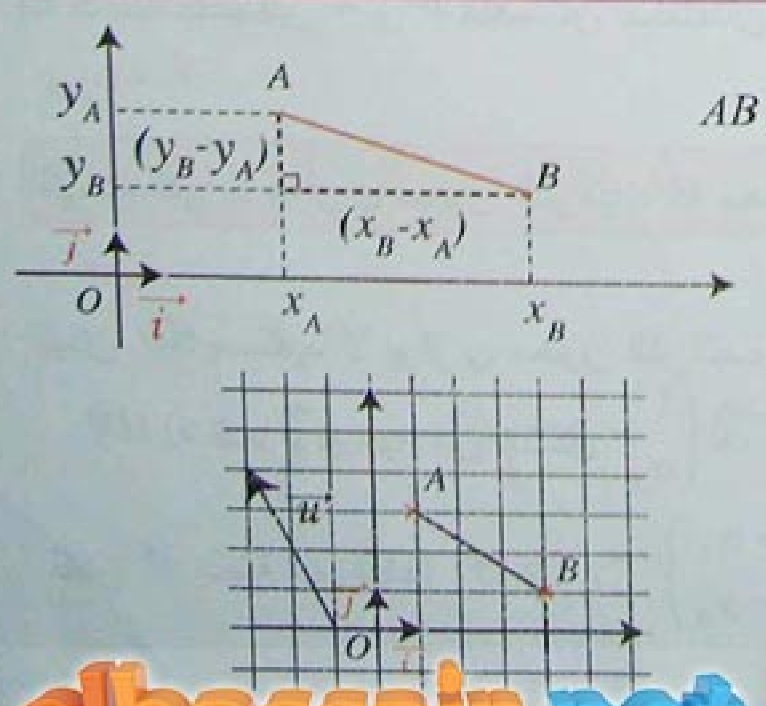
ليكن $A(x_A\,;\,y_A)$ ، $B(x_B\,;\,y_B)$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
المسافة بين النقطتين A و B تساوي $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

يمكن البرهان على أنّ $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
باستعمال مبرهنة فيثاغورس في المثلث ABC.

مثال:

في الشكل $A(4\,;1)$ و $B(1\,;3)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

لدينا $AB=\sqrt{(1-4)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$
و $\|\vec{u}\|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$



3. معادلة مستقيم

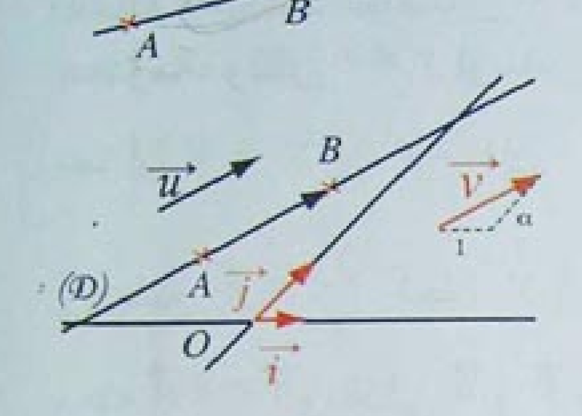
في كلّ ما سيأتي نعتبر المستوي مزوّدا بمعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

• شعاع توجيه مستقيم

كلّ نقطتين A و B متمايزتين تعينان مستقيما (AB) ، ومن أجل كلّ نقطة M من (AB) فإنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ مرتبطان خطيا. نقول أنّ $\overrightarrow{AB}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB).

تعريف 8

> يسمّى كلّ شعاع له منحى مستقيم، شعاع توجيه لهذا المستقيم.



ملاحظة:

إذا كان $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيه للمستقيم (D) ، فكلّ شعاع غير معدوم ومرتبط خطيا بالشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو أيضا شعاع توجيه للمستقيم (D)

مثال: كلّ من $\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D).

تعريف 9

> معامل توجيه مستقيم هو المركبة الثانية لشعاع توجيه لهذا المستقيم مركبته الأولى تساوي واحد.

في الشكل السابق معامل توجيه (D) هو العدد a.

• معادلة مستقيم يوازي محور التّراتيب

A و B نقطتان لهما نفس الفاصلة a أي $x_A = x_B = a$. كلّ نقطة M من المستقيم (AB) فاصلتها $x_M = a$. إنّ المستقيم (AB) يوازي محور التّراتيب.

الشّعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB)

مبرهنة 7

> 1) كلّ مستقيم يوازي محور التّراتيب له معادلة من الشّكل $x = a$ و a عدد حقيقي.
> 2) مجموعة النّقط $M(x;y)$ بحيث $x = a$ و a عدد حقيقي هي مستقيم يوازي محور التّراتيب.

• معادلة مستقيم لا يوازي محور التّراتيب

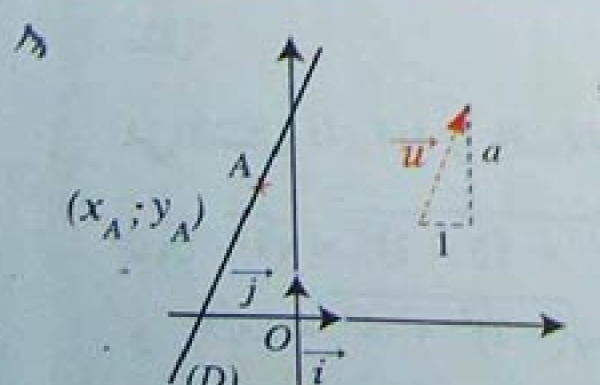
إذا كانت للنّقطتين A و B فاصلتان مختلفتان أي $x_A \neq x_B$ فإنّ المستقيم (AB) لا يوازي محور التّراتيب

مبرهنة 8

> كلّ مستقيم لا يوازي محور التّراتيب له معادلة من الشّكل $y = ax + b$.

برهان:

ليكن (D) مستقيما لا يوازي محور التّراتيب ويشمل النّقطة $A(x_A;y_A)$، إنّ (D) له شعاع توجيه من الشكل $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$.



لتكن M نقطة إحداثياها $(x;y)$، إنّ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$

لدينا: M تنتمي إلى (D) يكافئ $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا.
ومنه M تنتمي إلى (D) يكافئ $1\times(y-y_A)=a\times(x-x_A)$
أي : $y = ax - ax_A + y_A$
وبوضع $-ax_A + y_A = b$ تصبح المعادلة من الشكل $y = ax + b$

مبرهنة 9

a ، b عددان حقيقيان. مجموعة النقط $M(x\,;y)$ حيث $y = ax + b$ هي مستقيم (D) لا يوازي محور التراتيب.

المستقيم (D) هو التمثيل البياني للدالة التآلفية $x \mapsto ax + b$

الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) ، والعدد a هو معامل توجيهه.

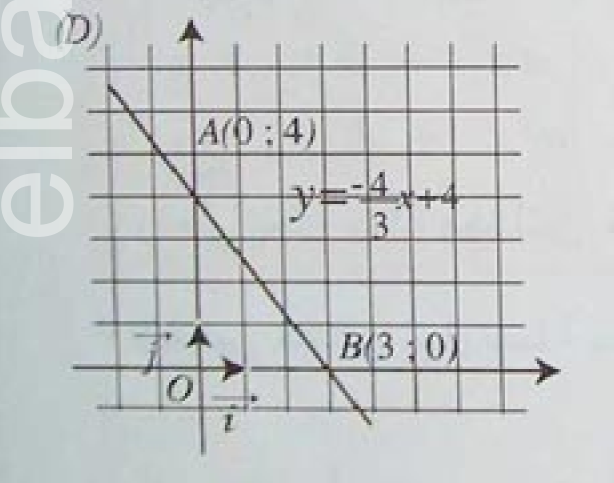
مثال 1:

(D_1): $x=-2$ ، (D_2): $y=2x+5$ ، (D_3): $y=4$

معادلة (D_1): $x = -2$ — $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه لـ (D_1) — لا يوجد معامل التوجيه

معادلة (D_2): $y = 2x + 5$ — $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه لـ (D_2) — معامل توجيهه هو 2

معادلة (D_3): $y = 4$ — $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ شعاع توجيه لـ (D_3) — معامل توجيهه هو 0



مثال2: المعادلة $4x + 3y = 12$ تكتب على الشكل
$y = \frac{-4}{3}x + 4$ ، فهي معادلة مستقيم (D) معامل توجيهه هو $\frac{-4}{3}$
كلّ من $(0\,;4)$ و$(3\,;0)$ تحقق المعادلة: $4x + 3y = 12$ ، ومنه النقطتان $A(0\,;4)$ ، $B(3\,;0)$ تنتميان إلى (D) .

• حساب معامل توجيه مستقيم

مبرهنة 10

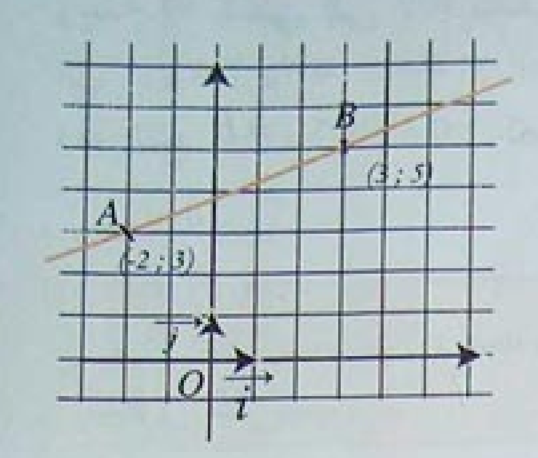
من أجل كلّ نقطتين $A(x_A\,;y_A)$ ، $B(x_B\,;y_B)$ في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $x_A \neq x_B$ ، معامل توجيه المستقيم (AB) يساوي $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

برهان:

بما أنّ $x_B \neq x_A$ فالمستقيم (AB) لا يوازي محور التراتيب ، وبالتالي فله معادلة من الشكل $y = ax+b$
وبما أنّ كلاً من النقطتين A ، B تنتمي إلى (AB) فإنّ $y_A = a\,x_A+b$ و $y_B = a\,x_B+b$
ومنه $y_B - y_A = a(x_B - x_A)$ ، وبالتالي $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



مثال: معامل توجيه المستقيم (AB) في الشكل المقابل يساوي



$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{3-(-2)} = \frac{2}{5}$$

(AB) له معادلة من الشكل $y = \frac{2}{5}x + b$

(يمكن حساب b بسهولة)

• **شرط توازي مستقيمين**

مبرهنة 11

يكون المستقيمان (D) و (D') اللذان معادلتاهما $y = ax+b$ ، $y = a'x+b'$ على الترتيب، متوازيين إذا وفقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه. أي: $(D) // (D')$ يكافئ $a = a'$.

برهان:

لدينا $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) ، و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\a'\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D')

المستقيمان (D) و (D') متوازيان إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ مرتبطين خطيا، أي $1\times a = 1\times a'$ وبالتالي $a = a'$.

4. جملة معادلتين خطيتين لمجهولين

نعتبر فيما يلي $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ و $(a'\,;b') \neq (0\,;0)$

تعريف 10

نسمي جملة معادلتين خطيتين لمجهولين كل جملة

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ حيث a، b، c، a'، b'، c' أعداد معلومة.

ونعني بحل جملة معادلتين خطيتين لمجهولين إيجاد الثنائيات $(x\,;y)$ التي تحقق المعادلتين في آن واحد

• **التفسير البياني لحل جملة معادلتين خطيتين لمجهولين**

لتكن جملة المعادلتين $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

المعادلة $ax + by = c$:

• تكتب على الشكل $x = \frac{c}{a}$ من أجل $b = 0$

• تكتب على الشكل $y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$ من أجل $b \neq 0$

فهي في الحالتين معادلة مستقيم (D) ، وكذلك بالنسبة إلى $a'x + b'y = c'$ هي معادلة مستقيم (D').

$(x\,;y)$ حل لجملة المعادلتين معناه أن النقطة $M(x\,;y)$ تنتمي إلى كل من المستقيمين (D) و (D')، وهذان المستقيمان هما إما متقاطعان ، وإما متوازيان تماما ، وإما متطابقان وبالتالي:



جملة المعادلتين

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

إمّا لها حل واحد ، وإمّا لا حل لها، وإمّا لانهاية لها من الحلول، وذلك حسب الوضع النّسبي للمستقيمين (D) و (D').

- عدد حلول جملة معادلتين خطيتين لمجهولين

مبرهنة 12

لتكن جملة المعادلتين (S) :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}.$$

- إذا كان $ab' - ba' \neq 0$ فإنّ الجملة (S) تقبل حلا وحيدا.
- إذا كان $ab' - ba' = 0$ فالجملة (S) إمّا لا حل لها، وإمّا لانهاية لها من الحلول.

تفسير المبرهنة

$ab' - ba' \neq 0$	$ab' - ba' = 0$	
(D) ، (D') متقاطعان في M الجملة لها حل وحيد $(x_M ; y_M)$	لا توجد نقطة مشتركة بين (D) ، (D') والجملة ليس لها حل	$(D') = (D)$ والجملة لها لانهاية من الحلول

طرائق وتمارين محلولة

1. الحساب الشعاعي

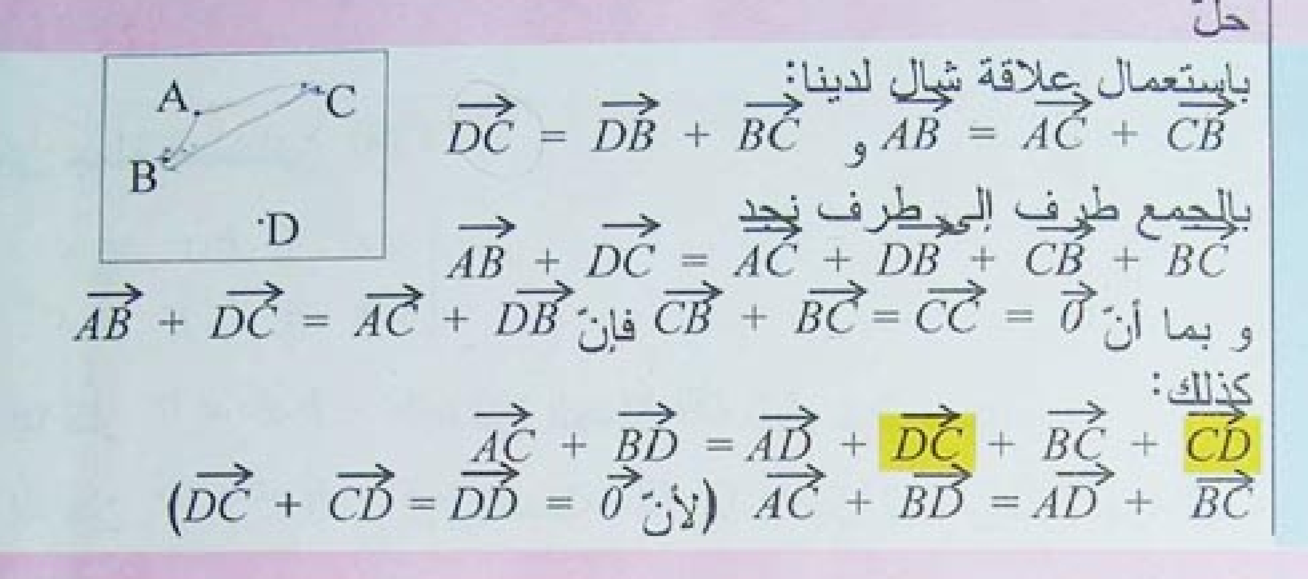
• استعمال خواص مجموع شعاعين (علاقة شال)

A ، B ، C ، D أربع نقط من المستوي.

بيّن أن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

وكذلك $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

حلّ



باستعمال علاقة شال لدينا:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$

بالجمع طرف إلى طرف نجد

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}$

و بما أنّ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$ فإنّ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

كذلك:

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ (لأنّ $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$)

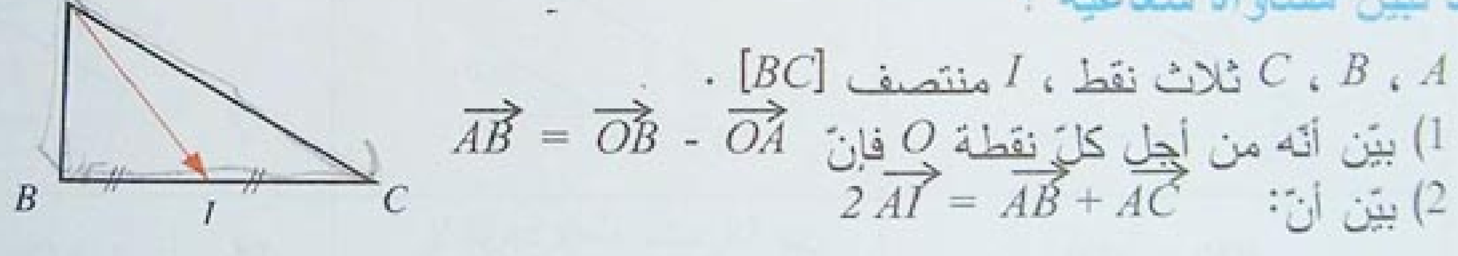
تعاليق

• في التعبير عن شعاع باستعمال علاقة شال نستعمل نقطا مناسبة بالنظر إلى ما هو مطلوب.

طريقة

• في مجموع شعاعين يمكن تطبيق نفس الخواص المعروفة في المجموع الجبري، مثل: التبديل والتجميع.

• كيف نبيّن مساواة شعاعية ؟



A ، B ، C ثلاث نقط ، I منتصف $[BC]$.

1) بيّن أنه من أجل كلّ نقطة O فإنّ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

2) بيّن أنّ: $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

حلّ

1) لدينا حسب علاقة شال $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ ومنه

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = (-\overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

2) لدينا حسب علاقة شال:

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}$

وبالجمع طرف إلى طرف نجد:

$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI})$

وبما أنّ $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \vec{0}$ لأنّ (I منتصف $[BC]$) فإنّ

$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

تعاليق

• الشّعاعان $\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{OA}$ متعاكسان $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$.

• نعبّر عن الشّعاع $\overrightarrow{AI}$ باستعمال كلّ من الشّعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$.

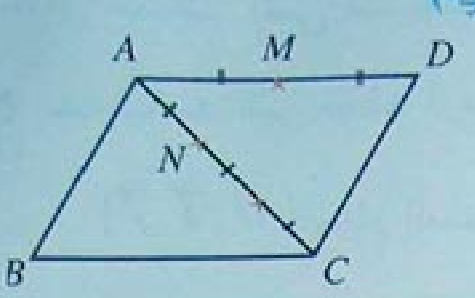
طريقة

• لإثبات صحة مساواة شعاعية يمكن تفكيك أحد الطرفين والوصول إلى الطرف الآخر باستعمال علاقة شال وعبارات شعاعية تترجم وضعيات معطاة مثل:

$\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \vec{0}$ أو $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$ أو $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BI}$ ... للتّعبير عن أن I منتصف $[BC]$.

أو $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$ للتعبير عن أن M ، N منتصفي $[AB]$ ، $[AC]$ في المثلث ABC.

- **جداء شعاع بعدد حقيقي (استعمال الأشعة للبرهان على أنّ نقطا في استقامية)**



$ABCD$ متوازي أضلاع ، و M منتصف $[AD]$ ، و N نقطة بحيث $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

بيّن أنّ النقط B ، N ، M في استقامية.

تعاليق

- سنبيّن أنّ الشّعاعين $\overrightarrow{BN}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطان خطيا.
- نعبّر عن كلّ من الشّعاعين $\overrightarrow{BN}$ ، $\overrightarrow{BM}$ بدلالة الشّعاعين $\overrightarrow{BA}$، $\overrightarrow{BC}$

حلّ

لدينا حسب علاقة شال:

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad (\text{لأنّ } \overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})$$

$$= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$

$$= \overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

ومنه $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad \ldots (1)$

وكذلك: $\overrightarrow{BM} = BA + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

ومنه $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad (\text{لأنّ } \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC})$

من (1) نجد $\frac{3}{2}\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

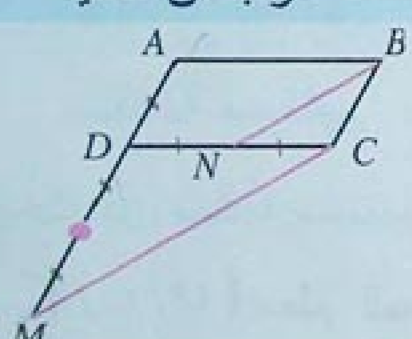
وبالتالي فان $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BN}$ والشعاعين $\overrightarrow{BM}$ ، $\overrightarrow{BN}$ مرتبطان خطيا.

ونستنتج أن النقط B ، N ، M في استقامية.

طريقة

- لإثبات أن نقطا B،N،M في استقامية يمكن إثبات أن شعاعين مثل $\overrightarrow{BN}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطان خطيا

- **الارتباط الخطي لشعاعين (استعمال الأشعة لبرهان التوازي)**



$ABCD$ متوازي أضلاع ، النقطة N منتصف $[CD]$ ، والنقطة M معرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{AD}$.

بيّن أنّ المستقيمين (BN) و (CM) متوازيان.

تعاليق

- نبحث عن علاقة من الشكل $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{BN}$
- $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CN}$ لأنّ N منتصف $[CD]$
-

حلّ

لدينا: $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}$ حسب علاقة شال

$$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$$

$$= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{AD} \quad (\text{لأنّ } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD})$$

ومنه $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AD}$

وبالتالي $2\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{AD}$

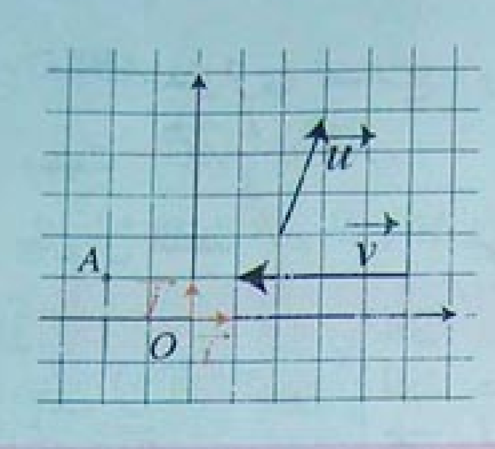
$$= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{CM}$$

طريقة

- لإثبات أن مستقيمين (مثل (BN) و (CM)) متوازيان يمكن إثبات أن الشّعاعين $\overrightarrow{BN}$ و $\overrightarrow{CM}$ مرتبطان خطيا.



2. المعلم على مستقيم، وفي المستوي



- **حساب إحداثيي نقطة أومركبتي شعاع**

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي ، $A(-2;1)$ ، $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$.

أ) احسب إحداثيي النقطة A' صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$.

ب) احسب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{OM}$ حيث $\overrightarrow{OM}=2\vec{u}-3\vec{v}$.

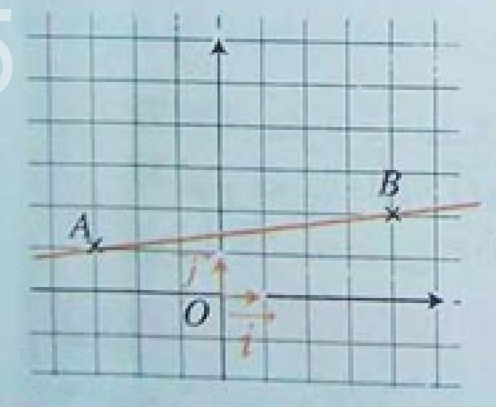
تعاليق	حلّ
• مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ • تساوي شعاعين معناه تساوي مركباتيهما.	أ) نفرض $A'(x;y)$ ، فيكون $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}x-(-2)\\y-1\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}$ من $\overrightarrow{AA'}=\vec{u}$ نجد $\begin{cases}x+2=1\\y-1=3\end{cases}$ ومنه $x=-1$ و $y=4$ وبالتالي $A'(-1;4)$. ب) لدينا: $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ و $\vec{v}=-4\vec{i}$ ومنه $\overrightarrow{OM}=2\vec{u}-3\vec{v}$ $\overrightarrow{OM}=2(\vec{i}+3\vec{j})-3(-4\vec{i})=2\vec{i}+6\vec{j}+12\vec{i}$ إذن $\overrightarrow{OM}=14\vec{i}+6\vec{j}$ وبالتالي $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}14\\6\end{pmatrix}$.

طريقة

- للبحث عن إحداثيي نقطة أو مركبتي شعاع يمكن كتابة مساواة شعاعية على شكل جملة معادلتين
- لتبسيط الحسابات على مركبات الأشعة يمكن إجراؤها عموديا كما يأتي على سبيل المثال:

$$2\vec{u}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} ، -3\vec{v}\begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix} \text{ ومنه } 2\vec{u}-3\vec{v}\begin{pmatrix}2+12\\6+0\end{pmatrix} \text{ أي } 2\vec{u}-3\vec{v}\begin{pmatrix}14\\6\end{pmatrix}$$

3. معادلة مستقيم



- **البحث عن معادلة مستقيم معرّف بنقطتين**

$(O;i,j)$ معلم للمستوي . A ، B نقطتان حيث $A(-3;1)$ ، $B(4;2)$

جد معادلة للمستقيم (AB) .

تعاليق	حلّ
• المستقيم (AB) لا يوازي محور التراتيب • يمكن تشكيل جملة معادلتين للبحث عن a ، b. • يمكن الحصول على	بما أنّ النقطتين A ، B ليس لهما نفس الفاصلة فإنّ للمستقيم (AB) معادلة من الشكل $y=ax+b$. إحداثيا النقطة A تحقق المعادلة $y=ax+b$ ومنه $1=a(-3)+b$ ومنه $b=3a+1$ إحداثيا النقطة B تحقق المعادلة $y=ax+b$ إذن $2=a(4)+b$ ومنه $b=-4a+2$ وبالتالي : $3a+1=-4a+2$ ومنه $7a=1$ أي $a=\frac{1}{7}$

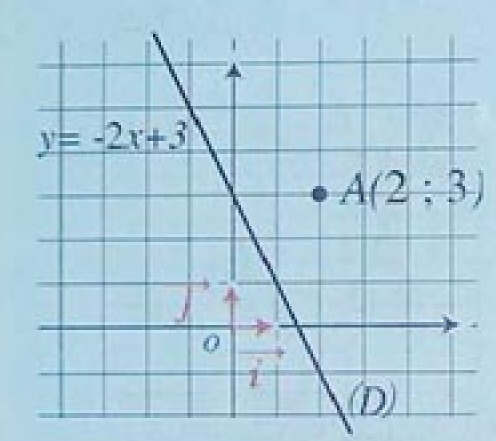
معامل توجيه المستقيم (AB) من العلاقة: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$	ومنه $b = 3 \times \frac{1}{7} + 1 = \frac{10}{7}$ النتيجة: المعادلة التّي نبحث عنها هي: $y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7}$ • يمكن إيجاد معادلة للمستقيم (AB) باستعمال الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ حيث النقطة $M(x\,;y)$ تنتمي إلى (AB). احسب مركبتي $\overrightarrow{AB}$ ومركبتي $\overrightarrow{AM}$ ، ثمّ طبّق شرط الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$.

طريقة

• لإيجاد معادلة مستقيم معرّف بنقطتين يمكن إتباع إحدى الطرائق الآتية:
(1) البحث عن b،a في المعادلة $y=ax+b$ إذا كان هذا المستقيم لا يوازي محور التّراتيب .
(2) استعمال معامل توجيه المستقيم إذا كان هذا المستقيم لا يوازي محور التّراتيب .
(3) استعمال شرط الارتباط الخطي لشعاعين .

• البحث عن معادلة مستقيم يشمل نقطة معلومة ويوازي مستقيما معلوما

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي . (D) مستقيم معادلته $y = -2x + 3$
و A نقطة حيث $A(2\,;3)$.
جد معادلة للمستقيم (D') الذي يشمل النقطة A ويوازي المستقيم (D)



تعاليق	حلّ
• الشّعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه لكل من (D) ، (D') • النّقطة A تنتمي إلى (D')	بما أنّ المستقيمين (D) و (D') متوازيان فإنّ لهما نفس معامل التوجيه $a = -2$ للمستقيم (D') معادلة من الشكل $y = -2x + b$ إحداثيا النّقطة A تحقق المعادلة $y = -2x + b$ ومنه $3 = -2(2) + b$ ومنه $b = 7$ النتيجة: معادلة (D') هي: $y = -2x + 7$

طريقة

• لإيجاد معادلة مستقيم يشمل نقطة معلومة ويوازي مستقيما معلوما، يمكن استغلال ما يأتي:
(1) للمستقيمين نفس معامل التوجيه a ، وتوظيفه في معادلة من الشكل $y=ax+b$.
(2) للمستقيمين شعاعا توجيه متوازيان، واستعمال شرط الارتباط الخطي لشعاعين.

4. جملة معادلتين خطيتين لمجهولين

• تعيين عدد حلول جملة معادلتين خطيتين لمجهولين والبحث عنها

نعتبر جمل المعادلتين الآتية: عيّن عدد حلول كلّ جملة ، وجدها.

$(S_1):\begin{cases}2x + y = 8 \cdots\cdots(1)\\ x - 3y = -3 \cdots\cdots(2)\end{cases}$ ، $(S_2):\begin{cases}-x + 2y = 6 \cdots\cdots(1)\\ 3x - 6y = 12 \cdots\cdots(2)\end{cases}$ ، $(S_3):\begin{cases}-x + 2y = 6 \cdots\cdots(1)\\ 3x - 6y = -18 \cdots\cdots(2)\end{cases}$



حلّ

1) الجملة (S_1)

نكتب المعادلة المختزلة لكل من (D) و (D'):

لدينا $2x + y = 8$ تكافئ $y = -2x + 8$

و $x - 3y = -3$ تكافئ $y = \frac{1}{3}x + 1$

بما أنّ $-2 \neq \frac{1}{3}$ فإنّ المستقيمين (D) و (D') متقاطعان ،

ومنه الجملة (S_1) تقبل حلا وحيدا

إذا كان $(x ; y)$ حل للجملة (S_1) فإنّ $x = 3y - 3$

(حسب المعادلة (2)) .

وبالتّعويض في المعادلة (1) نجد $2(3y-3) + y = 8$ وهي تكافئ $y=2$.

وبالتّعويض في المعادلة (2) نجد $x = 3$.

وبما أنّ الجملة (S_1) تقبل حلا وحيدا فهو $(3 ; 2)$

2) الجملة (S_2)

نحسب المقدار $ab' - ba'$ فنجد $ab'-ba'=(-1)(-6)-2\times3=0$

وبالتّالي فالجملة إمّا لها عدد غير منته من الحلول وإمّا ليس لها حل.

الجملة (S_2) تكافئ $\begin{cases} -x + 2y = 6 \\ -x + 2y = -4 \end{cases}$ بعد قسمة طرفي المعادلة (2) على -3

لا توجد قيم لـ $(x ; y)$ تجعل $-x + 2y$ يساوي 6 و-4 في آن واحد

ومنه الجملة (S_2) لا حل لها.

3) الجملة (S_3)

نحسب المقدار $ab' - ba'$ فنجد $ab'-ba'=(-1)(-6)-2\times3=0$

وبالتّالي فالجملة إمّا لها لانهاية من الحلول وإمّا لا حل لها.

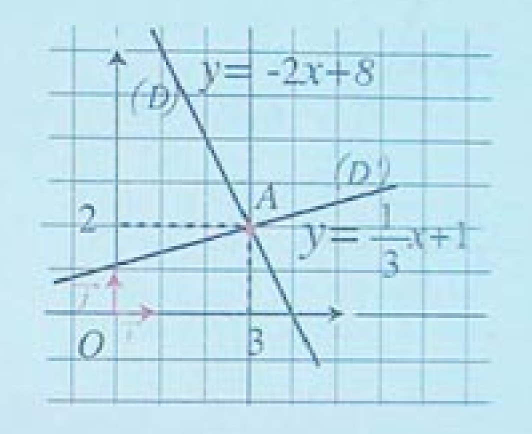
الجملة (S_2) تكافئ $\begin{cases} -x + 2y = 6 \\ -x + 2y = 6 \end{cases}$ بعد قسمة طرفي المعادلة (2) على -3

كلّ نقطة من المستقيم (D) الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x + 3$ إحداثياها تحقق الجملة (S_3) .

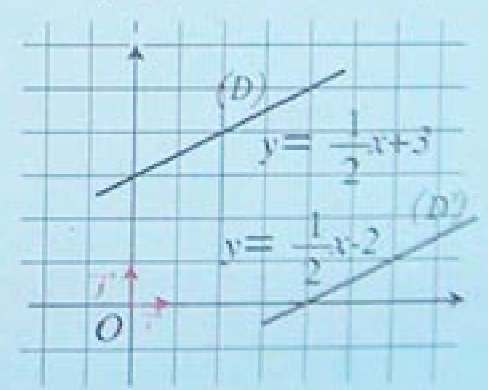
نستنتج أنّ الجملة (S_3) لها لا نهاية من الحلول من الشّكل: $(x , \frac{1}{2}x + 3)$ و x عدد حقيقي.

تعاليق

- في كلّ جملة نعتبر المعادلة الأولى هي معادلة مستقيم (D) والثانية لمستقيم (D')
- يمكن التحقق من عدد حلول الجملة (S_1) بحساب المقدار $ab' - ba'$
$ab'-ba'=2(-3)-1\times1=-7\neq0$
- يمكن حل الجملة (S_1) بطريقة تعتمد أساسا على الجمع.
- يمكن حل الجملة (S_1) بيانيا كما يأتي:



- يمكن التحقق بيانيا من أنّ الجملة (S_2) لا حل لها.



- يمكن استعمال الحاسبة البيانية لحل جملة معادلتين خطيتين.

طريقة

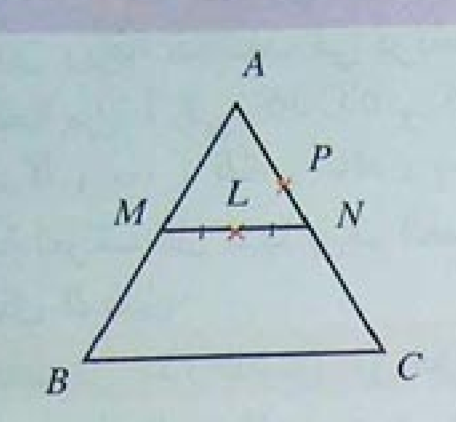
لمعرفة عدد حلول جملة معادلتين $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ يمكن حساب المقدار $ab' - ba'$

– فإذا كان غير معدوم ، فالجملة تقبل حلا وحيدا نبحث عنه بطريقة التعويض أو الجمع.

– وإذا كان معدوما، نحوّل جملة المعادلتين إلى الشّكل $\begin{cases} Ax + By = C \\ Ax + By = C' \end{cases}$ عندئذ :

إن كان $C \neq C'$ فالجملة لاتقبل حلا ،وإن كان $C = C'$ فللجملة عدد غير منته من الحلول

الهدف: تعلم طريقة للبرهنة باستعمال معلم



ABC مثلث متقايس الأضلاع . M ، N منتصفا $[AB]$ ، $[AC]$ على الترتيب ، و L منتصف $[MN]$. P النقطة المعرفة بالعلاقة $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AP}$.

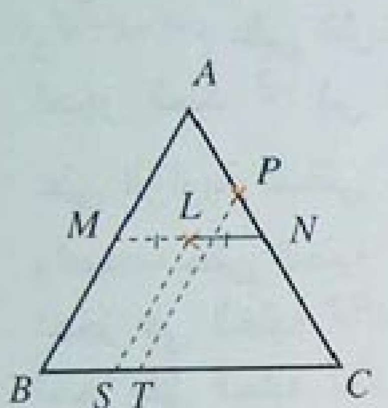
بيّن أنّ النقط B ، L ، P في استقامية.

حلّ

نعتبر المعلم $(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$.

فيكون فيه $A(O;1)$ ، $C(1;0)$ ، $M(0;\frac{1}{2})$.

حساب الإحداثيي (x_P, y_P) للنقطة P.



لدينا $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AP}$ ومنه $\begin{cases}1=3x_P\\-1=3(y_P-1)\end{cases}$ (لأن: $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}x_P\\y_P-1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$)

نجد أنّ $x_P=\frac{1}{3}$ و $y_P=\frac{2}{3}$ ومنه $P\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

حساب الإحداثيي (x_L , y_L) للنقطة L.

لدينا $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}=2(2\overrightarrow{ML})$

ومنه $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{ML}$ ، وبالتالي $\begin{cases}1=4x_L\\0=4(y_L-\frac{1}{2})\end{cases}$ (لأن: $\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}x_L\\y_L-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$)

نجد أنّ $x_L=\frac{1}{4}$ و $y_L=\frac{1}{2}$ ومنه $L\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$

مركبات الشعاعين $\overrightarrow{BL}$ ، $\overrightarrow{BP}$:

$\overrightarrow{BL}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ و $\overrightarrow{BP}\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

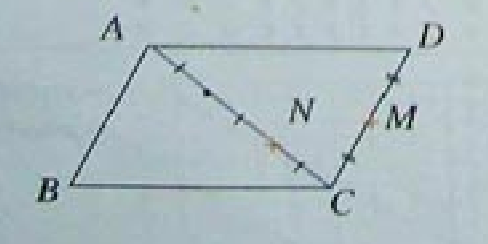
بما أن $0=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ فإنّ الشعاعين $\overrightarrow{BL}$ ، $\overrightarrow{BP}$ مرتبطان خطيا.

نستنتج أنّ النقط B ، L ، P في استقامية.

خلاصة

- عند حل بعض المسائل الهندسية يمكن اللجوء إلى تعريف معلم تكون فيه إحداثيات نقط الشكل بسيطة ، أو حسابها بسيط، ثمّ العمل فيه باستغلال ما توفره الهندسة التحليلية من قواعد حسابية لإثبات المطلوب.

إعادة استثمار



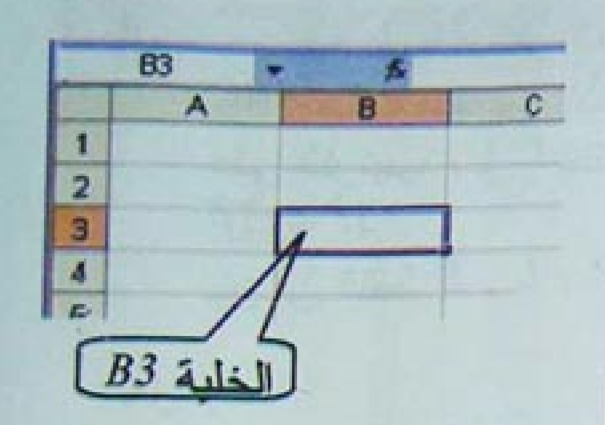
$ABCD$ متوازي أضلاع ، النقطة M منتصف $[CD]$ ، والنقطة N معرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

بيّن باستعمال معلم مناسب أنّ النقط M ، N ، B في استقامية.





معلومات عن برنامج إكسال



تتكوّن ورقة الحساب في برنامج إكسال من جدول له 65536 سطرا مرقمة من 1 إلى 65536 و 256 عمودا مرقمة بأحرف على المنوال A ، B ، ... ، AB ، AC ، ... ، IV . فهي تحتوي على 16777216 خلية تعرّف كلّ منها برقم العمود متبوعا برقم السّطر مثل: $B3$ كما في الشّكل المقابل.

الهدف من هذا النشاط هو حل جملة معادلتين بيانيا باستعمال برنامج إكسال

نعتبر جملة المعادلتين $\begin{cases} -x + y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$

- اكتب كلا من المعادلتين على الشكل $y = ax + b$
- افتح ورقة جديدة في برنامج إكسال، ثمّ اكتب في الخلايا $A1$ ، $A2$ ، $A3$ كلّ من x و $y=x+2$ و $y=-x+4$ على التّرتيب.
- احجز العدد -3 في الخلية $B1$ و العدد -2 في الخلية $C1$. حدّد الخليتين $B1$ ، $C1$ وضع الزّالق على الزّاوية السفلى على يمين الخلية $C1$ فيتحول إلى رمز $+$ ثمّ انقر على الزّر الأيمن للفأرة واسحب حتى الخلية $L1$

	A	B	C	D	E	F
1	x	-3	-2			
2	y=x+2					

- احجز في الخلية $B2$ العبارة $=B1+2$ ثمّ انقر على لمسة ↵
- احجز في الخلية $B3$ العبارة $=-B1+4$ ثمّ انقر على لمسة ↵

	A	B	C
1	x	-3	
2	y=x+2	=B1+2	
3	y=-x+4		

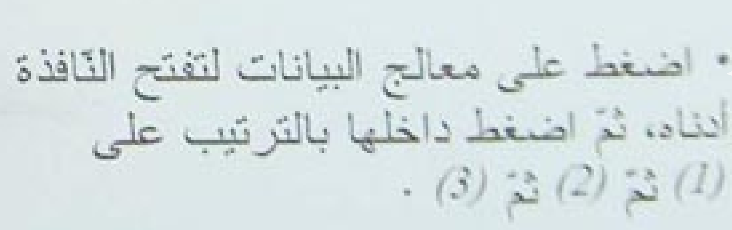
- حدّد الخليتين $B2$ ، $B3$ وضع الزّالق على الزّاوية السفلى على اليمين للخلية $B3$ فيتحول إلى رمز $+$ ثمّ انقر على الزّر الأيمن للفأرة واسحب حتى العمود L

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	y=x+2	-1										
3	y=-x+4	7										

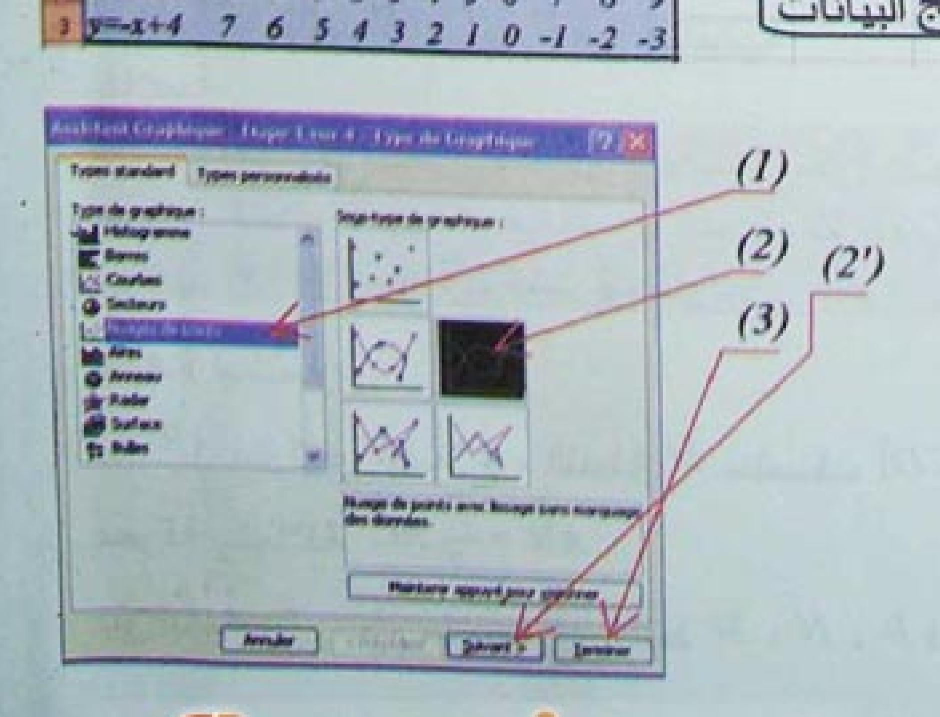
- تحديد مجموعة الخلايا من $A1$ إلى $L3$:
- انقر على الخلية $A1$ وبالمحافظة على وضع الضغط على الزّر الأيمن للفأرة، اسحب حتى الخلية $L3$.

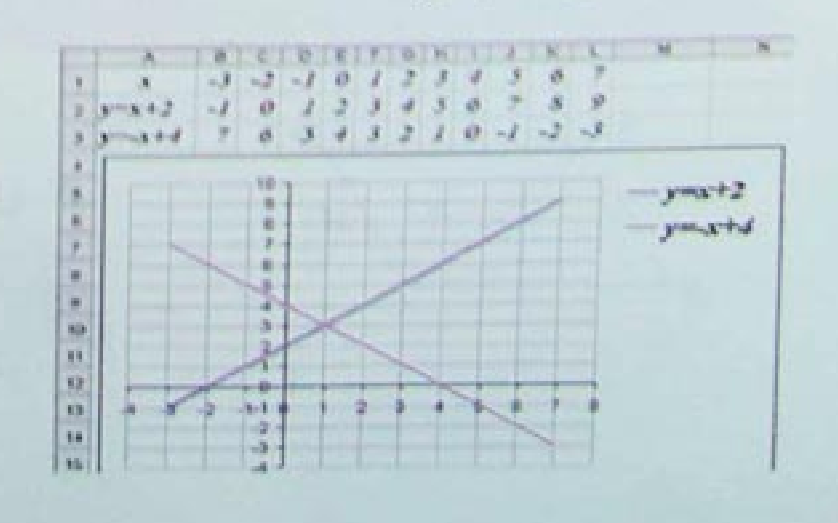
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	y=x+2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	y=-x+4	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3

معالج البيانات



- اضغط على معالج البيانات لتفتح النّافذة أدناه، ثمّ اضغط داخلها بالترتيب على (1) ثمّ (2) ثمّ (3) .
- يمكن الضغط على $(2')$ لفتح نوافذ أخرى وتخصيص نوعية عرض الشكل لتحصل في النتيجة على ما يأتي:





حلّ مسألة إدماجية

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي.

أ) علّم النقط A ، B ، C حيث $A(-2;2)$ ، $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}+5\vec{j}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

ب) عيّن إحداثيي النقطة D بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع .

ج) النقطة M منتصف $[BC]$، والنقطة N تحقق $3\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}$.

- بيّن أنّ النقط D ، N ، M هي في استقامية.
- ماذا تمثّل النقطة N بالنسبة إلى المثلث BCD ؟

د) اكتب معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B ويوازي المستقيم (AC)

هـ) تحقق من أنّ $y=\frac{3}{5}x-\frac{12}{5}$ هي معادلة للمستقيم (CD). احسب إحداثيي D' نقطة تقاطع (Δ)و (CD)

و) لتكن $E(2;4)$ احسب أطوال أضلاع المثلث ACE ، واستنتج نوعه.

حلّ

أ) لدينا حسب المعطيات $B(3;5)$. ولتعليم النقطة C نحسب إحداثييها

لدينا $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C+2\\y_C-2\end{pmatrix}$ ومنه $\begin{cases}x_C+2=6\\y_C-2=-2\end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases}x_C=4\\y_C=0\end{cases}$ أي $C(4;0)$

ب) $ABCD$ متوازي أضلاع معناه $AD=BC$

وبما أن $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x_D+2\\y_D-2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4-3\\0-5\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ فإنّ $\begin{cases}x_D+2=1\\y_D-2=-5\end{cases}$

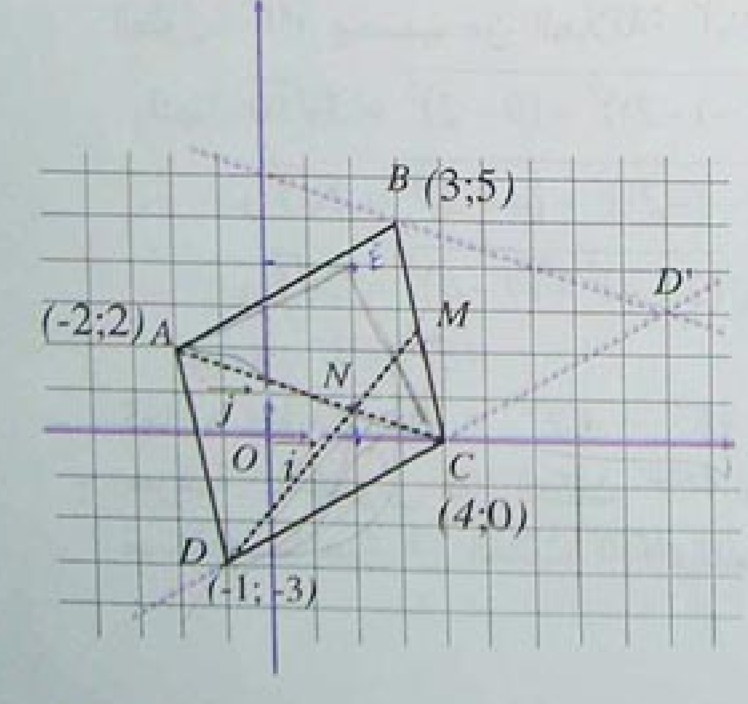
ومنه $\begin{cases}x_D=-1\\y_D=-3\end{cases}$ أي $D(-1;-3)$

ج) النقطة M منتصف $[BC]$ إحداثياها $\left(\frac{3+4}{2};\frac{5+0}{2}\right)$ أي $M\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$

ومنه $\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix}x_N-4\\y_N-0\end{pmatrix}$ ولدينا $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$

$3\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}$ تكافئ $\begin{cases}3(x_N-4)=-6\\3y_N=2\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}x_N=2\\y_N=\frac{2}{3}\end{cases}$ أي $N\left(2;\frac{2}{3}\right)$



ندرس الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{DM}$ و $\overrightarrow{DN}$

لدينا $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{11}{2}\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix}3\\\frac{11}{3}\end{pmatrix}$ ومنه $3\times\frac{11}{2}-\frac{9}{2}\times\frac{11}{3}=0$

وبالتالي فإنّ الشعاعين $\overrightarrow{DM}$ و $\overrightarrow{DN}$ مرتبطان خطيا ، ومنه النقط D ، N ، M هي في استقامية.

وضعية النقطة N بالنسبة إلى المثلث BCD :

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{DM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DN}$ ومنه N هي مركز ثقل المثلث BCD .

د) معادلة للمستقيم (Δ)

للمستقيمين (Δ) و (AC) نفس الميل a حيث $a=\frac{0-2}{4-(-2)}=-\frac{1}{3}$

ومنه للمستقيم (Δ) معادلة من الشكل $y=-\frac{1}{3}x+b$

وبما أنّ B تنتمي إلى (Δ) فإنّ $5=-\frac{1}{3}\times 3+b$ ، ومنه $b=6$

وبالتالي فإنّ $y=-\frac{1}{3}x+6$ هي معادلة للمستقيم (Δ) .

هـ) التحقق من أنّ $y=\frac{3}{5}x-\frac{12}{5}$ هي معادلة للمستقيم (CD):

لدينا $0=\frac{3}{5}\times 4-\frac{12}{5}$ و $-3=\frac{3}{5}\times(-1)-\frac{12}{5}$

أي أنّ كلا من إحداثيي النقطة C و النقطة D تحقق المعادلة $y=\frac{3}{5}x-\frac{12}{5}$ ، وبالتالي فهي معادلة للمستقيم (CD)

حساب احداثيي نقطة تقاطع (Δ)و (CD).

نحل جملة المعادلتين $\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+6 \\ y=\frac{3}{5}x-\frac{12}{5} \end{cases}$ فنجد $\begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases}$ ومنه $D'(9;3)$

و) حساب أطوال أضلاع المثلث ACE

الطول AC يحسب من العلاقة: $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$ ، وبنفس الطريقة نحسب AE و CE.

لدينا $AC=\sqrt{(4-(-2))^2+(0-2)^2}=2\sqrt{10}$

و $AE=\sqrt{(2-(-2))^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$

و $CE=\sqrt{(2-4)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$

ومنه $AE=CE$

كما نلاحظ أنّ $AE^2+CE^2=40$ و $AC^2=40$ أي $AE^2+CE^2=AC^2$ ، وحسب عكس مبرهنة فيثاغورس فإنّ المثلث ACE قائم في E .

نستنتج مما سبق أنّ المثلث ACE قائم في E ومتساوي السّاقين.

أصحيح أم خاطئ؟

1. للشعاعين المتعاكسين أو المتساويين نفس الطويلة.

2. للشعاعين $\vec{u}$ و $-5\vec{u}$ نفس الاتجاه.

3. الشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}$ معدوم.

4. الشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ غير معدوم.

5. A ، B ، C ثلاث نقط كيفية: $5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AC}$

6. إذا كان $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ فإنّ $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$

7. A ، B ، C ، D ليست في استقامية. إذا كان $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$ فإنّ الرّباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

8. النّقطة M تنتمي إلى $[AB]$ معناه $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

9. النّقطة M تنتمي إلى $[AB]$ معناه $AM-MB=AB$

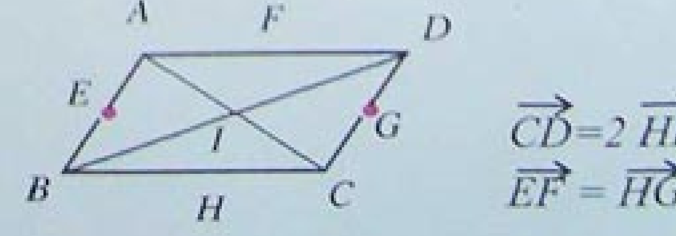
10. الشعاعان المتعاكسان مرتبطان خطيا.

11. إذا كان $\|\vec{u}\|=7$ فإنّ $\|-3\vec{u}\|=21$

12. كلّ ثلاث نقط ليست في استقامية تعيّن معلما للمستوي.

13. في متوازي الأضلاع $ABCD$ الذي مركزه I، والنقط E ، F ، G ، H منتصفات أضلاعه كما في الشّكل. لدينا:

أ) $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ ، ب) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CG}$



جـ) $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{HI}$

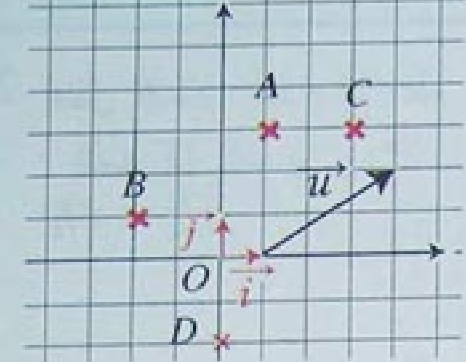
د) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$

14. في الشّكل أدناه لدينا:

أ) $A(1\,;3)$ ، ب) $B(2\,;1)$ ، جـ) $\overrightarrow{OC}=3(\vec{i}+\vec{j})$

د) للنقطتين A و C نفس الفاصلة

هـ) $\overrightarrow{AB}=-\vec{u}$



15. يوجد عدد حقيق x بحيث $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ متساويان

16. يوجد عدد حقيق x بحيث $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا.

17. الشّعاعان $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ ، $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا.

18. الشّعاعان $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا.

19. إذا كان I منتصف $[AB]$ ، و $\overrightarrow{AI}=x\,\overrightarrow{AB}$ فإنّ $x=2$

20. إذا كان I منتصف $[AB]$ ، و $\overrightarrow{AI}=x\,\overrightarrow{IB}$ فإنّ $x=-1$

21. الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم ذي المعادلة $y=-2x+1$

22. المستقيم ذو المعادلة $y=7$ ليس له شعاع توجيه

23. المستقيم ذو المعادلة $x-2y=5$ يشمل مبدأ المعلم.

24. النقطة $A(-2\,;1)$ تنتمي إلى المستقيم ذي المعادلة $y=5x+11$

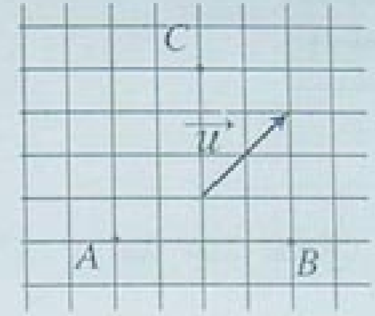


25. النقطة $A(-3\,;3)$ تنتمي إلى المستقيم ذي المعادلة $y=5x+11$

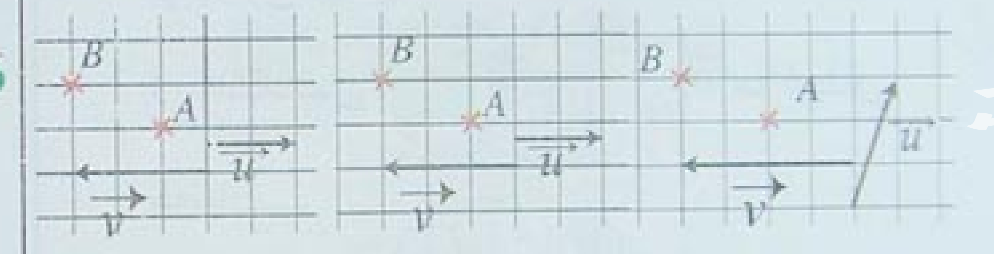
26. جملة المعادلتين $\begin{cases} -x+2y=6 \\ \frac{1}{2}x-y=-3 \end{cases}$ لها حل وحيد.

تساوي شعاعين ، مجموع شعاعين

27. انقل الشكل أدناه ثمّ علّم النقط L ، M ، N المعرّفة كما يأتي: $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$ ، $\overrightarrow{BN}=2\vec{u}$ ، $\overrightarrow{NC}=3\vec{u}$



28. انقل كلاً من الأشكال الآتية على ورقة مسطّرة ، ثمّ أنشئ النقط M ، N ، L حيث: $\overrightarrow{AM}=\vec{u}+\vec{v}$ ، $\overrightarrow{BN}=\vec{u}-\vec{v}$ ، $\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{LN}$



29. انقل الشكل أدناه على ورقة مسطّرة ، ثمّ علّم النقط L ، M ، N بحيث:

$\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

30. $ABCD$ متوازي أضلاع ، النقط A' ، B' ، C' نظائر النقط A ، B ، C بالنسبة إلى النقطة D

أ) ما هي الأشعة التي كلّ منها يساوي $\overrightarrow{AB}$ ؟

ب) ما هي الأشعة التي كلّ منها يساوي $\overrightarrow{AC'}$ ؟

31. ABC مثلث كيفي ، أنشئ النقط D ، E ، F المعرّفة كما يأتي: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AC}$

أ) بيّن أنّ الرّباعي $AEBD$ متوازي أضلاع

ب) بيّن أنّ النقط E ، A ، F هي في استقامية

32. ليكن $\vec{u}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{BC}$

و $\vec{v}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

أ) اكتب كلا من $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ على أبسط شكل ممكن

ب) احسب $\vec{u}+\vec{v}$.

33. A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية . أنشئ النقطتين M ، N العرّفة كما يأتي: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$

34. A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية.

أ) أنشئ النقطتين N ، M المعرّفتين بالعلاقتين الآتيتين على الترتيب: $\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

ب) بيّن أن النقطة C منتصف $[MN]$.

35. A ، B ، C ، D أربع نقط متمايزة ، بيّن أنّ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

36. A ، B ، C ثلاث نقط ، أي المساويات الآتية تعني أن C منتصف $[AB]$ ؟

أ) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ ، ب) $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CB}$

ج) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ ، د) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\vec{0}$

هـ) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$.

37. A ، B نقطتان من المستوي.

أ) بفرض I منتصف $[AB]$. بيّن أنه من أجل كلّ نقطة M فإنّ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

ب) بفرض $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ بيّن أنّ النقطة I هي منتصف $[AB]$

ج) صغ في جملة واحدة ما برهنت على صحته في أ) و ب)

38. ABC مثلث . G مركز ثقله . A' منتصف $[BC]$.

أ) بيّن أنّ $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA'}$

ب) بيّن أنّ: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

جداء شعاع بعدد حقيقي ،الارتباط الخطي لشعاعين

.39 $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه النقطة O. M منتصف $[AB]$، المستقيم الذي يشمل النقطة D ويوازي (AC) يقطع المستقيم الذي يشمل النقطة C ويوازي (BD) في النقطة N.
بيّن أنّ النقط M ، O ، N في استقامية.

.40 ارسم مثلثا ABC ، وعلّم النقطتين M و N بحيث $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AC}$.
بيّن أن المستقيمين (CM) و (BN) متوازيان.

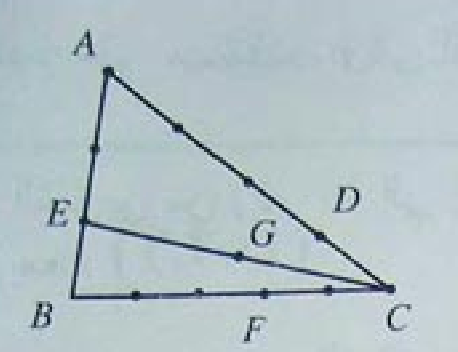
.41 $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين ومرتبطان خطيا.
أ) بيّن أنّ الشّعاعين $2\vec{u}+3\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا
ب) بيّن أنّ الشّعاعين $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا وذلك من أجل كلّ عددين حقيقيين α و β .

.42 $[AB]$ قطعة مستقيم طولها $9cm$. C نقطة منها حيث $AC = 5cm$
جدْ العدد الحقيقي x حيث $\overrightarrow{AC} = x\,\overrightarrow{AB}$

A C B

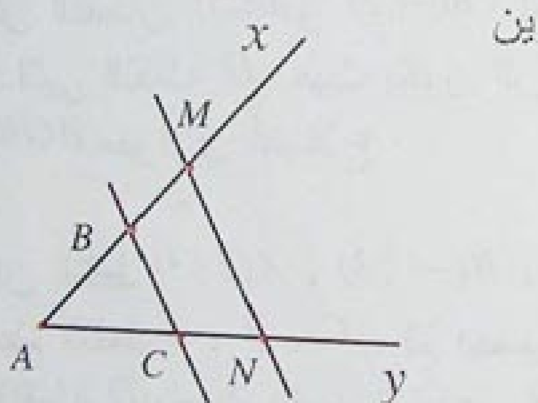
.43 $[AB]$ قطعة مستقيمة.
بيّن أنّه إذا كانت M تنتمي إلى $[AB]$ فإنّه يوجد عدد حقيقي k من $[0;1]$ حيث $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$

.44 ABC مثلث كيفي . النقط D ، E ، F معرّفة كما يأتي: $\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{CA} = 4\,\overrightarrow{CD}$
و $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ ، و G منتصف $[CE]$.
بيّن أنّ (BD) و (AF) يتقاطعان في النقطة G.
(إرشاد: عبّر عن الشّعاعين $\overrightarrow{BG}$ ، $\overrightarrow{BD}$ بدلالة $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ وكذلك بالنّسبة للشعاعين $\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{AF}$)



.45 A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية.
أ) أنشئ النّقطة M المعرّفة بالعلاقة
$$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$$
ب) بيّن أنّ النقط C ، B ، M في استقامية.(إرشاد عبّر عن الشّعاع $\overrightarrow{CM}$ بدلالة الشّعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$)

.46 $[AX)$ و $[AY)$ نصفا مستقيم . B ، M نقطتان من $[AX)$ ، و C ، N نقطتان من $[AY)$ (كما في الشّكل أدناه)
نضع $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AN} = y\,\overrightarrow{AC}$
أ) بيّن أنّه إذا كان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{MN}$ مرتبطين خطيا فإنّ $x=y$
ب) بيّن أنّه إذا كان $x=y$ فإنّ $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{MN}$ مرتبطان خطيا.
ج) ما هي النظرية التي برهنت عليها في هذا التّمرين



.47 A و B نقطتان متمايزتان. الهدف من التّمرين هو إنشاء النّقطة M المحققة للعلاقة $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ في حالة $\alpha=2$ و $\beta=3$.
أ) بيّن أنّه إذا كان $2\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ فإنّ $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ مرتبطان خطيا.
ب) هل للشعاعين $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ نفس الاتجاه ؟ وهل لهما نفس الطويلة ؟
ج) عبّر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ ، ثمّ أنشئ النّقطة M .

.48 A و B نقطتان متمايزتان ، M نقطة بحيث
$$\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}=0$$
عبّر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ ، ثمّ أنشئ النّقطة M .

في التمارين من رقم 49 إلى 62، ينسب المستوي إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

.49 ليكن $A(3;1)$ ، $\overrightarrow{OB}=2\vec{i}-\vec{j}$
$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$
علّم النقط A، B، C، D .

.50 ليكن $\vec{u}=4\vec{i}+\vec{j}$ ، $\vec{v}=-2\vec{i}+3\vec{j}$
أ) احسب مركبتي كلّ من الأشعة الآتية:
$\vec{u}+\vec{v}$ ، $\vec{u}+2\vec{v}$ ، $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$
ب) ارسم ممثلا مبدؤه النقطة O لكل من الأشعة السّابقة

.51 من أجل أية قيمة للعدد x تكون النقط A ، B ، C في استقامية، في كلّ الحالتين الآتيتين:
أ) $A(x;3)$ ، $B(4;5)$ ، $C(7;6)$
ب) $A(x;5)$ ، $B(x+4;3)$ ، $C(7;1)$

.52 لتكن النقطان $A(2,3)$ و $B(-2,2)$. احسب إحداثيي النقطة D بحيث يكون الرّباعي $AOBD$ متوازي أضلاع .

.53 لتكن النقط $A(2;3)$ ، $B(-4;3)$ ، $C(-5;-2)$
أ) علم النقط A ، B ، C ، ثمّ احسب إحداثيي النقطة D بحيث يكون الرّباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.
ب) احسب إحداثيي النقطة O مركز $ABCD$.

.54 لتكن النقط $A(0;3)$، $B(3;0)$، $C(-1;2)$، $D(4;-4)$
أ) هل المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان ؟
ب) M نقطة فاصلتها 4 . عيّن ترتيب M بحيث يكون المستقيمان (AB) و (CM) متوازيين.

.55 بيّن فيما يأتي أنّ الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا، ثمّ عبّر عن أحدهما بدلالة الآخر .
أ) $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ و
$\vec{v}=(\vec{i}+5\vec{j})+\frac{1}{2}(\vec{i}-\vec{j})$
ب) $\vec{u}=(2-\sqrt{3})\vec{i}+\vec{j}$ و
$\vec{v}=\vec{i}+(2+\sqrt{3})\vec{j}$

.56 عيّن في كلّ ممّا يأتي العدد x بحيث يكون الشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا.
أ) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x+1\\6\end{pmatrix}$
ب) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}2-x\\1\end{pmatrix}$
جـ) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\27\end{pmatrix}$

.57 لتكن النقطتان $A(-3;1)$ ، $B(7;6)$ ، M نقطة فاصلتها 1 . عيّن ترتيب النقطة M بحيث تكون النقط A ، M ، B في استقامية.

.58 لتكن النقطتان $A(-3;1)$ ، $B(7;6)$. أوجد علاقة بين x و y والتي من أجلها تكون النقطة $M(x;y)$ تنتمي إلى المستقيم (AB) .

.59 $ABCD$ متوازي أضلاع ، النقط E ، F ، G ، H معرّفة كما يلي : $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AE}$ ، $\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DF}$
$\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CG}$ ، $\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{BH}$.
أ) أنجز شكلا مناسبا.
ب) بيّن أن الشّعاعين $\overrightarrow{HE}$ و $\overrightarrow{GF}$ متساويان ، واستنتج نوع الرّباعي $EFGH$.
جـ) عيّن إحداثيي كلّ نقطة من النقط E ، F ، G ، H في المعلم $(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$، ثمّ تحقق من إجابة الجزء (ب) تحليليا (أي باستعمال الإحداثيات).

.60 في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ علّم النقط $A(0;4)$ ، $B(5;3)$ ، $C(4;-2)$ ، $D(-1;-1)$
تحقق من أنّ الرّباعي $ABCD$ مربع.

.61 $ABCD$ متوازي أضلاع ، النقطة A' نظيرة النقطة A بالنّسبة إلى النّقطة D ، النقطة M منتصف $[CD]$.
أ) بيّن لماذا يمكن اعتبار $(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$ معلما للمستوي؟

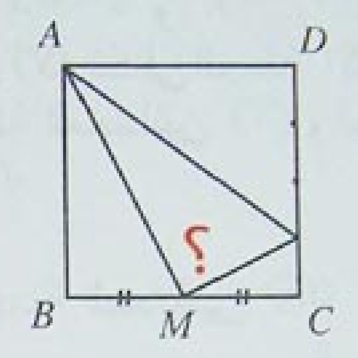
ب) عين إحداثيي كلّ من النقط A ، B ، C ، D ، M ، A' في هذا المعلم.

ج) بين باستعمال الإحداثيات المحصل عليها أنّ النقطة M هي منتصف $[BA']$.

.62 $ABCD$ مربّع ، النّقطة M منتصف $[BC]$ ، والنّقطة N معرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{CN}$

أ) بيّن لماذا يمكن اعتبار $(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$ معلما متعامدا متجانسا للمستوي؟

ب) بيّن تحليليا أنّ المثلث AMN قائم في M.



في التّمارين من إلى نعتبر $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلما متعامدا ومتجانسا.

.63 لتكن النقط $L(-1;3)$ ، $M(2;-1)$ ، $N(3;6)$.

أ) احسب أطوال أضلاع المثلث LMN.

ب) بيّن أنّ المثلث LMN قائم ومتساوي السّاقين.

.64 لتكن النقط $A(1;2)$ ، $B(-2;6)$ ، $C(3;6)$ ، $D(6;2)$

ما نوع الرّباعي $ABCD$ ؟

.65 حدّد نوع الرّباعي $ABEF$ إذا علمت أنّ: $A(1;2)$ ، $B(-2;6)$ ، $E(-6;3)$ ، $F(-3;-1)$

.66 أ) علّم النقط $A(-2;1)$ ، $B(1;4)$ ، $C(6;-1)$ ، وبيّن أنّ المثلث ABC قائم.

ب) عيّن إحداثيي مركز الدّائرة المحيطة بالمثلث ABC واحسب نصف قطرها.

ج) تحقق من أنّ النقطة $M(1;-4)$ تنتمي إلى الدّائرة المحيطة بالمثلث ABC .

.67 لتكن $A(3;-1)$ ، $B(-3;1)$ ، $M(x;y)$

أ) تحقق من أنّ النقطتين A ، B متناظرتان بالنّسبة إلى النقط O .

ب) بيّن أن: النّقطة M تكون متساوية المسافة عن طرفي $[AB]$ يكافئ $y=3x$

ج) عيّن قيم x في الحالة الّتي يكون فيها المثلث AMB متقايس الأضلاع.

معادلة مستقيم

في التمارين الموالية ينسب المستوي إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

.68 (D) مستقيم معادلته $3x-5y=7$ ، أوجد شعاع توجيه للمستقيم (D) ، وعيّن معامل توجيهه.

.69 نفس التّمرين السابق بالنّسبة إلى المستقيم (D') ذي المعادلة $2x\sqrt{3}+2y=-4$

.70 (D) مستقيم معادلته $3x=-7$ ، أوجد شعاع توجيه للمستقيم (D) . هل لـ (D) معامل توجيه ؟

.71 ارسم المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ، (D_4) ، (D_5) حيث:

$(D_1): y=3x$ $\qquad$ $(D_3): y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$

$(D_2): x=-4$ $\qquad$ $(D_4): y=-\frac{3}{2}x+7$

.72 لتكن النقط $A(1;3)$ ، $B(3;1)$ ، $C(3;4)$.
اكتب معادلة لكل مستقيم من المستقيمات (AB) ، (BC) ، (AC) على الشّكل $my+px=n$ ، ثمّ على الشكل $y=ax+b$

.73 لتكن $A(3;-2)$ و $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$. جد معادلة للمستقيم الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}$ شعاع توجيه له.

.74 جد معادلة للمستقيم الذي معامل توجيهه $\frac{1}{2}$ ويقطع محور التّراتيب في النّقطة الّتي ترتيبها -5.

75. (D) مستقيم معادلته $y=\sqrt{2}x-3$ ، اكتب معادلة للمستقيم (D') الذي يوازي المستقيم (D) و يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها4.

76. أ) جد معادلة للمستقيم (D) الذي معامل توجيهه $-\frac{3}{2}$ ويشمل النقطة $A(-2\,;-3)$.

ب) عيّن إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل ، وكذا إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

77. بيّن في كلّ من الحالتين الآتيتين أنّ المستقيمين (D) و (D') متوازيان.

أ) $(D): 2x-3y=1$

$(D'): -x+\frac{3}{2}y=0$

ب) $(D): -3x+7=0$

$(D'): x-\frac{\sqrt{3}}{5}=0$

جملة معادلتين خطيتين لمجهولين

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i},\vec{j})$

78. في كلّ مما يأتي حل جملة المعادلتين ، ثمّ مثّل الحل بيانيا.

أ) $\begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x\sqrt{2}+\frac{1}{2}y=2-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x\sqrt{6}-2y=0 \end{cases}$

جـ) $\begin{cases} -7x+11y=43 \\ 6x+y=-16 \end{cases}$ د) $\begin{cases} -x+y=-2 \\ 7x+y=22 \end{cases}$

79. لتكن جملة المعادلتين(S):

$$\begin{cases} 3x-y=5 \\ kx+y=11 \end{cases}$$

80. ما هي القيم الممكنة للعدد k بحيث يكون للجملة (S) حل وحيد.

لتكن جملة المعادلتين(S):

$$\begin{cases} x-\frac{1}{2}y=3 \\ -\frac{3}{2}x+3y=k \end{cases}$$

أ) بيّن أن الجملة (S) إما أنها لا تقبل حلا إما أنّ لها عددا غير منته من الحلول.

ب) ما هي القيمة الممكنة للعدد k بحيث يكون الجملة (S) لا نهاية من الحلول.

81. لتكن النقط $A(0\,;5)$ ، $B(6\,;2)$ ، $C(7\,;4)$ ، $D(-2\,;1)$

أ) بيّن أنّ المستقيمين (AB) و (CD) متقاطعان

ب) احسب إحداثيي نقطة تقاطعهما ، وتحقق من ذلك بيانيا.

82. نريد حل جملة المعادلتين (S):

$$\begin{cases} 2z^2-t^2=-1 \\ 3z^2+t^2=21 \end{cases}$$

أ) بوضع $z^2=x$ و $t^2=y$ اكتب جملة معادلتين (S') تكافئ الجملة (S) .

ب) حل جملة المعادلتين (S') واستنتج حل الجملة (S).

83. نريد حل جملة المعادلتين (S):

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{7}{y-2}=6 \\ \frac{7}{x}-\frac{3}{y-2}=16 \end{cases}$$

أ) بيّن أنّ $x\neq 0$ و أنّ $y\neq 2$

ب) بوضع $z=\frac{1}{x}$ و $t=\frac{1}{y-2}$ اكتب جملة معادلتين (S') تكافئ الجملة (S) .

ب) حل جملة المعادلتين (S') واستنتج حل الجملة (S).

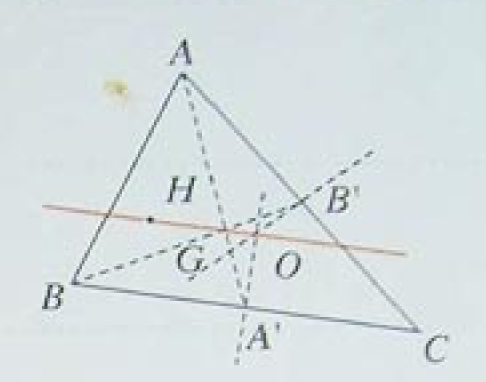
84. عددان مجموعهما 15 ، إذا أضفنا إلى كلّ منهما العدد 3 صار أحدهما نصف الآخر. جدْ هذين العددين.

85. بمناسبة انتقاله إلى الثانوية نظّم يوسف وليمة دعا إليها تلاميذ قسمه. لاحظ أنه لو يجلس كلّ 5 تلاميذ حول طاولة فإنّ 3 منهم لا يجد لهم أماكن للجلوس، ولو يجلس كلّ 6 تلاميذ حول طاولة فإنّ 4 أماكن تبقى شاغرة. ما هو عدد التلاميذ الذين دعاهم يوسف ؟ وما هو عدد الطاولات ؟

86. ABC مثلث أطوال أضلاعه $AB=9cm$ ، $AC=6cm$ ، $BC=10cm$. منصف زاوية الرأس A يقطع $[BC]$ في النقطة D. احسب الطولين BD و CD.

87. مستقيم أولر

ABC مثلث كيفي ، O مركز الدائرة المحيطة به، G مركز ثقله ،H نقطة تلاقي ارتفاعاته ، A' ، B' منتصفا كلّ من $[BC]$ ، $[AC]$ على الترتيب.



1) البحث عن النقطة X التي تحقق العلاقة : $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

أ) بيّن أنّ $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{OA'}$، واستنتج أنّ $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{OA'}$

ب) استنتج أنّ النقطة X تنتمي إلى ارتفاع المثلث ABC المتعلق بالضلع $[BC]$.

ج) تحقق بنفس الطريقة السابقة أنّ النقطة X تنتمي إلى ارتفاع المثلث ABC المتعلق بالضلع $[AC]$.

د) ماذا تمثل النقطة X في المثلث ABC ؟

2) أ) بيّن أنّ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\,\overrightarrow{GA'}$

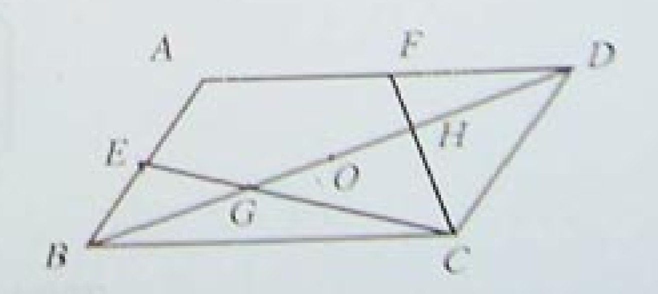
ب) استنتج أنّ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$

3) أ) بيّن أنّ $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$

ب) ماذا يمكنك أنّ تستنتج بالنسبة إلى النقط O ، G ، H .

* يسمّى المستقيم الذي يشمل النقط O ، G ، H مستقيم أولر.

88. الهدف من هذه المسألة هو برهان خاصة بعدّة طرائق وذلك بتنويع الوسائل الرّياضياتيّة المستخدمة.



$ABCD$ متوازي أضلاع . E ، F منتصفا ضلعيه $[AB]$ ، $[AD]$ على الترتيب. المستقيمان (CE) ، (CF) يقطعان $[BD]$ في النقطتين G ، H على الترتيب.

بيّن أنّ: $BG = GH = HD$.

الطريقة (1) باستعمال خاصة مركز ثقل مثلث

أ) بيّن أنّ النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC .

ب) عبّر عن الشّعاع $\overrightarrow{BG}$ بدلالة الشّعاع $\overrightarrow{GO}$.

ج) بنفس الطريقة السابقة عبّر عن الشّعاع $\overrightarrow{DH}$ بدلالة الشّعاع $\overrightarrow{HO}$.

د) استنتج مما سبق أنّ $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{HD}$ ومنه المطلوب.

الطريقة (2) باستعمال المعلم $(B\,;\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BE})$

أ) عيّن إحداثيات النقط المسماة في الشكل.

ب) احسب مركبتي كلّ من الأشعة $\overrightarrow{BG}$، $\overrightarrow{GH}$، $\overrightarrow{HD}$

ج) استنتج مما سبق أنّ $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{HD}$ ومنه المطلوب .

الطريقة (3) باستعمال خواص هندسية أساسية

أ) لتكن M منتصف $[CD]$. بيّن أنّ المستقيم (AM) يشمل النقطة H.

ب) بيّن أنّ المستقيمان (AM) و (CE) متوازيين.

ج) باستعمال نظرية طالس في كلّ من المثلثين ABH و DCG بيّن أنّ: $BG = GH = HD$

89. p عدد حقيقي ، و ليكن (D_p) مستقيما معرّفا بالمعادلة $y = x + p$.

أ) ارسم في مستو مزوّد بمعلم المستقيمين (D_0) ، (D_1) .

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عددين p و p' فإنّ المستقيمين (D_p) ، $(D_{p'})$ متوازيان .

ج) احسب بدلالة العدد p إحداثيي النقطتين A_p و B_p تقاطع المستقيم (D_p) مع محور الفواصل ومحور التراتيب على الترتيب.

د) احسب بدلالة العدد p إحداثيي النقطة M_p منتصف $[A_pB_p]$.

هـ) جد علاقة مستقلة عن p بين إحداثيي النقطة M_p، واستنتج مجموعة النقط M_p.

فهرس المحتويات



طبعة منقحة : 2007 - 2008

MS : 1108/05

ISBN : 9947.20.430.8 :ردمك

Dépot légal 1282 - 2005 :رقم الإيداع القانوني




الإبتدائي
المتوسط
الثانوي